G. Hauser.

Teilungsgleichungen der elliptischen Funktionen in imaginär-quadratischen Zahlkörpern.

EINLEITUNG.

Zu den wichtigsten Gleichungen der Algebra gehören bekanntlich die Kreisteilungsgleichungen:

$$z^n - a = o.$$

Setzt man $a = 1$, so sind die n^{ten} Einheitswurzeln, d. h. die Zahlen

$$z_h = e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot h} \qquad (h = 0, 1, 2, \cdots n-1),$$

die Wurzeln der obigen Gleichung.

Diesen Kreisteilungsgleichungen kommt nicht nur wegen ihrer Bedeutung für die Elementargeometrie, sondern vor allem deswegen eine besondere Rolle zu, weil ihre Durchforschung der höheren Algebra neue Gesichtspunkte eröffnete und zu weitern Zielen den Weg wies. Die ganze Theorie ist von Kronecker durch den Satz gekrönt worden, dass die Wurzeln aller im Bereich der rationalen Zahlen Abelschen Gleichungen in einem Körper der Einheitswurzeln enthalten sind.[1])

Aehnliches gilt nun von den Teilungsgleichungen der elliptischen Funktionen, deren Wurzeln die Werte

$$\varphi\left(\frac{h_1 \omega_1 + h_2 \omega_2}{n}\right) \qquad (h_1, h_2 = 0, 1, 2, \cdots n-1)$$

sind, welche eine gegebene elliptische Funktion $\varphi(z)$ mit den Perioden ω_1 und ω_2 an den Stellen

$$z_{h_1, h_2} = \frac{h_1 \omega_1 + h_2 \omega_2}{n}$$

annimmt. Ein wunderbares Ergebnis der modernen Algebra und Zahlentheorie ist die Erkenntnis, dass diese Teilungsgleichungen in

[1]) Kronecker: Bericht der K. Akad. der Wiss. zu Berlin. 1853.

bezug auf die imaginären quadratischen Zahlkörper das liefern, was die Kreisteilungsgleichungen für die rationalen Zahlen; m. a. Worten: Jede in einem imaginär-quadratischen Körper Abelsche Gleichung ist durch Kreiskörper und Teilungskörper der elliptischen Funktionen lösbar.[1])

Die Untersuchungen, die allmählich zur Aufstellung dieses Theorems geführt haben, fasst man gemeinhin unter dem Namen «Theorie der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen» zusammen. Das Reizvolle dieser Theorie liegt darin, dass hier Funktionentheorie, Zahlentheorie und Algebra in tiefstem Zusammenhange stehen. Sie ist im dritten Bande von H. Webers Lehrbuch der Algebra[2]) dargestellt. Diese Darstellung enthält aber noch manche Lücken und weist ausserdem verschiedene Unrichtigkeiten auf. Es ist nun R. Fueter gelungen, sämtliche Lücken der Weber'schen Darstellung auszufüllen. Anlässlich des letzten internationalen Mathematiker-Kongresses in Strassburg (22.—30. Sept. 1920) hat Fueter bereits die wichtigsten Resultate seiner Untersuchungen mitgeteilt.[3]) Aus denselben geht deutlich hervor, dass zwischen den Einheitswurzeln und den Wurzeln der Teilungsgleichungen der elliptischen Funktionen überraschende Analogien bestehen.

Die vorliegende Arbeit soll einen bescheidenen Beitrag an das Zahlenmaterial zu diesen überaus interessanten Untersuchungen liefern. Ihr Zweck ist die zahlenmässige Berechnung von Teilungsgleichungen in einigen einfachen imaginär-quadratischen Grundkörpern. — In einer vor Jahresfrist erschienenen gekrönten Preisschrift[4]) hat C. Bindschedler die Teilungskörper im Bereiche des Körpers $k(\sqrt{-3})$ genauer untersucht und seiner Arbeit eine ziemlich umfangreiche Tabelle von numerisch berechneten Teilungsgleichungen beigefügt. Von anderer Seite ist die Berechnung von Teilungsgleichungen in $k(\sqrt{-1})$ in Angriff genommen worden.

[1]) R. Fueter: Abelsche Gleichungen in quadratisch-imaginären Zahlkörpern. Math. Ann. Bd. 75, pag. 253.

[2]) 2. Aufl., Braunschweig 1908.

[3]) R. Fueter: Einige Sätze aus der Theorie der komplexen Multiplikation der ellipt. Funktionen. Comptes rendus du Congrès internat. des Mathématiciens. 1920.

[4]) C. Bindschedler: Die Teilungskörper der elliptischen Funktionen im Bereich der dritten Einheitswurzel. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 152.

Ausser für diese beiden Ausnahmefälle sind meines Wissens bis jetzt noch keine derartigen Berechnungen durchgeführt worden.

Wir legen unsern Berechnungen die drei elliptischen Funktionen zweiter Ordnung:

$$\mathfrak{T}_i(z;\omega_1,\omega_2)=\frac{\sqrt{3.4\,e_i^2-g_2}}{2\,(p(z;\,\omega_1,\omega_2)-e_i)}\qquad (i=1,2,3)$$

zugrunde. Hier bedeutet $p(z;\omega_1,\omega_2)$ die Weierstrass'sche p-Funktion mit den Perioden ω_1 und ω_2;

$$e_1=p\left(\frac{\omega_1}{2}\right),\qquad e_2=p\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right),\qquad e_3=p\left(\frac{\omega_2}{2}\right),$$

sind die 3 Wurzeln der Differentialgleichung

$$p'^2(z)=4\,p^3(z)-g_2\,p(z)-g_3,$$

wo $g_2=-4\,(e_1e_2+e_1e_3+e_2e_3)$, $g_3=4\,e_1e_2e_3$.

Dabei sind ferner die von z unabhängigen Grössen

$$\frac{\sqrt{3.4\,e_i^2-g_2}}{2}\qquad (i=1,2,3)$$

wie folgt als eindeutig bestimmte Quadratwurzeln definiert:

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3.4\,e_1^2-g_2}=\frac{\sigma_2\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\cdot\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma^2\left(\frac{\omega_1}{2}\right)},$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3.4\,e_2^2-g_2}=\frac{\sigma_1\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\cdot\sigma_3\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}{\sigma^2\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)},$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3.4\,e_3^2-g_2}=\frac{\sigma_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\cdot\sigma_2\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}{\sigma^2\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}.$$ [1])

Der Inhalt gliedert sich wie folgt: Im I. Kapitel wird die Multiplikationstheorie der Funktionen $\mathfrak{T}_i(z)$ für einen rationalen Multiplikator n entwickelt. Insbesondere werden hier die Multiplikationsformeln für n = 2, 3, 4 und 5 berechnet. Dabei ergibt sich die Tatsache, dass die in den Multiplikationsformeln auf-

[1]) Vgl. die von H. A. Schwarz herausgegebenen ‹Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Funktionen›. 2. Aufl. 1. Abt. 21.

tretenden Koeffizienten ganze ganzzahlige Funktionen der Grösse $t_i(\omega_1, \omega_2) = \frac{2^3 . 3\, e_i}{\sqrt{2^2 . 3\, e_i^2 - g_2}}$ sind.

Im II. Kapitel werden die $t_i \, (i = 1, 2, 3)$ unter Zugrundelegung von imaginär-quadratischen Zahlkörpern betrachtet und durch Formeln dargestellt, die sich für eine rasche Berechnung eignen. Diese Formeln werden dann noch auf einige Beispiele angewendet.

Das III. Kapitel dient der Definition und der Zusammenstellung der wichtigsten Eigenschaften der Teilungsgleichungen. Wir können dabei die entsprechenden Darlegungen in Webers Algebra, Bd. III, ohne wesentliche Abänderungen für unsere Zwecke verwerten. — Die Tabelle am Schluss enthält die Resultate unserer Berechnungen.

I. Kapitel.

Die Multiplikationstheorie der Funktionen $\mathfrak{T}_i(z)$.

Unter der Multiplikation einer elliptischen Funktion $\varphi(z)$ von 2. Ordnung versteht man die Darstellung der Funktion $\varphi(nz)$ für ein ganzzahliges n als rationale Funktion von $\varphi(z)$ und $\varphi'(z)$. Da jede elliptische Funktion von 2. Ordnung ein Additionstheorem besitzt, d. h. $\varphi(z+t)$ (worin t ein willkürlicher Parameter bedeutet) sich rational durch $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, $\varphi(t)$ und $\varphi'(t)$ ausdrücken lässt[1]), so ist dies eine Aufgabe, die immer gelöst werden kann.

§ 1. Die Eigenschaften von $\mathfrak{T}_i(z)$.

Indem wir zunächst die Abkürzung

$$c_i = \frac{\sqrt{3 \cdot 4\, e_i^2 - g_2}}{2} \tag{1}$$

einführen, bekommt die Definitionsgleichung der Funktionen $\mathfrak{T}_i(z)$ die Gestalt:

$$\underline{\mathfrak{T}_i(z; \omega_1, \omega_2) = \frac{c_i}{p(z; \omega_1, \omega_2) - e_i} \qquad (i = 1, 2, 3).} \tag{2}$$

[1]) Vgl. H. Burkhardt: Elliptische Funktionen. 3. A. 1920, pag. 110.

Aus den bekannten Eigenschaften der p-Funktion ergeben sich sofort die folgenden Eigenschaften der Funktionen $\mathfrak{T}_i(z)$:

I. $\mathfrak{T}_i(z)$ ist gerade in z.

II. $\mathfrak{T}_i(z)$ ist homogen von nullter Ordnung in z, ω_1, ω_2.

III. $\mathfrak{T}_i(z)$ besitzt im Grundperiodenparallelogramm an der Stelle $z = \frac{\omega}{2}$ einen Pol 2. Ordnung und wird im Nullpunkt von 2. Ordnung 0.

Dabei bedeutet $\frac{\omega}{2}$ eine zusammenfassende Bezeichnung für die Halbperioden, d. h. es ist

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{\omega}{2} &= \frac{\omega_1}{2} && \text{für } i = 1, \\ \frac{\omega}{2} &= \frac{\omega_1+\omega_2}{2} && \text{» } i = 2, \\ \frac{\omega}{2} &= \frac{\omega_2}{2} && \text{» } i = 3.\text{[1]} \end{aligned}$$

Entwickeln wir den Ausdruck $\frac{c_i}{p(z)-e_i}$, unter Verwendung der bekannten Reihe

$$(4)\qquad p(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20}z^2 + \frac{g_3}{28}z^4 + \cdots,$$

nach steigenden Potenzen von z, so erhalten wir die folgende Reihenentwicklung um den Nullpunkt:

$$(5)\qquad \mathfrak{T}_i(z) = c_i z^2 + e_i c_i z^4 + c_i\left(e_i - \frac{g_2}{20}\right)z^6 + \cdots.$$

Zur Bestimmung der Reihenentwicklung um den Pol $z = \frac{\omega}{2}$, leiten wir vorerst eine — auch für das Spätere wichtige — Beziehung zwischen $\mathfrak{T}_i(z)$ und der Grösse $p\left(z - \frac{\omega}{2}\right)$ her. Da $\mathfrak{T}_i(z)$ im Grundperiodenparallelogramme nur bei $z = \frac{\omega}{2}$ einen Pol, und zwar von 2. Ordnung hat, so gilt die folgende Darstellung durch $p\left(z - \frac{\omega}{2}\right)$:

$$\mathfrak{T}_i(z) = a_i + b_i p\left(z - \frac{\omega}{2}\right),$$

[1]) Das ω in $\frac{\omega}{2}$ sei nicht zu verwechseln mit dem später einzuführenden Periodenverhältnis $\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1}$.

und wegen $\mathfrak{C}_i(0) = 0$, ist $a_i = -b_i e_i$. Wir erhalten also mit Berücksichtigung von (4) die Reihe

$$\mathfrak{C}_i(z) = -b_i e_i + b_i \left(z - \frac{\omega}{2}\right)^{-2} \cdot [\cdots]. \tag{6}$$

Wir müssen noch b_i bestimmen; dazu setzen wir die folgende Taylor'sche Entwicklung für $p(z)$ in (2) ein:

$$p(z) = p\left(\frac{\omega}{2}\right) + * + \frac{p''\left(\frac{\omega}{2}\right)}{2!}\left(z - \frac{\omega}{2}\right)^2 + \cdots,$$

wobei rechts das 2. Glied wegen $p'\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$ wegfällt. Es ist dann

$$\mathfrak{C}_i(z) = \frac{2\,c_i}{p''\left(\frac{\omega}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(z - \frac{\omega}{2}\right)^2}(1 + \cdots). \tag{6'}$$

Die Vergleichung der Koeffizienten der Potenz $\left(z - \frac{\omega}{2}\right)^{-2}$ in (6) und (6') ergibt für b_i den Wert:

$$b_i = \frac{2\,c_i}{p''\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$$

Berücksichtigen wir noch die Relation

$$p''(z) = 6\,p^2(z) - \frac{1}{2}\,g_2$$

und denken wir an die Bedeutung von c_i [vgl. (1)], so finden wir schliesslich, dass

$$b_i = \frac{1}{c_i}$$

ist. Es besteht also die Gleichung

$$\underline{\mathfrak{C}_i(z) = \frac{p\left(z - \frac{\omega}{2}\right) - e_i}{c_i}}. \tag{7}$$

Vertauschen wir in (4) z durch $z - \frac{\omega}{2}$ und setzen wir alsdann diese Reihe in (7) für $p\left(z - \frac{\omega}{2}\right)$ ein, so erhalten wir nun die gesuchte Reihenentwicklung um den Pol $z - \frac{\omega}{2}$:

$$\mathfrak{C}_i(z) = \frac{1}{c_i} \cdot \frac{1}{\left(z - \frac{\omega}{2}\right)^2} - \frac{e_i}{c_i} + \frac{g_2}{20\,c_i}\left(z - \frac{\omega}{2}\right)^2 + \frac{g_3}{28\,c_i}\left(z - \frac{\omega}{2}\right)^4 + \cdots \tag{8}$$

Die Gleichung (7) liefert uns ferner den Beweis des Satzes:

IV. $\mathfrak{T}_i(z)$ nimmt den reziproken Wert an, wenn das Argument um die zugehörige Halbperiode vermehrt wird, d. h. $T_i(z)$ genügt der Funktionalgleichung:

$$\underline{\mathfrak{T}_i\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{\mathfrak{T}_i(z)}}. \tag{9}$$

Setzen wir nämlich in (7) $z+\frac{\omega}{2}$ für z, so ergibt sich die identische Gleichung:

$$\mathfrak{T}_i\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=\frac{p(z)-e_i}{c_i}=\frac{1}{\mathfrak{T}_i(z)}, \text{ w. z. b. w.}$$

Wir fassen die wichtigsten Ergebnisse dieses Paragraphen noch kurz zusammen in den

Satz: Die drei Funktionen $\mathfrak{T}_i(z;\omega_1,\omega_2)=\frac{\sqrt{3.4e_i^2-g_2}}{2(p(z)-e_i)}$ $(i=1,2,3)$ sind elliptische Funktionen 2. Ordnung mit folgenden Polen und Nullstellen:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{1. Pole 2. Ordnung:} & z=\frac{\omega}{2}+\Omega \\ \text{2. Nullstellen 2. Ordn.:} & z=\Omega\end{array}\right\}\Omega=h_1\omega_1+h_2\omega_2 \text{ und } \left.\begin{array}{l}h_1\\h_2\end{array}\right\}=0,\pm1,\pm2,\pm\cdots$$

Sie genügen ferner den Gleichungen:

a) $\mathfrak{T}_i(-z)=\mathfrak{T}_i(z)$,

b) $\mathfrak{T}_i(tz;t\omega_1,t\omega_2)=\mathfrak{T}_i(z;\omega_1,\omega_2)$,

c) $\mathfrak{T}_i\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{\mathfrak{T}_i(z)}$,

unter Beachtung von (3).

§ 2. Die Differentialgleichung.

Ein allgemeiner Satz besagt, dass jede elliptische Funktion einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung höheren Grades genügt, in der die unabhängige Veränderliche explicite nicht vorkommt.[1]) Um diesen Satz für den Fall der Funktionen $\mathfrak{T}_i(z)$ verifizieren zu können, müssen wir die Ableitungen $\mathfrak{T}_i'(z)$ $(i=1,2,3)$ betrachten. Dazu knüpfen wir am besten an Gleichung (7) an und differenzieren sie nach z. So ergibt sich

$$\mathfrak{T}_i'(z)=\frac{p'\left(z-\frac{\omega}{2}\right)}{c_i}. \tag{10}$$

[1]) Vgl. H. Burkhardt: Ellipt. Funktionen, pag. 92.

Nach dieser Gleichung besitzt also $\mathfrak{C}_i'(z)$ im wesentlichen dieselben Eigenschaften wie $\wp'\left(z-\frac{\omega}{2}\right)$. Der von z unabhängige Faktor $\frac{1}{c_i}$ bedingt nur einen Unterschied bezüglich der Homogenität. Dieses Resultat soll in den nachfolgenden Sätzen noch etwas ausführlicher dargelegt werden:

I. Jede der drei Ableitungen $\mathfrak{C}_i'(z)$ $(i=1,2,3)$ ist eine elliptische Funktion 3. Ordnung mit den beiden Perioden ω_1, ω_2 und den folgenden Polen und Nullstellen:

1. Pole 3. Ordnung: $z=\frac{\omega}{2}+\Omega$,

2a) Nullstellen 1. Ordnung von $\mathfrak{C}_1(z)$:

$$z=\Omega,\ z=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}+\Omega,\ z=\frac{\omega_2}{2}+\Omega,$$

b) Nullstellen 1. Ordnung von $\mathfrak{C}_2(z)$:

$$z=\Omega,\ z=\frac{\omega_1}{2}+\Omega,\ z=\frac{\omega_2}{2}+\Omega,$$

c) Nullstellen 1. Ordnung von $\mathfrak{C}_3(z)$:

$$z=\Omega,\ z=\frac{\omega_1}{2}+\Omega,\ z=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}+\Omega,$$

wobei Ω alle Gitterpunkte durchläuft.

II. $\mathfrak{C}_i'(z)$ ist ungerade in z.

III. $\mathfrak{C}_i'(z)$ ist homogen in z, ω_1, ω_2 von der Dimension -1.

Diese Eigenschaften von $\mathfrak{C}_i'(z)$ erkennen wir auch leicht aus den beiden Reihenentwicklungen

$$\mathfrak{C}_i'(z)=2\,c_i\,z+4\,e_i\,c_i\,z^3+6\,c_i\left(c_i^2-\frac{g_2}{20}\right)z^5+\cdots \tag{11}$$

und

$$\mathfrak{C}_i'(z)=-\frac{2}{c_i\left(z-\frac{\omega}{2}\right)^3}+\frac{g_2}{10\,c_i}\left(z-\frac{\omega}{2}\right)+\frac{g_3}{7\,c_i}\left(z-\frac{\omega}{2}\right)^3+\cdots, \tag{12}$$

die sich durch beidseitige Differentiation von (5) bezw. (8) ergeben.

Zur Aufstellung der Differentialgleichung für $\mathfrak{C}_i(z)$ müssen wir uns mit Hilfe von $\mathfrak{C}_i'(z)$ eine gerade elliptische Funktion von z mit den beiden Perioden ω_1, ω_2 bilden, da nur solche Funktionen sich rational durch $\mathfrak{C}_i(z)$ allein ausdrücken lassen. Betrachten wir also die Funktionen $\mathfrak{C}_i'^2(z)$ $(i=1,2,3)$. Aus den Eigenschaften I und II von $\mathfrak{C}_i'(z)$ folgt sofort, dass die $\mathfrak{C}_i'^2(z)$ gerade elliptische Funktionen von 6. Ordnung sind. Sie besitzen dieselben Pole und Nullstellen wie $\mathfrak{C}_i'(z)$, mit dem Unterschiede, dass jetzt die Pole je von 6. Ordnung und die Nullstellen je von 2. Ordnung angenommen werden. Es hat also z. B. $\mathfrak{C}_1'^2(z)$ dieselben Pole und Nullstellen wie die folgende ganze rationale Funktion 3. Grades in $\mathfrak{C}_1(z)$:

$$\mathfrak{C}_1(z) \cdot \left(\mathfrak{C}_1(z) - \mathfrak{C}_1\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\right)\left(\mathfrak{C}_1(z) - \mathfrak{C}_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\right).$$

Es gilt somit die Relation

$$\mathfrak{C}_1'^2(z) = c \cdot \mathfrak{C}_1(z)\left(\mathfrak{C}_1(z) - \mathfrak{C}_1\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\right)\left(\left(\mathfrak{C}_1(z) - \mathfrak{C}_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\right).$$

Zur Bestimmung der Konstanten c haben wir nur die Entwicklungen der linken und der rechten Seite nach Potenzen von $z - \frac{\omega_1}{2}$ miteinander zu vergleichen, wobei wir uns je mit dem 1. Glied begnügen können. Auf Grund von (8) und (12) erhalten wir:

$$\frac{4}{c_1^2} \cdot \frac{1}{\left(z - \frac{\omega_1}{2}\right)^6} + \cdots = \frac{c}{c_1^3} \cdot \frac{1}{\left(z - \frac{\omega_1}{2}\right)^6} + \cdots,$$

so dass wir für c den Wert $4\,c_1$ finden. Es besteht also die identische Gleichung

$$\text{(13a)} \quad \mathfrak{C}_1'^2(z) = 4\,c_1\,\mathfrak{C}_1(z)\left(\mathfrak{C}_1(z) - \mathfrak{C}_1\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\right)\left(\mathfrak{C}_1(z) - \mathfrak{C}_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\right).$$

Analog ergeben sich die beiden entsprechenden Relationen für $i = 2$ und $i = 3$ in der Form:

$$\text{(13b)} \quad \mathfrak{C}_2'^2(z) = 4\,c_2\,\mathfrak{C}_2(z)\left(\mathfrak{C}_2(z) - \mathfrak{C}_2\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\right)\left(\mathfrak{C}_2(z) - \mathfrak{C}_2\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\right),$$

$$\text{(13c)} \quad \mathfrak{C}_3'^2(z) = 4\,c_3\,\mathfrak{C}_3(z)\left(\mathfrak{C}_3(z) - \mathfrak{C}_3\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\right)\left(\mathfrak{C}_3(z) - \mathfrak{C}_3\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\right).$$

Die endgültige Gestalt der gesuchten Differentialgleichung erhalten wir durch Ausmultiplizieren der rechten Seiten von (13a, b, c).

Wir führen dies für den Fall $i = 1$ wirklich durch und geben für die beiden übrigen Fälle wieder nur die Resultate an. Es ist

$$\mathfrak{C}_1'^2(z) = 4\,c_1\,\mathfrak{C}_1^3(z) - 4\,c_1\left(\mathfrak{C}_1\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right) + \mathfrak{C}_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\right) \cdot \mathfrak{C}_1^2(z)$$
$$+ 4\,c_1\,\mathfrak{C}_1\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right) \cdot \mathfrak{C}_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \cdot \mathfrak{C}_1(z).$$

Nun ist nach (2) und wegen $e_1 + e_2 + e_3 = 0$:

$$\mathfrak{T}_1\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right) + \mathfrak{T}_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = \frac{c_1}{e_2-e_1} + \frac{c_1}{e_3-e_1} = -\frac{3\,e_1\,c_1}{(e_2-e_1)(e_3-e_1)}.$$

Ferner gilt nach (2) und infolge der Funktionalgleichung (9):

$$\mathfrak{T}_1\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right) \cdot \mathfrak{T}_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = \frac{c_1}{e_2-e_1} \cdot \frac{c_1}{e_3-e_1} = 1,$$

also ist

$$(e_2 - e_1)(e_3 - e_1) = c_1^2,$$

woraus hervorgeht, dass

$$\mathfrak{T}_1\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right) + \mathfrak{T}_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = -\frac{3\,e_1}{c_1}$$

und

$$\mathfrak{T}_1\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right) \cdot \mathfrak{T}_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = 1$$

ist. Zwischen $\mathfrak{T}_1(z)$ und $\mathfrak{T}_1'(z)$ besteht also die Differentialgleichung:

$$\mathfrak{T}_1'^2(z) = 4\,c_1\,\mathfrak{T}_1^3(z) + 12\,e_1\,\mathfrak{T}_1^2(z) + 4\,c_1\,\mathfrak{T}_1(z).$$

Ebenso gilt:

$$\mathfrak{T}_2'^2(z) = 4\,c_2\,\mathfrak{T}_2^3(z) + 12\,e_2\,\mathfrak{T}_2^2(z) + 4\,c_2\,\mathfrak{T}_2(z),$$
$$\mathfrak{T}_3'^2(z) = 4\,c_3\,\mathfrak{T}_3^3(z) + 12\,e_3\,\mathfrak{T}_3^2(z) + 4\,c_3\,\mathfrak{T}_3(z).$$

Damit ist der folgende Satz bewiesen:

Satz: Die Funktionen $\mathfrak{T}_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$ genügen einer algebraischen Differentialgleichung mit von z unabhängigen Koeffizienten, von der Form:

$$(14)\qquad \underline{\mathfrak{T}_i'^2(z) = 4\,c_i\,\mathfrak{T}_i^3(z) + 12\,e_i\,\mathfrak{T}_i^2(z) + 4\,c_i\,\mathfrak{T}_i(z).}$$

Aus (14) erhalten wir durch wiederholte Differentiation nach z der Reihe nach die Relationen:

$$(15)\qquad \mathfrak{T}_i''(z) = 6\,c_i\,\mathfrak{T}_i^2(z) + 12\,e_i\,\mathfrak{T}_i(z) + 2\,c_i,$$

$$(16)\qquad \mathfrak{T}_i'''(z) = 12\,(c_i\,\mathfrak{T}_i(z) + e_i) \cdot \mathfrak{T}_i'(z).$$

§ 3. Das Additionstheorem. — Rekursionsformel.

Wir leiten das Additionstheorem der Funktionen $\mathfrak{T}_i(z)$ aus demjenigen der p-Funktion her. Dieses hat bekanntlich die Form:

$$(17)\qquad p(z+t) = \frac{1}{4}\left(\frac{p'(z) - p'(t)}{p(z) - p(t)}\right)^2 - p(z) - p(t),$$

worin t ein willkürlicher Parameter bedeutet. In (7) ersetzen wir das Argument z durch $z + t$ und erhalten:

$$\mathfrak{T}_i(z+t)=\frac{p\left[\left(z-\frac{\omega}{2}\right)+t\right]-e_i}{c_i}.$$

Diese Gleichung geht nun vermöge der Relation (17), in welcher wir uns $z-\frac{\omega}{2}$ für z eingesetzt denken, über in

$$(18)\quad \mathfrak{T}_i(z+t)=\frac{\frac{1}{4}\left[\frac{p'\left(z-\frac{\omega}{2}\right)-p'(t)}{p\left(z-\frac{\omega}{2}\right)-p(t)}\right]^2-p\left(z-\frac{\omega}{2}\right)-p(t)-e_i}{c_i}$$

Um hieraus eine Formel von der Gestalt:

$$\mathfrak{T}_i(z+t)=\text{rat. Funktion}\left(\mathfrak{T}_i(z),\ \mathfrak{T}_i'(z),\ \mathfrak{T}_i(t),\ \mathfrak{T}_i'(t)\right)$$

zu bekommen, müssen wir $p\left(z-\frac{\omega}{2}\right)$, $p'\left(z-\frac{\omega}{2}\right)$, $p(t)$ und $p'(t)$ bezw. durch $\mathfrak{T}_i(z)$, $\mathfrak{T}_i'(z)$, $\mathfrak{T}_i(t)$ und $\mathfrak{T}_i'(t)$ ausdrücken. Durch Auflösen der Definitionsgleichung (2) nach $p(z)$ ergibt sich:

$$p(z)=e_i+\frac{c_i}{\mathfrak{T}_i(z)}$$

und daraus durch Differentiation nach z:

$$p'(z)=-c_i\frac{\mathfrak{T}_i'(z)}{\mathfrak{T}_i^2(z)}.$$

Ferner erhalten wir durch Auflösung von (7) nach $p\left(z-\frac{\omega}{2}\right)$:

$$p\left(z-\frac{\omega}{2}\right)=e_i+c_i\mathfrak{T}_i(z)$$

und daraus durch Differentiation nach z:

$$p'\left(z-\frac{\omega}{2}\right)=c_i\mathfrak{T}_i'(z).$$

Indem wir nun diese 4 Beziehungen verwenden, wird (18) zu

$$\mathfrak{T}_i(z+t)=\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{c_i\mathfrak{T}_i'(z)+c_i\frac{\mathfrak{T}_i'(t)}{\mathfrak{T}_i^2(t)}}{e_i+c_i\mathfrak{T}_i(z)-e_i-c_i\frac{1}{\mathfrak{T}_i(t)}}\right)^2-e_i-c_i\mathfrak{T}_i(z)-e_i-\frac{c_i}{\mathfrak{T}_i(t)}-e_i}{c_i}$$

$$=\frac{1}{4c_i\mathfrak{T}_i^2(t)}\left(\frac{\mathfrak{T}_i'(z)\cdot\mathfrak{T}_i^2(t)+\mathfrak{T}_i'(t)}{\mathfrak{T}_i(z)\cdot\mathfrak{T}_i(t)-1}\right)^2-\mathfrak{T}_i(z)-\frac{1}{\mathfrak{T}_i(t)}-\frac{3e_i}{c_i}$$

$$\doteq\frac{\left(\mathfrak{T}_i'(z)\cdot\mathfrak{T}_i^2(t)+\mathfrak{T}_i'(t)\right)^2-4c_i\mathfrak{T}_i(z)\mathfrak{T}_i^2(t)\left(\mathfrak{T}_i(z)\cdot\mathfrak{T}_i(t)-1\right)^2}{4c_i\mathfrak{T}_i^2(t)\left(\mathfrak{T}_i(z)\cdot\mathfrak{T}_i(t)-1\right)^2}$$

$$\frac{-4c_i\mathfrak{T}_i(t)\left(\mathfrak{T}_i(z)\mathfrak{T}_i(t)-1\right)^2-12e_i\mathfrak{T}_i^2(t)\left(\mathfrak{T}_i(z)\mathfrak{T}_i(t)-1\right)^2}{4c_i\mathfrak{T}_i^2(t)\left(\mathfrak{T}_i(z)\cdot\mathfrak{T}_i(t)-1\right)^2}$$

oder abgekürzt:

$$(19)\qquad \bar{\mathfrak{T}}_i(z+t) = \frac{Z\left(\mathfrak{T}_i(z), \mathfrak{T}_i'(z), \mathfrak{T}_i(t), \mathfrak{T}_i'(t)\right)}{4\,c_i\mathfrak{T}_i^2(t)\left(\mathfrak{T}_i(z)\,\mathfrak{T}_i(t)-1\right)^2}.$$

Der Zähler Z lässt sich durch Ausmultiplizieren der einzelnen Klammern und Vereinigung der gleichartigen Ausdrücke zunächst auf die Form bringen:

$$Z\left(\mathfrak{T}_i(z), \cdots, \mathfrak{T}_i'(t)\right) = \mathfrak{T}_i^2(t)\Big[4\,c_i\mathfrak{T}_i(z) + 2\,\mathfrak{T}_i'(z)\,\mathfrak{T}_i'(t) + 4\,c_i\mathfrak{T}_i(t) + 4\,c_i\mathfrak{T}_i^2(z)\,\mathfrak{T}_i(t) + 4\,c_i\mathfrak{T}_i(z)\,\mathfrak{T}_i^2(t) + 24\,e_i\mathfrak{T}_i(z)\,\mathfrak{T}_i(t)\Big]$$

In der eckigen Klammer ergänzen wir die 3 ersten Glieder zu $\left(\mathfrak{T}_i'(z)+\mathfrak{T}_i'(t)\right)^2$, indem wir die fehlenden Glieder (vgl. (14))

$$12\,e_i\mathfrak{T}_i^2(z) + 4\,c_i\mathfrak{T}_i^3(z)$$

und

$$12\,e_i\mathfrak{T}_i^2(t) + 4\,c_i\mathfrak{T}_i^3(t)$$

addieren und subtrahieren:

$$\begin{aligned} Z\left(\mathfrak{T}_i(z),\cdots, \mathfrak{T}_i'(t)\right) &= \mathfrak{T}_i^2(t)\Big[4\,c_i\mathfrak{T}_i^2(t)\left(\mathfrak{T}_i(z)-\mathfrak{T}_i(t)\right) - 4\,c_i\mathfrak{T}_i^2(z)\cdot \\ &\quad \left(\mathfrak{T}_i(z)-\mathfrak{T}_i(t)\right) - 12\,e_i\left(\mathfrak{T}_i^2(z)+2\,\mathfrak{T}_i(z)\,\mathfrak{T}_i(t) \right. \\ &\quad \left. +\,\mathfrak{T}_i^2(t)\right) + \left(\mathfrak{T}_i'(z)+\mathfrak{T}_i'(t)\right)^2\Big] \\ &= 4c_i\mathfrak{T}_i^2(t)\Big[\frac{1}{4c_i}\left(\mathfrak{T}_i'(z)+\mathfrak{T}_i'(t)\right)^2 - \left(\mathfrak{T}_i(z)-\mathfrak{T}_i(t)\right)^2\cdot \\ &\quad \left(\mathfrak{T}_i(z)+\frac{3\,e_i}{c_i}+\mathfrak{T}_i(t)\right)\Big] \end{aligned}$$

Führen wir noch die Abkürzung

$$(20)\qquad t_i = \frac{3\cdot 4\,e_i}{c_i}$$

ein, so erhalten wir schliesslich die folgende in z und t symmetrische Formel:

$$(21)\quad \mathfrak{T}_i(z+t) = \frac{\frac{1}{4\,c_i}\left(\mathfrak{T}_i'(z)+\mathfrak{T}_i'(t)\right)^2 - \left(\mathfrak{T}_i(z)-\mathfrak{T}_i(t)\right)^2\left(\mathfrak{T}_i(z)+\frac{1}{4}t_i+\mathfrak{T}_i(t)\right)^2}{\left(\mathfrak{T}_i(z)\cdot\mathfrak{T}_i(t)-1\right)^2}.$$

Wir nennen diese Formel das Additionstheorem der Funktionen $\mathfrak{T}_i(z)$.

Wenn man (21) z. B. nach z differenziert, erhält man das Additionstheorem der Ableitungen $\mathfrak{T}_i'(z)$ in der Gestalt:

$$(22)\quad \mathfrak{T}_i'(z+t) = \frac{\mathfrak{T}_i'(z)\Big[4c_i\mathfrak{T}_i(z)\mathfrak{T}_i(t)\left(\mathfrak{T}_i^2(t)-1\right)-\mathfrak{T}_i''(t)\left(\mathfrak{T}_i(z)\mathfrak{T}_i(t)+1\right)\Big]}{c_i\left(\mathfrak{T}_i(z)\mathfrak{T}_i(t)-1\right)^3}$$
$$+\frac{\mathfrak{T}_i'(t)\Big[4c_i\mathfrak{T}_i(z)\mathfrak{T}_i(t)\left(\mathfrak{T}_i^2(z)-1\right)-\mathfrak{T}_i''(z)\left(\mathfrak{T}_i(z)\mathfrak{T}_i(t)+1\right)\Big]}{c_i\left(\mathfrak{T}_i(z)\cdot\mathfrak{T}_i(t)-1\right)^3},$$

wobei [nach (15)] $\mathfrak{T}_i''(z) = 6\,c_i\,\mathfrak{T}_i^2(z) + 12\,e_i\,\mathfrak{T}_i(z) + 2\,c_i$.

An dieser Stelle wollen wir noch durch eine kurze funktionentheoretische Ueberlegung eine Rekursionsformel herleiten, die uns im nächsten Paragraphen gute Dienste leisten wird.

Betrachten wir das Produkt $\mathfrak{T}_i(z+t)\cdot\mathfrak{T}_i(z-t)$. Dasselbe wird nach § 1, III von 2. Ordnung unendlich für alle Werte z, die der Bedingung

$$z \pm t \equiv \frac{\omega}{2} \pmod{\Omega}$$

genügen, also von der Form sind:

$$z = \mp t + \frac{\omega}{2} + h_1\,\omega_1 + h_2\,\omega_2,$$

wobei $\left.\begin{matrix} h_1 \\ h_2 \end{matrix}\right\} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \cdots$

$\mathfrak{T}_i(z+t)\cdot\mathfrak{T}_i(z-t)$ wird von 2. Ordnung 0 für alle Werte z, die der Bedingung

$$z \pm t \equiv 0 \pmod{\Omega}$$

genügen, also für

$$z = \mp t + h_1\,\omega_1 + h_2\,\omega_2,$$

wobei wieder h_1 und h_2 voneinander unabhängig alle ganzen Zahlen durchlaufen. Wir können also mit Rücksicht auf Funktionalgleichung (9) setzen:

$$\mathfrak{T}_i(z+t)\cdot\mathfrak{T}_i(z-t) = k\cdot\left(\frac{\mathfrak{T}_i(z)-\mathfrak{T}_i(t)}{\mathfrak{T}_i(z)\,\mathfrak{T}_i(t)-1}\right)^2.$$

Die Bestimmung der Konstanten k geschieht am einfachsten durch die spezielle Wahl: $z=0$. Obige Gleichung geht nämlich dabei in die folgende über:

$$\mathfrak{T}_i^2(t) = k\cdot\mathfrak{T}_i^2(t),$$

woraus sich für k der Wert 1 ergibt. Es besteht also die elegante Formel:

$$\mathfrak{T}_i(z+t)\cdot\mathfrak{T}_i(z-t) = \left(\frac{\mathfrak{T}_i(z)-\mathfrak{T}_i(t)}{\mathfrak{T}_i(z)\,\mathfrak{T}_i(t)-1}\right)^2.$$

Wenn wir hierin z durch $(m+1)\cdot z$ und t durch mz ersetzen, so erhalten wir folgende für die Berechnung der Multiplikationsformeln wertvolle Relation:

$$\text{(23)} \qquad \underline{\mathfrak{C}_i\big((2m+1)z\big)\cdot\mathfrak{C}_i(z) = \left(\frac{\mathfrak{C}_i\big((m+1)z\big)-\mathfrak{C}_i(mz)}{\mathfrak{C}_i\big((m+1)z\big)\cdot\mathfrak{C}_i(mz)-1}\right)^2},$$

welche uns $\mathfrak{C}_i\big((2m+1)z\big)$ liefert, wenn $\mathfrak{C}_i(mz)$ und $\big(\mathfrak{C}_i(m+1)z\big)$ bekannt sind.

§ 4. Die Multiplikation.

Wir haben die nötigen Vorbereitungen getroffen, um nun das Multiplikationsproblem lösen zu können. Wegen

$$\mathfrak{C}_i(-z)=\mathfrak{C}_i(z)$$

wird sich $\mathfrak{C}_i(nz)$, für ein ganzzahliges n, als rationale Funktion von $\mathfrak{C}_i(z)$ allein darstellen lassen.

Wir erhalten sofort eine solche Darstellung für $n=2$, wenn wir in dem Additionstheorem (21) $t=z$ setzen. Es ist

$$\text{(24)} \qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{C}_i(2z) &= \frac{\mathfrak{C}_i'^2(z)}{c_i\big(\mathfrak{C}_i^2(z)-1\big)^2} \\ &= \frac{\mathfrak{C}_i(z)\big(4\,\mathfrak{C}_i^2(z)+t_i\mathfrak{C}_i(z)+4\big)}{\big(\mathfrak{C}_i^2(z)-1\big)^2} \end{aligned}\right.$$

$\big($mit Benützung von (14) und 20)$\big)$.

Durch Differentiation der Formel (24) nach z oder bequemer noch, indem wir in dem Additionstheorem (22) $t=z$ setzen, erhalten wir:

$$\text{(25)} \qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{C}_i'(2z) &= \frac{\big[4c_i\mathfrak{C}_i^2(z)\big(\mathfrak{C}_i^2(z)-1\big)-\big(\mathfrak{C}_i^2(z)+1\big)\cdot\mathfrak{C}_i''(z)\big]\cdot\mathfrak{C}_i'(z)}{c_i\big(\mathfrak{C}_i^2(z)-1\big)^3} \\ &= -\frac{\mathfrak{C}_i'(z)\big[2\,\mathfrak{C}_i^4(z)+t_i\mathfrak{C}_i^3(z)+12\,\mathfrak{C}_i^2(z)+t_i\mathfrak{C}_i(z)+2\big]}{\big(\mathfrak{C}_i^2(z)-1\big)^3} \end{aligned}\right.$$

$\big($mit Rücksicht auf (15) und (20)$\big)$.

Wir könnten in dieser Weise fortfahren. Setzen wir nämlich in (21) $t=2z$ und benützen wir die hergeleiteten Darstellungen von $\mathfrak{C}_i(2z)$ und $\mathfrak{C}_i'(2z)$, so erhalten wir $\mathfrak{C}_i(3z)$ als rationale Funktion von $\mathfrak{C}_i(z)$, daraus durch Differentiation $\mathfrak{C}_i'(3z)$ als rationale Funktion von $\mathfrak{C}_i(z)$ und $\mathfrak{C}_i'(z)$, u. s. f.

Wenn wir also $\mathfrak{C}_i\big((n-1)z\big)$ und $\mathfrak{C}_i'\big((n-1)z\big)$ kennen, so können wir daraus $\mathfrak{C}_i(nz)$ mit Hilfe der Formel (21) berechnen. Dieses Rekursionsverfahren ist aber sehr mühsam. Wir kommen rascher zum Ziele, wenn wir die Rekursionsformel (23) verwenden.

Setzen wir in (23) $m=1$, so erhalten wir zunächst

$$\mathfrak{C}_i(3z)\cdot\mathfrak{C}_i(z)=\left(\frac{\mathfrak{C}_i(z)-\mathfrak{C}_i(2z)}{\mathfrak{C}_i(z)\cdot\mathfrak{C}_i(2z)-1}\right)^2.$$

Nun ist mit Rücksicht auf (24)

$$\mathfrak{C}_i(z)-\mathfrak{C}_i(2z)=\frac{\mathfrak{C}_i(z)\big(\mathfrak{C}_i^2(z)-1\big)^2-\mathfrak{C}_i(z)\big(4\mathfrak{C}_i^2(z)+t_i\mathfrak{C}_i(z)+4\big)}{\big(\mathfrak{C}_i^2(z)-1\big)^2}$$

$$=\frac{\mathfrak{C}_i(z)\big(\mathfrak{C}_i^4(z)-6\mathfrak{C}_i^2(z)-t_i\mathfrak{C}_i(z)-3\big)}{\big(\mathfrak{C}_i^2(z)-1\big)^2}$$

$$\mathfrak{C}_i(z)\cdot\mathfrak{C}_i(2z)-1=\frac{\mathfrak{C}_i^2(z)\big(4\mathfrak{C}_i^2(z)+t_i\mathfrak{C}_i(z)+4\big)-\big(\mathfrak{C}_i^2(z)-1\big)^2}{\big(\mathfrak{C}_i^2(z)-1\big)^2}$$

$$=\frac{3\mathfrak{C}_i^4(z)+t_i\mathfrak{C}_i^3+6\mathfrak{C}_i^2(z)-1}{(\mathfrak{C}_i^2(z)-1)^2}.$$

Es ist somit

$$(26)\quad \mathfrak{C}_i(3z)=\frac{\mathfrak{C}_i(z)\big(\mathfrak{C}_i^4(z)-6\mathfrak{C}_i^2(z)-t_i\mathfrak{C}_i(z)-3\big)^2}{\big(3\mathfrak{C}_i^4(z)+t_i\mathfrak{C}_i^3(z)+6\mathfrak{C}_i^2(z)-1\big)^2}.$$

$\mathfrak{C}_i(4z)$ bekommen wir am einfachsten, wenn wir in der Formel (24) z durch $2z$ ersetzen. Es ist dann

$$\mathfrak{C}_i(4z)=\frac{\mathfrak{C}_i'^2(2z)}{c_i(\mathfrak{C}_i^2(2z)-1)^2},$$

oder ausgerechnet (mit Benützung von (14), (20), (24) und (25)):

$$(27)\quad \mathfrak{C}_i(4z)=\frac{\mathfrak{C}_i(z)\,(4\mathfrak{C}_i^2(z)+t_i\mathfrak{C}_i(z)+4)\,(\mathfrak{C}_i^2(z)-1)^2\cdot(2\mathfrak{C}_i^4(z)+t_i\mathfrak{C}_i^3(z)+12\mathfrak{C}_i^2(z)+t_i\mathfrak{C}_i(z)+2)^2}{(\mathfrak{C}_i^8(z)-20\mathfrak{C}_i^6(z)-8t_i\mathfrak{C}_i^5(z)-(26+t_i^2)\mathfrak{C}_i^4(z)-8t_i\mathfrak{C}_i^3(z)-20\mathfrak{C}_i^2(z)+1)^2}.$$

Zur Berechnung von $\mathfrak{C}_i(5z)$ wenden wir wieder die Rekursionsformel (23) an. Wir setzen in derselben $m=2$ und erhalten so die Relation

$$\mathfrak{C}_i(5z)\cdot\mathfrak{C}_i(z)=\left(\frac{\mathfrak{C}_i(2z)-\mathfrak{C}_i(3z)}{\mathfrak{C}_i(2z)\cdot\mathfrak{C}_i(3z)-1}\right)^2.$$

Nach (24) und (26) ist aber

$$\mathfrak{C}_i(2z) - \mathfrak{C}_i(3z) = \frac{\mathfrak{C}_i(z)\left(4\mathfrak{C}_i^2(z)+t_i\mathfrak{C}_i(z)+4\right)\left(3\mathfrak{C}_i^4(z)+t_i\mathfrak{C}_i^3(z)+6\mathfrak{C}_i^2(z)-1\right)^2}{\left(\mathfrak{C}_i^2(z)-1\right)^2\left(3\mathfrak{C}_i^4(z)+t_i\mathfrak{C}_i^3(z)+6\mathfrak{C}_i^2(z)-1\right)^2}$$
$$-\frac{\mathfrak{C}_i(z)\left(\mathfrak{C}_i^2(z)-1\right)^2\left(\mathfrak{C}_i^4(z)-6\mathfrak{C}_i^2(z)-t_i\mathfrak{C}_i(z)-3\right)^2}{\left(\mathfrak{C}_i^2(z)-1\right)^2\cdot\left(3\mathfrak{C}_i^4(z)+t_i\mathfrak{C}_i^3(z)+6\mathfrak{C}_i^2(z)-1\right)^2}$$

und

$$\mathfrak{C}_i(2z)\cdot\mathfrak{C}_i(3z)-1 = \frac{\mathfrak{C}_i^2(z)\left(4\mathfrak{C}_i^2(z)+t_i\mathfrak{C}_i(z)+4\right)\left(\mathfrak{C}_i^4(z)-6\mathfrak{C}_i^2(z)-t_i\mathfrak{C}_i(z)-3\right)^2}{\left(\mathfrak{C}_i^2(z)-1\right)^2\cdot\left(3\mathfrak{C}_i^4(z)+t_i\mathfrak{C}_i^3(z)+6\mathfrak{C}_i^2(z)-1\right)^2}$$
$$-\frac{\left(\mathfrak{C}_i^2(z)-1\right)^2\cdot\left(3\mathfrak{C}_i^4(z)+t_i\mathfrak{C}_i^3(z)+6\mathfrak{C}_i^2(z)-1\right)^2}{\left(\mathfrak{C}_i^2(z)-1\right)^2\cdot\left(3\mathfrak{C}_i^4(z)+t_i\mathfrak{C}_i^3(z)+6\mathfrak{C}_i^2(z)-1\right)^2}$$

Dies gibt für $\mathfrak{C}_i(5z)$ die folgende Darstellung:

$$\underline{\mathfrak{C}_i(5z) = \mathfrak{C}_i(z)\cdot\left(\frac{\sum_{i=0}^{12} a_i \overset{12-i}{\mathfrak{C}_i}(z)}{\sum_{i=0}^{12} b_i \overset{12-i}{\mathfrak{C}_i}(z)}\right)^2}, \tag{28}$$

wobei

$a_0 = b_{12} = 1$, $a_7 = b_5 = -90\,t_i$,
$a_1 = b_{11} = 0$, $a_8 = b_4 = -105$,
$a_2 = b_{10} = -50$, $a_9 = b_3 = 20\,t_i$,
$a_3 = b_9 = -35\,t_i$, $a_{10} = b_2 = 62 + t_i^2$,
$a_4 = b_8 = -5\,(25 + 2\,t_i^2)$, $a_{11} = b_1 = 5\,t_i$,
$a_5 = b_7 = -t_i(92 + t_i^2)$, $a_{12} = b_0 = 5$.
$a_6 = b_6 = -15\,(20 + t_i^2)$,

Durch fortgesetzte Anwendung dieses rekurrenten Verfahrens erhalten wir auch die weitern Multiplikationsformeln: die Formeln für $n = 2m + 1$ ergeben sich jeweilen mit Hilfe von (23) und die Formeln für $n = 2m$ dadurch, dass man in $\mathfrak{C}_i(mz)$ z durch $2z$ ersetzt.

Nun wollen wir $\mathfrak{C}_i(nz)$ für ein beliebiges ganzzahliges n als rationale Funktion von $\mathfrak{C}_i(z)$ darstellen. Nach § 1, Schlussatz, ist $\mathfrak{C}_i(nz)$ eine gerade elliptische Funktion von z, welche von 2. Ordnung unendlich wird für alle Werte z, die der Bedingung

$$(29) \qquad nz \equiv \frac{\omega}{2} \pmod{\Omega}$$

(unter Beachtung von § 1, (3)) genügen, also von der Form sind:

$$z = \frac{\omega}{2n} + \frac{h_1\omega_1 + h_2\omega_2}{n}, \quad \left.\begin{matrix} h_1 \\ h_2 \end{matrix}\right\} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \cdots,$$

und die ferner von 2. Ordnung Null wird für alle Werte z, die der Bedingung

$$(29') \qquad nz \equiv 0 \pmod{\Omega}$$

genügen, also für

$$z = \frac{h_1\omega_1 + h_2\omega_2}{n},$$

wenn wieder h_1 und h_2 beliebige ganze rationale Zahlen sind.

Wir erhalten sowohl alle unter (29), wie auch alle unter (29') enthaltenen inkongruenten Werte, wenn wir h_1 und h_2 je das kleinste positive Restsystem nach dem Modul n durchlaufen lassen. Die Funktion $\mathfrak{T}_i(nz)$ besitzt also im ursprünglichen Grundperiodenparallelogramm n^2 Pole und n^2 Nullstellen von je 2. Ordnung; in bezug auf dieses Parallelogramm ist $\mathfrak{T}_i(nz)$ somit eine elliptische Funktion von $2n^2$ Ordnung.

Wir konstruieren jetzt eine rationale Funktion von $\mathfrak{T}_i(z)$, welche dieselben Pole und Nullstellen hat wie $\mathfrak{T}_i(nz)$. Auf Grund der unmittelbar vorangehenden Erwägungen wird diese Funktion folgendes Aussehen haben:

$$R_n(\mathfrak{T}_i(z)) = \frac{\prod_{z\,(r_1, r_2)} \left(\mathfrak{T}_i(z) - \mathfrak{T}_{i;r_1,r_2}\right)}{\prod_{N\,(r_1, r_2)} \left(\mathfrak{T}_i(z) - \overline{\mathfrak{T}}_{i;r_1,r_2}\right)},$$

worin

$$\mathfrak{T}_{i;r_1,r_2} = \mathfrak{T}_i\left(\frac{r_1\omega_1 + r_2\omega_2}{n}\right),$$

$$\overline{\mathfrak{T}}_{i;r_1,r_2} = \mathfrak{T}_i\left(\frac{\omega}{2n} + \frac{r_1\omega_1 + r_2\omega_2}{n}\right)$$

und r_1, r_2 zunächst beliebige Zahlen des kleinsten positiven Restsystems mod. n bedeuten sollen. Wir haben nun zu untersuchen, über welche Wertepaare r_1, r_2 die Produkte Π_z und Π_N wirklich zu erstrecken sind. Dabei müssen wir auseinanderhalten, ob n ungerade oder gerade ist.

1. Es sei n ungerade.

In diesem Falle wird R_n an allen Nullstellen von $\mathfrak{C}_i(nz)$ genau von 2. Ordnung Null, falls r_1 und r_2 in Π_z je das kleinste positive Restsystem mod. n vollständig durchlaufen. Denn $\mathfrak{C}_i(z)$ hat in $z=0$ eine Nullstelle 2. Ordnung und jeder andere in Π_z auftretende Linearfaktor kommt gerade zweimal vor, da die beiden inkongruenten Werte

$$z=\frac{r_1\omega_1+r_2\omega_2}{n}$$

$$\text{und}\qquad z=\frac{(n-r_1)\omega_1+(n-r_2)\omega_2}{n}.$$

wegen $\mathfrak{C}_i(-z)=\mathfrak{C}_i(z)$ den gleichen Wert von $\mathfrak{C}_i(z)$ ergeben. Der Zähler der gesuchten Funktion R_n lautet also:

$$\mathfrak{C}_i(z)\cdot\underset{(r_1,r_2)}{\Pi_z^2}(\mathfrak{C}_i(z)-\mathfrak{C}_{i;r_1,r_2}),$$

wo r_1, r_2 die nachstehenden Wertepaare durchläuft:

$$(30)\quad\left\{\begin{array}{llllll} & 1,0 & 2,0 & \ldots\ \frac{n-1}{2},0 & & \\ 0,1 & 1,1 & 2,1 & \ldots\ldots\ldots & & n-1,1 \\ 0,2 & 1,2 & 2,2 & \ldots\ldots\ldots & & n-1,2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & & \ldots \\ 0,\frac{n-1}{2} & 1,\frac{n-1}{2} & 2,\frac{n-1}{2} & \ldots\ldots & & n-1,\frac{n-1}{2}. \end{array}\right.$$

Es sind dies im ganzen $\frac{n^2-1}{2}$ Kombinationen. Der Zähler von R_n ist mithin vom Grad n^2 in $\mathfrak{C}_i(z)$.

R_n wird an allen Polen von $\mathfrak{C}_i(nz)$, die nicht zugleich Pole von $\mathfrak{C}_i(z)$ sind, genau von 2. Ordnung unendlich, wenn r_1 und r_2 in Π_N je das kleinste positive Restsystem mod. n durchlaufen, mit Ausnahme der Kombination für die

$$\frac{\omega}{2n}+\frac{r_1\omega_1+r_2\omega_2}{n}=\frac{\omega}{2}$$

wird; dies tritt ein für $r_1=\frac{n-1}{2}$ und $r_2=\ 0$, wenn $i=1$,

» $r_1=\frac{n-1}{2}$ » $r_2=\frac{n-1}{2}$, » $i=2$,

» $r_1=\ 0$ » $r_2=\frac{n-1}{2}$, » $i=3$.

In jedem der 3 Fälle $(i=1, 2, 3)$ hat somit r_1, r_2 in Π_N n^2-1 Wertepaare zu durchlaufen. Der Grad des Nenners von R_n ist daher n^2-1 in $\mathfrak{T}_i(z)$ und weil jeder Linearfaktor wegen $\mathfrak{T}_i(-z)=\mathfrak{T}_i(z)$ auch hier wieder zweimal auftritt, so hat der Nenner die Form:

$$\Pi^2_{\substack{N\\(r_1,r_2)}}(\mathfrak{T}_i(z)-\overline{\mathfrak{T}}_{i;r_1,r_2}),$$

wobei r_1, r_2 die folgenden Kombinationen durchläuft:

$$(30')\left\{\begin{array}{llllllll}
0,0 & 1,0 & 2,0 & \ldots & \frac{n-3}{2},0 & & & \\
0,1 & 1,1 & 2,1 & \ldots & \ldots & n-1,1 & & \\
0,2 & 1,2 & 2,2 & \ldots & \ldots & n-1,2 & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\
0,\frac{n-3}{2} & 1,\frac{n-3}{2} & 2,\frac{n-3}{2} & \ldots & \ldots & n-1,\frac{n-3}{2} & & \\
 & 1,\frac{n-1}{2} & 2,\frac{n-1}{2} & \ldots & \frac{n-3}{2},\frac{n-1}{2}, & & & \\
\multicolumn{8}{l}{\text{dazu für } i=1 \text{ die Kombinationen: } 0,\frac{n-1}{2} \text{ und } \frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2} \ldots\ldots n-1,\frac{n-1}{2},} \\
\multicolumn{8}{l}{\text{» » } i=2 \text{ » » } 0,\frac{n-1}{2} \text{ » } \frac{n-1}{2},0 \ldots\ldots n-1,0} \\
\multicolumn{8}{l}{\text{» » } i=3 \text{ » » } \frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2} \text{ » } \frac{n-1}{2},0 \ldots\ldots n-1,0.}
\end{array}\right.$$

2. Es sei n **gerade**.

In diesem Fall ist bei der genaueren Bestimmung des Zählers von R_n zu beachten, dass unter den im ursprünglichen Grundperiodenparallelogramm auftretenden Nullstellen von $\mathfrak{T}_i(nz)$ auch der Pol von $\mathfrak{T}_i(z)$ vorkommt, so dass r_1, r_2 in Π_z alle innerhalb des kleinsten positiven Restsystems mod. n möglichen Kombinationen zu durchlaufen hat, mit Ausschluss der einzigen Kombination

$$r_1=\frac{n}{2},\ r_2=0, \text{ wenn } i=1,$$

$$r_1=\frac{n}{2},\ r_2=\frac{n}{2}, \quad \text{»} \quad i=2,$$

$$r_1=0,\ r_2=\frac{n}{2}, \quad \text{»} \quad i=3.$$

Die n^2-1 Linearfaktoren, über die wir das Produkt Π_z zu bilden haben, kommen wieder je zweimal vor, mit Ausnahme der drei:

$$\mathfrak{T}_1(z),\ \mathfrak{T}_1(z)-\mathfrak{T}_1\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right),\ \mathfrak{T}_1(z)-\mathfrak{T}_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right),\qquad \text{wenn } i=1,$$

$$\mathfrak{T}_2(z),\ \mathfrak{T}_2(z)-\mathfrak{T}_2\left(\frac{\omega_1}{2}\right),\qquad \mathfrak{T}_2(z)-\mathfrak{T}_2\left(\frac{\omega_2}{2}\right),\qquad \text{»}\quad i=2,$$

$$\mathfrak{T}_3(z),\ \mathfrak{T}_3(z)-\mathfrak{T}_3\left(\frac{\omega_1}{2}\right),\qquad \mathfrak{T}_3(z)-\mathfrak{T}_3\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right),\qquad \text{»}\quad i=3.$$

Diese Faktoren verschwinden aber je von 2. Ordnung und da nach (13a, b, c), (14) und (20):

$$\mathfrak{T}_1(z)\cdot\left(\mathfrak{T}_1(z)-\mathfrak{T}_1\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\right)\left(\mathfrak{T}_1(z)-\mathfrak{T}_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\right)=\frac{\mathfrak{T}_1'^2(z)}{4\,c_1}$$
$$=\mathfrak{T}_1(z)\left(\mathfrak{T}_1^2(z)+\frac{t_1}{4}\mathfrak{T}_1(z)+1\right),$$

$$\mathfrak{T}_2(z)\cdot\left(\mathfrak{T}_2(z)-\mathfrak{T}_2\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\right)\left(\mathfrak{T}_2(z)-\mathfrak{T}_2\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\right)=\frac{\mathfrak{T}_2'^2(z)}{4\,c_2}$$
$$=\mathfrak{T}_2(z)\left(\mathfrak{T}_2^2(z)+\frac{t_2}{4}\mathfrak{T}_2(z)+1\right),$$

$$\mathfrak{T}_3(z)\cdot\left(\mathfrak{T}_3(z)-\mathfrak{T}_3\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\right)\left(\mathfrak{T}_3(z)-\mathfrak{T}_3\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\right)=\frac{\mathfrak{T}_3'^2(z)}{4\,c_3}$$
$$=\mathfrak{T}_3(z)\left(\mathfrak{T}_3^2(z)+\frac{t_3}{4}\mathfrak{T}_3(z)+1\right),$$

so hat der Zähler von R_n die Gestalt:

$$\mathfrak{T}_i(z)\cdot\left(\mathfrak{T}_i^2(z)+\frac{t_i}{4}\mathfrak{T}_i(z)+1\right)\cdot\Pi^2_{z\,(r_1,r_2)}\left(\mathfrak{T}_i(z)-\mathfrak{T}_{i;\,r_1 r_2}\right),$$

wobei r_1, r_2 in Π_z die folgenden Wertepaare durchläuft:

$$(31)\qquad\left\{\begin{array}{llllll}
 & 1,0 & 2,0 & \ldots & \frac{n}{2}-1,0 & \\
0,1 & 1,1 & 2,1 & \ldots & \ldots & n-1,1\\
0,2 & 1,2 & 2,2 & \ldots & \ldots & n-1,2\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0,\frac{n}{2}-1 & 1,\frac{n}{2}-1 & 2,\frac{n}{2}-1 & \ldots & \ldots & n-1,\frac{n}{2}-1\\
 & 1,\frac{n}{2} & 2,\frac{n}{2} & \ldots & \frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}. &
\end{array}\right.$$

Es sind dies $\frac{n^2-4}{2}$ Kombinationen, so dass der Grad von Π_z in $\mathfrak{C}_i(z)$ $\frac{n^2-4}{2}$ und mithin der Grad des Zählers von R_n $n^2-4+3 = n^2-1$ ist.

R_n wird an allen Polen von $\mathfrak{C}_i(nz)$ genau von 2. Ordnung unendlich, wenn r_1 und r_2 in Π_N voneinander unabhängig das kleinste positive Restsystem mod. n vollständig durchlaufen. Denn die halben Perioden treten unter den Polen von $\mathfrak{C}_i(nz)$ nicht auf, falls n gerade ist. Der Grad des Nenners von R_n ist also n^2 in $\mathfrak{C}_i(z)$, und weil hier ausserdem jeder der n^2 Faktoren zweimal vorkommt, so hat der Nenner die Form:

$$\Pi^2_{\underset{(r_1,r_2)}{N}}\left(\mathfrak{C}_i(z)-\overline{\mathfrak{C}}_{i;r_1,r_2}\right),$$

wobei r_1, r_2 die folgenden Wertepaare durchläuft:

$$(31')\quad \left\{\begin{array}{llllll}
0,0 & 1,0 & 2,0 & \ldots & \frac{n}{2}-1,0 & \\
0,1 & 1,1 & 2,1 & \ldots & \ldots & n-1,1 \\
0,2 & 1,2 & 2,2 & \ldots & \ldots & n-1,2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0,\frac{n}{2}-1 & 1,\frac{n}{2}-1 & 2,\frac{n}{2}-1 & \ldots & \ldots & n-1,\frac{n}{2}-1, \\
\multicolumn{6}{l}{\text{dazu für } i=1 \text{ die Wertepaare: } 0,\frac{n}{2} \quad 1,\frac{n}{2} \quad 2,\frac{n}{2} \quad \ldots \quad \frac{n}{2}-1,\frac{n}{2},} \\
\multicolumn{6}{l}{\text{» » } i=2 \text{ u. } 3 \text{ » » } \frac{n}{2},0 \quad \frac{n}{2}+1,0 \quad \frac{n}{2}+2,\frac{n}{2} \quad \ldots \quad n-1,\frac{n}{2}.}
\end{array}\right.$$

Zusammenfassend stellen wir fest, dass die gesuchte Funktion $R_n\left(\mathfrak{C}_i(z)\right)$ wie folgt lautet:

$$(32)\qquad \underline{R_n\left(\mathfrak{C}_i(z)\right)=\mathfrak{C}_i(z)\cdot\frac{A\cdot\Pi^2_{\underset{(r_1,r_2)}{z}}\left(\mathfrak{C}_i(z)-\mathfrak{C}_{i;r_1,r_2}\right)}{\Pi^2_{\underset{(r_1,r_2)}{N}}\left(\mathfrak{C}_i(z)-\overline{\mathfrak{C}}_{i;r_1,r_2}\right)}},$$

worin r_1, r_2 für ungerades n in Π_z die Wertepaare (30) und in Π_N die Wertepaare (30'), für gerades n in Π_z die Wertepaare (31) und in Π_N die Wertepaare (31') durchläuft und wobei ferner:

$$A = 1, \qquad \text{falls n ungerade ist,}$$
$$A = \mathfrak{C}_i^2(z)+\frac{t_i}{4}\mathfrak{C}_i(z)+1, \quad \text{falls n gerade ist.}$$

Da $\mathfrak{T}_i(nz)$ und die soeben definierte Funktion $R_n\left(\mathfrak{T}_i(z)\right)$ bezüglich der Pole und Nullstellen genau übereinstimmen, so gilt nun die Relation:

$$\mathfrak{T}_i(nz) = C \cdot R_n\left(\mathfrak{T}_i(z)\right). \tag{33}$$

Setzen wir zunächst voraus, dass n ungerade sei, so finden wir durch den Grenzübergang $z \to \frac{\omega}{2}$ für C den Wert:

$$\underline{C = \frac{1}{n^2}} \tag{34}$$

In diesem Fall ist nämlich nach (32):

$$\frac{\mathfrak{T}_i(nz)}{\mathfrak{T}_i(z)} = C \cdot \frac{\mathfrak{T}_i^{\frac{n^2-1}{2}}(z) \cdot \left[1 + \frac{1}{\mathfrak{T}_i(z)}(\text{const.} + \ldots)\right]}{\mathfrak{T}_i^{\frac{n^2-1}{2}}(z)\left[1 + \frac{1}{\mathfrak{T}_i(z)}(\text{const.} + \ldots)\right]},$$

woraus wegen $\lim\limits_{z \to \frac{\omega}{2}} \mathfrak{T}_i(z) = \infty$ folgt, dass

$$C = \lim_{z \to \frac{\omega}{2}} \frac{\mathfrak{T}_i(nz)}{\mathfrak{T}_i(z)} = \frac{\infty}{\infty}$$

ist. Differenzieren wir Zähler und Nenner je nach z, so ergibt sich wiederum die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$, weil auch $\lim\limits_{z \to \frac{\omega}{2}} \mathfrak{T}_i'(z) = \infty$ ist (vgl. § 2, I). Durch abermaliges Differenzieren erhalten wir:

$$C = \lim_{z \to \frac{\omega}{2}} n^2 \cdot \frac{\mathfrak{T}_i''(nz)}{\mathfrak{T}_i''(z)},$$

oder mit Berücksichtigung von (15):

$$C = n^2 \cdot \lim_{z \to \frac{\omega}{2}} \frac{\mathfrak{T}_i^2(nz)\left(6\, c_i + \frac{12\, e_i}{\mathfrak{T}_i(nz)} + \frac{2\, c_i}{\mathfrak{T}_i^2(nz)}\right)}{\mathfrak{T}_i^2(z)\left(6\, c_i + \frac{12\, e_i}{\mathfrak{T}_i(z)} + \frac{2\, c_i}{\mathfrak{T}_i^2(z)}\right)}$$

$$= n^2 \cdot \left[\lim_{z \to \frac{\omega}{2}} \frac{\mathfrak{T}_i(nz)}{\mathfrak{T}_i(z)}\right]^2$$

$$= n^2 \cdot C^2.$$

Da $C = \lim\limits_{z \to \frac{\omega}{2}} \frac{\mathfrak{T}_i(nz)}{\mathfrak{T}_i(z)}$ eine von Null verschiedene Konstante ist, so dürfen wir die letzte Gleichung durch diese Grösse dividieren, woraus das Resultat (34) folgt.

Ist dagegen n gerade, so erhält man die Konstante C durch Entwicklung beider Seiten von (33) nach steigenden Potenzen von z mit Benützung von (5) und (32) und nachheriger Vergleichung der Koeffizienten der niedersten Potenz von z. So ergibt sich für C folgender Wert:

$$C = n^2 \cdot \frac{\prod\limits_{(r_1, r_2)} {}^2_N \, \overline{\mathfrak{T}}_{i; r_1, r_2}}{\prod\limits_{(r_1, r_2)} {}^2_z \, \mathfrak{T}_{i; r_1, r_2}},$$

worin also r_1, r_2 in Π_z bezw. Π_N die Wertepaare (31) bezw. (31') durchläuft. Nun gilt aber die Beziehung

$$\text{(35)} \qquad \prod_{(r_1, r_2)}{}_z \, \mathfrak{T}_{i; r_1, r_2} = \prod_{(r_1, r_2)}{}_N \, \overline{\mathfrak{T}}_{i; r_1, r_2} = 1, \text{ falls n gerade ist.}$$

Denn in diesem Falle lässt sich durch Betrachtung der $\frac{n^2-4}{2}$ Wertepaare (31), sowie der $\frac{n^2}{2}$ Wertepaare (31') und mit Beachtung der Funktionalgleichung (9) leicht erkennen, dass in Π_z mit jedem Faktor $\mathfrak{T}_i\left(\frac{r_1 \omega_1 + r_2 \omega_2}{n}\right)$ und in Π_N mit jedem Faktor $\mathfrak{T}_i\left(\frac{\omega}{2n} + \frac{r_1 \omega_1 + r_2 \omega_2}{n}\right)$ auch die reziproke Grösse

$$\mathfrak{T}_i\left(\frac{r_1 \omega_1 + r_2 \omega_2}{n} + \frac{\omega}{2}\right) \text{ bezw. } \mathfrak{T}_i\left(\frac{\omega}{2n} + \frac{r_1 \omega_1 + r_2 \omega_2}{n} + \frac{\omega}{2}\right)$$

auftritt. Man kann demnach sowohl die Faktoren von Π_z wie diejenigen von Π_N je in Paare gruppieren, von denen jedes als Produkt den Wert 1 ergibt, woraus die Relation (35) hervorgeht. Somit ist für gerades n:

$$\text{(36)} \qquad \underline{C = n^2}.$$

Setzen wir nun

$$\text{(37)} \quad \begin{aligned} Z_n\left(\mathfrak{T}_i(z)\right) &= \begin{cases} \prod\limits_{(r_1, r_2)}{}_z \left(\mathfrak{T}_i(z) - \mathfrak{T}_{i; r_1, r_2}\right), & \text{wenn n ungerade,} \\ n \cdot \prod\limits_{(r_1, r_2)}{}_z \left(\mathfrak{T}_i(z) - \mathfrak{T}_{i; r_1, r_2}\right), & \text{» n gerade,} \end{cases} \\ N_n\left(\mathfrak{T}_i(z)\right) &= \begin{cases} n \cdot \prod\limits_{(r_1, r_2)}{}_N \left(\mathfrak{T}_i(z) - \overline{\mathfrak{T}}_{i; r_1, r_2}\right), & \text{wenn n ungerade,} \\ \prod\limits_{(r_1, r_2)}{}_N \left(\mathfrak{T}_i(z) - \overline{\mathfrak{T}}_{i; r_1, r_2}\right), & \text{» n gerade,} \end{cases} \end{aligned}$$

wobei r_1, r_2 in Π_z die Wertepaare (30)' bezw. (31) und in Π_N die Wertepaare (30') bezw. (31') durchläuft und hat ferner A wiederum die unter (32) festgesetzte Bedeutung, so bekommt die Multiplikationsformel für ein beliebiges ganzzahliges n auf Grund von (32), (33), (34) und (35) die folgende Gestalt:

$$\frac{\mathfrak{T}_i(nz)}{\mathfrak{T}_i(z)} = A \cdot \frac{Z_n^2\left(\mathfrak{T}_i(z)\right)}{N_n^2\left(\mathfrak{T}_i(z)\right)}. \tag{38}$$

Bei ungeradem n haben Z_n und N_n denselben Grad $\frac{n^2-1}{2}$; bei geradem n ist Z_n vom Grad $\frac{n^2}{2}-2$ und N_n vom Grad $\frac{n^2}{2}$.

Bezüglich der Funktionen $Z_n\left(\mathfrak{T}_i(z)\right)$ und $N_n\left(\mathfrak{T}_i(z)\right)$ lassen sich nun noch die beiden folgenden Sätze beweisen:

Satz I: Die Koeffizienten der Funktionen $Z_n\left(\mathfrak{T}_i(z)\right)$ und $N_n\left(\mathfrak{T}_i(z)\right)$ sind ganze ganzzahlige Funktionen von $\mathfrak{t}_i$.

Der Beweis stützt sich auf die Multiplikationsformeln (24) bis (28). Nach denselben gilt der Satz für $n = 2, 3, 4, 5$. Aus der am Anfang dieses Paragraphen geschilderten rekurrenten Berechnungsweise der Multiplikationsformeln ist ferner ersichtlich, dass unsere Behauptung auch für $n = 2m$ und $n = 2m + 1$ richtig ist, falls dies für $n = m$ und gleichzeitig für $n = m + 1$ zutrifft. Durch vollständige Induktion geht alsdann die Gültigkeit des Satzes für ein beliebiges ganzzahliges n hervor.

Satz II: 1. Wenn n ungerade ist, so besteht zwischen den Funktionen Z_n und N_n die Relation

$$N_n\left(\mathfrak{T}_i(z)\right) \equiv \mathfrak{T}_i(z)^{\frac{n^2-1}{2}} \cdot Z_n\left(\frac{1}{\mathfrak{T}_i(z)}\right);$$

d. h. ihre Wurzeln sind zueinander reziprok. Es ist insbesondere

$$a_{\frac{n^2-1}{2}} = \underset{(r_1, r_2)}{\Pi_z} \mathfrak{T}_{i;\, r_1, r_2} = n,$$

$$b_{\frac{n^2-1}{2}} = n \cdot \underset{(r_1, r_2)}{\Pi_N} \overline{\mathfrak{T}}_{i;\, r_1, r_2} = 1.$$

2. Wenn n gerade ist, so ist sowohl Z_n wie auch N_n eine reziproke Funktion, d. h. es gilt:

$$Z_n\left(\mathfrak{T}_i(z)\right) \equiv \mathfrak{T}_i^{\frac{n^2}{2}-2}(z) \cdot Z_n\left(\frac{1}{\mathfrak{T}_i(z)}\right)$$

und

$$\underline{N^n\left(\mathfrak{C}_i(z)\right) \equiv \mathfrak{C}_i^{\frac{n^2}{2}}(z) \cdot N_n\left(\frac{1}{\mathfrak{C}_i(z)}\right).}$$

Es ist also insbesondere

$$a_{\frac{n^2}{2}-2} = n \cdot \prod_{(r_1, r_2)}{}_z\, \mathfrak{C}_{i;\, r_1, r_2} = n\,,$$

$$b_{\frac{n^2}{2}} \;=\; \prod_{(r_1, r_2)}{}_N\, \overline{\mathfrak{C}}_{i;\, r_1, r_2} = 1.$$

Beweis: 1. Es sei n ungerade, also von der Form $2m + 1$ $(m = 1, 2, \cdots)$. Dann ist nach (38):

$$\frac{\mathfrak{C}_i(nz)}{\mathfrak{C}_i(z)} = \frac{Z_n^2\left(\mathfrak{C}_i(z)\right)}{N_n^2\left(\mathfrak{C}_i(z)\right)}\,,$$

wobei

$$Z_n\left(\mathfrak{C}_i(z)\right) \equiv \mathfrak{C}_i^{\frac{n^2-1}{2}}(z) + a_1\, \mathfrak{C}_i^{\frac{n^2-3}{2}}(z) + \cdots + a_{\frac{n^2-3}{2}} \cdot \mathfrak{C}_i(z) + a_{\frac{n^2-1}{2}}$$

und
$$N_n\left(\mathfrak{C}_i(z)\right) \equiv n \cdot \mathfrak{C}_i^{\frac{n-1}{2}}(z) + b_1\, \mathfrak{C}_i^{\frac{n^2-3}{2}}(z) + \cdots + b_{\frac{n^2-3}{2}}\, \mathfrak{C}_i(z) + b_{\frac{n^2-1}{2}}.$$

Ersetzen wir nun überall z durch $z + \frac{\omega}{2}$, so geht wegen (9) die linke Seite über in

$$\frac{\mathfrak{C}_i(z)}{\mathfrak{C}_i(nz)} = \frac{N_n^2\left(\mathfrak{C}_i(z)\right)}{Z_n^2\left(\mathfrak{C}_i(z)\right)}$$

und die rechte Seite in

$$\frac{Z_n^2\left(\frac{1}{\mathfrak{C}_i(z)}\right)}{N_n^2\left(\frac{1}{\mathfrak{C}_i(z)}\right)} = \frac{\frac{1}{\mathfrak{C}_i^{n^2-1}(z)}\left(1 + a_1\, \mathfrak{C}_i(z) + \cdots + a_{\frac{n^2-3}{2}} \cdot \mathfrak{C}_i^{\frac{n^2-3}{2}}(z) + a_{\frac{n^2-1}{2}}\, \mathfrak{C}_i^{\frac{n^2-1}{2}}(z)\right)^2}{\frac{1}{\mathfrak{C}_i^{n^2-1}(z)}\left(n + b_1\, \mathfrak{C}^i(z) + \cdots + b_{\frac{n^2-3}{2}}\, \mathfrak{C}_i^{\frac{n^2-3}{2}}(z) + b_{\frac{n^2-1}{2}}\, \mathfrak{C}_i^{\frac{n^2-1}{2}}(z)\right)^2}.$$

Daraus folgt, dass

$$n = a_{\frac{n^2-1}{2}}\,,$$

$$b_1 = a_{\frac{n^2-3}{2}}\,,$$

$$\cdots\cdots$$

$$b_{\frac{n^2-3}{2}} = a_1\,,$$

$$b_{\frac{n^2-1}{2}} = 1\,,$$

d. h. in N_n treten dieselben Koeffizienten auf wie in Z_n, nur in umgekehrter Reihenfolge, w. z. b. w.

2. Es sei n gerade, also von der Form $2m$ $(m = 1, 2, \cdots)$. Dann ist nach (38):

$$\mathfrak{T}_i(nz) = \mathfrak{T}_i(z)\left(\mathfrak{T}_i^2(z) + \frac{t_i}{4}\mathfrak{T}_i(z) + 1\right) \cdot \frac{Z_n^2\left(\mathfrak{T}_i(z)\right)}{N_n^2\left(\mathfrak{T}_i(z)\right)},$$

wobei

$$Z_n\left(\mathfrak{T}_i(z)\right) \equiv n \cdot \mathfrak{T}_i^{\frac{n^2}{2}-2}(z) + \bar{a}_1 \mathfrak{T}_i^{\frac{n^2}{2}-3}(z) + \cdots + \bar{a}_{\frac{n^2}{2}-3}\mathfrak{T}_i(z) + \bar{a}_{\frac{n^2}{2}-2}$$

und

$$N_n\left(\mathfrak{T}_i(z)\right) \equiv \mathfrak{T}_i^{\frac{n^2}{2}}(z) + \bar{b}_1 \mathfrak{T}_i^{\frac{n^2}{2}-1}(z) + \cdots + \bar{b}_{\frac{n^2}{2}-1}\mathfrak{T}_i(z) + \bar{b}_{\frac{n^2}{2}}.$$

Ersetzen wir hier wieder überall z durch $z + \frac{\omega}{2}$, so bleibt die linke Seite ungeändert; die rechte Seite dagegen geht nach (9) über in

$$\frac{\mathfrak{T}_i(z)\left(\mathfrak{T}_i^2(z) + \frac{t_i}{4}\mathfrak{T}_i(z) + 1\right)}{\mathfrak{T}_i^4(z)} \cdot \frac{Z_n^2\left(\frac{1}{\mathfrak{T}_i(z)}\right)}{N_n^2\left(\frac{1}{\mathfrak{T}_i(z)}\right)}$$

$$= \mathfrak{T}_i(z)\left(\mathfrak{T}_i^2(z) + \frac{t_i}{4}\mathfrak{T}_i(z) + 1\right) \cdot$$

$$\frac{\frac{1}{\mathfrak{T}_i^{n^2-4}(z)}\left(n + \bar{a}_1 \mathfrak{T}_i(z) + \cdots + \bar{a}_{\frac{n^2}{2}-3}\mathfrak{T}_i^{\frac{n^2}{2}-3}(z) + \bar{a}_{\frac{n^2}{2}-2}\mathfrak{T}_i^{\frac{n^2}{2}-2}(z)\right)^2}{\frac{1}{\mathfrak{T}_i^{n^2-4}(z)}\left(1 + \bar{b}_1 \mathfrak{T}_i(z) + \cdots + \bar{b}_{\frac{n^2}{2}-1} \cdot \mathfrak{T}_i^{\frac{n^2}{2}-1}(z) + \bar{b}_{\frac{n^2}{2}}\mathfrak{T}_i^{\frac{n^2}{2}}(z)\right)^2}.$$

Daraus folgt, dass

$$n = \bar{a}_{\frac{n^2}{2}-2}, \qquad 1 = \bar{b}_{\frac{n^2}{2}},$$

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_{\frac{n^2}{2}-3}, \qquad \bar{b}_1 = \bar{b}_{\frac{n^2}{2}-1},$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

allgemein:

$$\bar{a}_r = \bar{a}_{\frac{n^2}{2}-(r+2)}, \qquad \bar{b}_r = \bar{b}_{\frac{n^2}{2}-r},$$

d. h. die Koeffizienten von Z_n und von N_n sind symmetrisch in bezug auf den mittleren Koeffizienten, w. z. b. w.

II. Kapitel.

Die Grössen $t_i(\omega)$ $(i = 1, 2, 3)$.

§ 1. Darstellung von $t_i(\omega)$ durch die Funktionen $f(\omega), f_1(\omega), f_2(\omega)$.[1])

Betrachten wir die in Kap. I, § 3 (pag. 12) eingeführten, von z unabhängigen Grössen

$$(1) \qquad t_i(\omega_1, \omega_2) = \frac{2^3 \cdot 3\, e_i(\omega_1, \omega_2)}{\sqrt{2^2 \cdot 3\, e_i^2(\omega_1\, \omega_2) - g_2(\omega_1, \omega_2)}} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Aus den bekannten Relationen

$$e_i(t\omega_1, t\omega_2) = t^{-2} e_i(\omega_1, \omega_2),$$
$$g_2(t\omega_1, t\omega_2) = t^{-4} g_2(\omega_1, \omega_2),$$

worin t ein willkürlicher Parameter bedeutet, folgt, dass $t_i(\omega_1, \omega_2)$ in ω_1, ω_2 homogen von 0^{ter} Dimension ist, also nur vom Periodenverhältnis $\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1}$, mit positivem Imaginärteil, abhängt.

Wir legen nun den imaginären quadratischen Körper $k(\sqrt{m})$ zugrunde. Die Zahlen dieses Körpers haben die Form:

$$x + y\sqrt{m},\ m < o$$

und ohne quadrat. Teiler und wobei x und y rationale Zahlen sind. Wir setzen ausserdem voraus, dass

$$m \neq -1,\ \neq -3\ ^{2)}$$

ist. Es sei $\mathfrak{w} = (\omega_1, \omega_2)$ irgend ein Ideal aus $k(\sqrt{m})$, worin ω_1, ω_2 eine Basis desselben bedeute und $\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ mit positiv imaginärem Teil vorausgesetzt werde. Ist ω_1', ω_2' eine andere Basis von $\mathfrak{w}$ derselben Eigenschaft, so existiert eine unimodulare, lineare Substitution S, sodass

$$(2) \qquad \frac{\omega_2'}{\omega_1'} = \omega' = S\omega.$$

Sind $\overline{\mathfrak{w}} = (\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2)$ und $\mathfrak{w}$ aequivalente Ideale, so muss ebenfalls

$$(3) \qquad \frac{\overline{\omega}_2}{\overline{\omega}_1} = \overline{\omega} = S\omega$$

sein.

---

[1]) Weber, Lehrbuch der Algebra, Bd. III, § 34.

[2]) Bezüglich dieser beiden Ausnahmefälle vgl. die Einleitung.

Da $g_2(\omega_1, \omega_2)$ bekanntlich gegenüber den linearen, unimodularen Substitutionen invariant ist und die e_1, e_2, e_3 bei solchen Substitutionen ineinander übergehen, so gilt infolge (1), (2) und (3) der

Satz I: Durchlaufen die beiden Perioden ω_1 und ω_2 die Basiszahlen aller Ideale $\mathfrak{w}$ einer Idealklasse aus $k(\sqrt{m})$, so gehen dabei die 3 Grössen $t_i(\omega)$ $(i = 1, 2, 3)$ ineinander über.

Um über die arithmetische Natur der $t_i(\omega)$ Aufschluss zu bekommen, wollen wir sie durch $\varkappa$, den Modul der elliptischen Funktionen, und $\varkappa' = \sqrt{1 - \varkappa^2}$ ausdrücken. Bekanntlich ist

$$\varkappa^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3};$$

es ist ferner

$$\omega_1 = \frac{2K}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \qquad \omega_2 = \frac{2iK'}{\sqrt{e_1 - e_3}},\text{[1]}$$

wobei $4K$ und $2iK'$ die beiden Perioden von $\operatorname{sn} u$ $(u = \sqrt{e_1 - e_3}\, z)$[2] sind. Da nun die $t_i(\omega)$ nur Funktionen des Verhältnisses

$$\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\dfrac{2iK'}{\sqrt{e_1 - e_3}}}{\dfrac{2K}{\sqrt{e_1 - e_3}}}$$

sind, so dürfen wir zur Vereinfachung der Rechnung ohne weiteres die Festsetzung treffen:

$$\omega_1 = 2K, \quad \omega_2 = 2iK',$$

was den Uebergang zu einem ähnlichen Gitter bedeutet. Alsdann ist

$$e_1 = \frac{1 + \varkappa'^2}{3}, \qquad e_2 = -\frac{\varkappa'^2 - \varkappa^2}{3}, \qquad e_3 = -\frac{1 + \varkappa^2}{3},$$

ferner

$$g_2 = \frac{4}{3}(1 - \varkappa^2 \cdot \varkappa'^2).\text{[3]}$$

Daraus ergibt sich durch einfache Rechnung:

$$\sqrt{2^2 \cdot 3 e_1^2 - g_2} = 2\varkappa',$$
$$\sqrt{2^2 \cdot 3 e_2^2 - g_2} = 2i\varkappa \cdot \varkappa',$$
$$\sqrt{2^2 \cdot 3 e_3^2 - g_2} = 2\varkappa;$$

[1]) Weber: Alg. III, § 46, (4).
[2]) Ebenda, § 44, (22).
[3]) Ebenda, § 46, (14).

also ist

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
t_1 &= \frac{2^3\cdot 3\,e_1}{\sqrt{2^2\cdot 3\,e_1^2 - g_2}} = 4\left(\frac{1+\varkappa'^2}{\varkappa'}\right),\\
t_2 &= \frac{2^3\cdot 3\,e_2}{\sqrt{2^2\cdot 3\,e_2^2 - g_2}} = \frac{4\,i\,(\varkappa'^2-\varkappa^2)}{\varkappa\cdot\varkappa'},\\
t_3 &= \frac{2^3\cdot 3\,e_3}{\sqrt{2^2\cdot 3\,e_3^2 - g_2}} = -4\left(\frac{1+\varkappa^2}{\varkappa}\right).
\end{aligned}
$$

Führen wir weiterhin noch die Klasseninvariante[1])

$$j(\omega) = \frac{4\cdot 27\,g_2^3}{G}, \qquad G = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27\,g_3^2)$$

ein, so gilt nun der folgende

Satz II: Die Grössen $t_i(\omega)$ genügen der Gleichung 6. Grades:

$$(5)\qquad \underline{t_i^6 - 9\cdot 16\,t_i^4 - \left[j(\omega) - 27\cdot 2^8\right]\cdot t_i^2 + 64\left[j(\omega) - 27\cdot 64\right] = 0},$$

deren Koeffizienten ganze algebraische Zahlen sind[2]) und folglich sind die t_i selbst ganze algebraische Zahlen.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass z. B. $t_3 = -4\left(\frac{1+\varkappa^2}{\varkappa}\right)$ der obigen Gleichung wirklich genügt. Denn aus

$$j(\omega) - 27\cdot 64 = \frac{64\,(2+\varkappa^2\cdot\varkappa'^2)^2\,(\varkappa'^2-\varkappa^2)^2}{\varkappa^4\cdot\varkappa'^4}\ {}^{3})$$

folgt, wegen $\varkappa'^2 = 1 - \varkappa^2$,

$$(j - 27\cdot 64)\,(1-\varkappa^2)^2\cdot\varkappa^4 = 64\left[2+\varkappa^2(1-\varkappa^2)\right]^2\cdot(1-2\,\varkappa^2)^2.$$

Nach dem Auflösen der Klammern und Ordnen nach Potenzen von $\varkappa$ ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
2^8\cdot\varkappa^{12} - 3\cdot 2^8\varkappa^{10} + (6\cdot 2^8 - j)\,\varkappa^8 - (7\cdot 2^8 - 2\,j)\cdot\varkappa^6&\\
+ (6\cdot 2^8 - j)\,\varkappa^4 - 3\cdot 2^8\varkappa^2 + 2^8 &= 0.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung ist symmetrisch; darum ist

$$2^8(\varkappa^{12}+1) - 3\cdot 2^8(\varkappa^{10}+\varkappa^2) + (6\cdot 2^8 - j)(\varkappa^8+\varkappa^4) - (7\cdot 2^8 - 2\,j)\,\varkappa^6 = 0.$$

Setzen wir vorübergehend $\varkappa^2 = \beta$, so folgt nach der Division durch β^3:

$$2^8\left(\beta^3+\frac{1}{\beta^3}\right) - 3\cdot 2^8\left(\beta^2+\frac{1}{\beta^2}\right) + (6\cdot 2^8 - j)\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right) - (7\cdot 2^8 - 2\,j) = 0.$$

---

[1]) Weber: Alg. III, §, 47, (16); ferner § 115.
[2]) Ebenda; § 116, VI; vgl. ferner § 156, (3).
[3]) Ebenda: § 47, (16).

Setzen wir ferner $\varphi_k(s) = \beta^k + \frac{1}{\beta^k}$, so ist

$$\varphi_1(s) = \beta + \frac{1}{\beta} = s, \qquad \varphi_2(s) = s^2 - 2, \qquad \varphi_3(s) = s^3 - 2s,$$

und wir erhalten:

$$2^8(s^3 - 3s) - 3 \cdot 2^8(s^2 - 2) + (6 \cdot 2^8 - j)s - (7 \cdot 2^8 - 2j = 0$$

oder

$$2^8 \cdot s^3 - 3 \cdot 2^8 \cdot s^2 + (3 \cdot 2^8 - j) \cdot s - (2^8 - 2j) = 0.$$

Da $s = \varkappa^2 + \frac{1}{\varkappa^2} = \left(\varkappa + \frac{1}{\varkappa}\right)^2 - 2$, so ist

$$16s = \left[4\left(\varkappa + \frac{1}{\varkappa}\right)\right]^2 - 32 = t_3^2 - 32$$

und die mit 2^4 multiplizierte Gleichung geht über in

$$(t_3^2 - 32)^3 - 3 \cdot 2^4(t_3^2 - 32)^2 + (3 \cdot 2^8 - j)(t_3^2 - 32) - 2^4(2^8 - 2j) = 0.$$

Ordnet man schliesslich nach Potenzen von t_3, so ergibt sich die Gleichung (5) (für $i = 3$).

Da nun $j(\omega)$ wegen $j(S\omega) = j(\omega)$ [1]) nicht von der Wahl des Ideals $\mathfrak{w}$ und dessen Basis, sondern nur von der Klasse von $\mathfrak{w}$ in $k(\sqrt{m})$ abhängt, so folgt aus Satz I, dass mit t_3 auch t_1 und t_2 der obigen Gleichung genügen müssen. Damit ist Satz II bewiesen.

Es wäre nun naheliegend, zur numerischen Berechnung der Grössen t_i die Gleichung (5) aufzulösen und alsdann die Beziehung

$$j(\omega) = \frac{\left(f(\omega)^{24} - 16\right)^3}{f(\omega)} \quad ^{2)}$$

zu verwenden. Es ist aber zweckmässiger, die t_i direkt durch die Funktionen $f(\omega)$, $f_1(\omega)$ und $f_2(\omega)$ darzustellen. Die Definitionen dieser Funktionen lauten [3]):

$$f(\omega) = q^{-\frac{1}{24}} \prod_{r=1}^{\infty}\left(1 + q^{2r-1}\right),$$

$$f_1(\omega) = q^{-\frac{1}{24}} \prod_{r=1}^{\infty}\left(1 - q^{2r-1}\right),$$

$$f_2(\omega) = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{12}} \prod_{r=1}^{\infty}\left(1 + q^{2r}\right),$$

worin $q = e^{\pi i \omega}$.

---

1) Weber: Alg. III, § 53, 2.
2) Ebenda; § 69, (3).
3) Ebenda; § 24, (11).

Auf Grund dieser Definitionen lassen sich aber die folgenden Beziehungen herleiten[1]):

$$
(7) \qquad
\begin{aligned}
f(\omega) &= \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[12]{\varkappa \cdot \varkappa'}}, \\
\frac{f_1(\omega)}{f(\omega)} &= \sqrt[4]{\varkappa'}, \\
\frac{f_2(\omega)}{f(\omega)} &= \sqrt[4]{\varkappa}.
\end{aligned}
$$

Durch Elimination von $\varkappa$ und $\varkappa'$ aus (4) und (7) ergeben sich alsdann die gesuchten Formeln:

$$
(8) \qquad
\boxed{
\begin{aligned}
t_1(\omega) &= \frac{4\left(f(\omega)^8 + f_1(\omega)^8\right)}{f(\omega)^4 \cdot f_1(\omega)^4}, \\
t_2(\omega) &= i \cdot f(\omega)^4 \left(f_1(\omega)^8 - f_2(\omega)^8\right), \\
t_3(\omega) &= -\frac{4\left(f(\omega)^8 + f_2(\omega)^8\right)}{f(\omega)^4 \cdot f_2(\omega)^4}.
\end{aligned}
}
$$

Es bestehen ausserdem die beiden folgenden fundamentalen Beziehungen zwischen den 3 Funktionen f, f_1 und f_2 [2]):

$$
(9) \qquad
\begin{aligned}
f_1(\omega)^8 + f_2(\omega)^8 &= f(\omega)^8, \\
f(\omega) \cdot f_1(\omega) \cdot f_2(\omega) &= \sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Hieraus erhalten wir ohne weiteres die Gleichungen

$$
(10) \qquad
\begin{aligned}
f_1(\omega)^8 - f_2(\omega)^8 &= \frac{\sqrt{f(\omega)^{24} - 64}}{f(\omega)^4}, \\
f(\omega)^8 + f_2(\omega)^8 &= \frac{\sqrt{f_1(\omega)^{24} + 64}}{f_1(\omega)^4}, \\
f(\omega)^8 + f_1(\omega)^8 &= \frac{\sqrt{f_2(\omega)^{24} + 64}}{f_2(\omega)^4}.
\end{aligned}
$$

In bezug auf das Vorzeichen der rechts auftretenden Wurzeln ist folgendes zu bemerken: Für ein verschwindendes q werden die linken Seiten nach (6) positiv unendlich. Das Vorzeichen der 1. Wurzel

---

[1]) Weber: Alg. Bd. III, § 54, (2) und (3).

[2]) Ebenda, § 34, (11).

ist demnach positiv zu nehmen, solange $-i\omega$ reell und grösser als 1 ist; denn dieses Vorzeichen wechselt nur für $f(\omega)^{24} = 64$, also laut Tabelle VI in Webers Algebra, Bd. III,[1]) für $\omega = i$. Das Vorzeichen der beiden andern Wurzeln ist positiv zu nehmen, solange $-i\omega$ reell und positiv ist; denn sowohl $f_1(\omega)^{24}$ wie auch $f_2(\omega)^{24}$ werden nie $= -64$, falls $-i\omega$ nur solche Werte durchläuft.

Die Formeln (9) und (10) sind für die praktische Rechnung wertvoll, weil man mit ihrer Hilfe aus dem numerischen Wert der einen der 3 Grössen f^8, f_1^8 und f_2^8 sofort den Wert der beiden andern bestimmen kann.

§ 2. Die Berechnung der $t_i(\omega)$ für imaginär-quadratische Körper.

Da wir uns bei der zahlenmässigen Berechnung der $t_i(\omega)$ nur auf einige der einfachsten imaginären quadratischen Körper beschränken wollen, so werden wir in jedem Fall die schon erwähnte Tabelle VI in Webers Algebra, Bd. III, verwerten können. Diese enthält ein Verzeichnis von Klasseninvarianten aller imaginär-quadratischen Körper $k(\sqrt{m})$, für die $|m| \leqq 52$, und dann noch für einzelne weitere derartige Körper (bis zu $|m| = 1848$).

Wegen § 1, Satz I, können wir uns jeweilen darauf beschränken, für ω das Verhältnis der Basiszahlen des einfachsten Repräsentanten einer Idealklasse zu wählen. Der einfachste Vertreter der Hauptklasse ist das Einheitsideal

$$\mathfrak{o} = (1, \omega), \text{ worin } \omega = \begin{cases} \sqrt{m}, & \text{falls } m \not\equiv 1\,(4), \\ \dfrac{1+\sqrt{m}}{2}, & \text{»} \quad m \equiv 1\,(4). \end{cases}$$

A. Es sei zunächst ω das Verhältnis der Basiszahlen des Einheitsideals. Alsdann lassen sich die folgenden Fälle unterscheiden:

1. $\underline{m \not\equiv 1\,(4),\ \omega = \sqrt{m}.}$

a) $\underline{m \not\equiv 0\,(2)}$.

In diesem Falle können wir aus Tabelle VI (loc. cit.) den Wert von $f(\sqrt{m})$ entnehmen. Wir setzen ihn in

$$f_1(\omega)^8 + f_2(\omega)^8 = f(\omega)^8$$

und

$$f_1(\omega)^8 - f_2(\omega)^8 = \frac{\sqrt{f(\omega)^{24} - 64}}{f(\omega)^4}$$

---

[1]) Am Schlusse des Buches.

(vgl. § 1, (9) und (10)) ein und addieren bezw. subtrahieren dann diese beiden Gleichungen. So ergibt sich:

$$(11)\quad \begin{cases} f_1(\omega)^8 = \dfrac{f(\omega)^{12} + \sqrt{f(\omega)^{24} - 64}}{2\, f(\omega)^4}, \\[2ex] f_2(\omega)^8 = \dfrac{f(\omega)^{12} - \sqrt{f(\omega)^{24} - 64}}{2\, f(\omega)^4}. \end{cases}$$

Durch Anwendung der Formeln (8) erhalten wir schliesslich die gesuchten numerischen Werte der $t_i(\omega)$.

Beispiel: Es sei $\underline{\omega = \sqrt{-5}}$, d. h. wir setzen ω gleich dem Verhältnis der Basiszahlen des Einheitsideals $\mathfrak{o} = (1, \sqrt{-5})$ aus $k(\sqrt{-5})$, dessen Klassenzahl $h = 2$ ist.

Nach Tabelle VI ist

$$f(\sqrt{-5})^4 = 2\,\varepsilon,$$

wo $\varepsilon = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ die Grundeinheit des reellen Körpers $k(\sqrt{5})$ ist. Setzen wir diesen Wert in die rechten Seiten der Gleichungen (11) ein, so finden wir mit Berücksichtigung von $\varepsilon^2 - \varepsilon - 1 = 0$, dass

$$f_1(\sqrt{-5})^8 = 2(1 + \sqrt{\varepsilon})^2,$$
$$f_2(\sqrt{-5})^8 = 2(1 - \sqrt{\varepsilon})^2.$$

Mit Hilfe der Formeln (8) ergeben sich dann die folgenden Werte:

$$t_1(\sqrt{-5}) = 2\sqrt{2}\,(3\,\varepsilon^2 + 2\sqrt{\varepsilon})(1 - \sqrt{\varepsilon}),$$
$$t_2(\sqrt{-5}) = 16\, i\, \varepsilon \sqrt{\varepsilon},$$
$$t_3(\sqrt{-5}) = -2\sqrt{2}\,(3\,\varepsilon^2 - 2\sqrt{\varepsilon})(1 + \sqrt{\varepsilon}).$$

b) $\underline{m \equiv 0\ (2)}$

Dann liefert Tabelle VI den Wert von $f_1(\sqrt{m})$, den wir uns in

$$f(\omega)^8 - f_2(\omega)^8 = f_1(\omega)^8$$

und

$$f(\omega)^8 + f_2(\omega)^8 = \frac{\sqrt{f_1(\omega)^{24} + 64}}{f_1(\omega)^4} \qquad \big((\text{§ 1, (9) u. (10)}\big)$$

eingesetzt denken. Durch Addition und Subtraktion dieser Gleichungen ergibt sich:

$$(12)\quad \begin{cases} f(\omega)^8 = \dfrac{f_1(\omega)^{12} + \sqrt{f_1(\omega)^{24} + 64}}{2\, f_1(\omega)^4}, \\[2ex] f_2(\omega)^8 = \dfrac{-f_1(\omega)^{12} + \sqrt{f_1(^{24}) + 64}}{2\, f_1(\omega)^4}. \end{cases}$$

Setzen wir nun die Werte von f^8, f_1^8 und f_2^8 wieder in die Formeln (8) ein, so erhalten wir die Werte der $t_i(\omega)$.

Beispiel: Es sei $\omega = \sqrt{-10}$, d. h. wir setzen ω gleich dem Verhältnis der Basiszahlen des Einheitsideals $\mathfrak{o} = (1, \sqrt{-10})$ aus dem Körper $k(\sqrt{-10})$, dessen Klassenanzahl $h = 2$ ist.

Nach Tabelle VI ist

$$\sqrt{2} \cdot f_1(\sqrt{-10})^2 = 2\,\varepsilon,$$

wo wieder $\varepsilon = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Somit ist

$$f_1(\sqrt{-10})^4 = 2\,\varepsilon^2.$$

Aus (12) und $\varepsilon^{12} + 1 = 2 \cdot 3^2 \cdot \varepsilon^6$ folgt ferner, dass

$$f(\sqrt{-10})^8 = 2\,\varepsilon\,(\varepsilon^3 + 3\sqrt{2})$$

und

$$f_2(\sqrt{-10})^8 = -2\varepsilon\,(\varepsilon^3 - 3\sqrt{2})$$

ist. Mit Benützung von (8) erhalten wir sodann die Resultate:

$$t_1(\sqrt{-10}) = 6(3-\sqrt{10})(\varepsilon^3+\sqrt{2})\sqrt{2\,\varepsilon'^3(\varepsilon'^3 - 3\sqrt{2})},\ \varepsilon' = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

$$t_2(\sqrt{-10}) = 6\,i\,(\varepsilon^3 - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2\,\varepsilon^3(\varepsilon^3+3\sqrt{2})},$$

$$t_3(\sqrt{-10}) = 24\sqrt{2}\,\varepsilon^3.$$

2. $m \equiv 1\ (4)$, $\omega = \frac{1+\sqrt{m}}{2}$.

Für alle ω dieser Form lassen sich die $t_i(\omega)$ wie folgt berechnen: Aus Tabelle VI entnimmt man den Wert von $f(\sqrt{m})$ und setzt ihn in die Transformationsformel 2. Ordnung[1])

$$f(\sqrt{m}) \cdot f_2\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right) = e^{\frac{\pi i}{24}} \cdot \sqrt{2} \tag{13}$$

ein, wodurch $f_2\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)$ bestimmt ist. Zur Bestimmung von $f\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^8$ und $f_1\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^8$ dienen die unter (9) und (10) enthaltenen Beziehungen

[1]) Weber: Alg. III, § 34, (19).

$$f\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^8 - f_1\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^8 = f_2\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^8,$$

$$f\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^8 + f_1\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^8 = \frac{\sqrt{f_2\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^{24} + 64}}{f_2\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^4}.$$

Dabei hat man das Vorzeichen der Wurzel positiv zu nehmen, solange $|m| > 1$. Denn für ein unendlich grosses $|m|$ wird nach (6) sowohl

$$f\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^8 + f_1\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^8 \text{ wie auch } \frac{1}{f_2\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^4},$$

abgesehen von dem konstanten Faktor $e^{-\frac{i\pi}{6}}$, positiv unendlich. Das Vorzeichen der Wurzel ändert sich aber erst für $f_2\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^{24} = -64$, was für $m = -1$ eintritt, wie man sich mit Hilfe von (13) und Tabelle VI leicht überzeugt.

Durch Addition bezw. Subtraktion der beiden obigen Gleichungen findet man:

$$(14)\quad \begin{aligned} f\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^8 &= \frac{f_2\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^{12} + \sqrt{f_2\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^{24} + 64}}{2 f_2\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^4}, \\ f_1\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^8 &= \frac{-f_2\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^{12} + \sqrt{f_2\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^{24} + 64}}{2 f_2\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^4}. \end{aligned}$$

Die gefundenen numerischen Werte setzt man alsdann in die Formeln (8) ein und bekommt so die gewünschten Werte von $t_i\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)$.

Es lässt sich aber speziell $t_1\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)$ besonders einfach durch $f_2\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)$ allein ausdrücken. Denn nach der ersten Formel des Systems (8) und mit Benützung von (14) ergibt sich

$$t_1\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)=\frac{4\cdot\sqrt{f_2\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^{24}+64}}{f\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^4\cdot f_1\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^4\cdot f_2\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^4},$$

oder, wegen (9),

$$(15)\qquad \underline{t_1\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)=\sqrt{f_2\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^{24}+64}}\,.$$

In den Fällen, wo $\omega=\frac{1+\sqrt{m}}{2}$, ist also die erste der Formeln (8) durch (15) zu ersetzen.

Beispiel: Es sei $\underline{\omega=\frac{1+\sqrt{-7}}{2}}$, d. h. ω sei das Verhältnis der Basiszahlen des Einheitsideals $\mathfrak{o}=\left(1,\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right)$ aus $k(\sqrt{-7})$ $(h=1)$.

Aus Tabelle VI entnehmen wir:

$$f\sqrt{-7})=\sqrt{2}\,;$$

nach (13) ist also

$$f_2\left(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right)=e^{\frac{\pi i}{24}}\,.$$

Die Formeln (14) liefern sodann die Werte:

$$f\left(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right)^8=\frac{1-3\sqrt{-7}}{2}\cdot e^{\frac{\pi i}{3}}$$

$$f_1\left(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right)^8=-\frac{1+3\sqrt{-7}}{2}\cdot e^{\frac{\pi i}{3}}\,.$$

Mit Benützung von (15) und (8) ergibt sich somit:

$$t_1\left(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right)=3\sqrt{7},$$

$$t_2\left(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right)=\frac{15+3\sqrt{-7}}{2}=3\,(2+\omega),$$

$$t_3\left(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right)=-\frac{15-3\sqrt{-7}}{2}=-3\,(3-\omega).$$

B. Ist ω das Verhältnis der Basiszahlen eines einfachen Nebenideals, so lassen sich die $t_i(\omega)$ ebenfalls mit Hilfe eines der beschriebenen Verfahren berechnen, nur muss man in gewissen Fällen statt (13) eine andere Transformationsformel 1. oder 2. Ordnung der Funktionen f, f_1 und f_2 [1]) herbeiziehen.

Beispiel: Es sei $\omega = \frac{\sqrt{-10}}{2}$, d. h. ω sei das Verhältnis der Basiszahlen des Nebenideals $\mathfrak{w} = (2, \sqrt{-10})$ aus $k(\sqrt{-10})$.

In diesem Falle müssen wir von folgender Transformationsformel 2. Ordnung ausgehen:

$$f_1(\omega) \cdot f_2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{2}. ^{2)}$$

Da $f_1(\sqrt{-10})^2 = \sqrt{2}\,\varepsilon$ (vergl. pag. 34), so folgt aus dieser Beziehung, dass

$$f_2\left(\frac{\sqrt{-10}}{2}\right)^2 = \sqrt{2}\,\varepsilon', \quad \varepsilon' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Setzen wir diesen Wert in (14) ein, so erhalten wir:

$$f\left(\frac{\sqrt{-10}}{2}\right)^8 = 2\,\varepsilon'(\varepsilon'^3 + 3\sqrt{2}),$$

$$f_1\left(\frac{\sqrt{-10}}{2}\right)^8 = -2\,\varepsilon'(\varepsilon'^3 - 3\sqrt{2}).$$

Die Formeln (8) und (15) ergeben alsdann die folgenden Resultate:

$$t_1\left(\frac{\sqrt{-10}}{2}\right) = -24\sqrt{2}\,\varepsilon'^3,$$

$$t_2\left(\frac{\sqrt{-10}}{2}\right) = -6\,i\,(\varepsilon'^3 - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2\,\varepsilon'^3(\varepsilon'^3 + 3\sqrt{2})},$$

$$t_3\left(\frac{\sqrt{-10}}{2}\right) = -6(3+\sqrt{10})(\varepsilon'^3 + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2\,\varepsilon^3(\varepsilon^3 - 3\sqrt{2})}.$$

In der untenstehenden Tabelle haben wir die berechneten Beispiele zusammengestellt. Wir haben uns auf die 5 einfachen Körper $k(\sqrt{-5})$, $k(\sqrt{-7})$, $k(\sqrt{-10})$, $k(\sqrt{-11})$ und $k(\sqrt{-23})$, deren Klassenanzahl h bezw. gleich 2, 1, 2, 1, 3 ist, beschränkt und dabei jeweilen das Einheitsideal zugrunde gelegt. (Da die Ausdrücke für $t_i\left(\frac{1+\sqrt{-11}}{2}\right)$ und $t_i\left(\frac{1+\sqrt{-23}}{2}\right)$ $(i = 2, 3)$ kompliziert ausfallen, haben wir sie in der Tabelle weggelassen.) Diese Tabelle enthält ausserdem die $t_i(\omega)$ für je einen einfachen Vertreter der Nebenideale der zweiklassigen Körper $k(\sqrt{-5})$ und $k(\sqrt{-10})$.

---

[1]) Vergl. Weber, Alg. III, § 34.

[2]) Loc. cit.

Tabelle der berechneten Grössen $t_i(\omega)$ $(i = 1, 2, 3)$.

m	Klassen-anzahl h	ω	$t_1(\omega)$	$t_2(\omega)$	$t_3(\omega)$
-5	2	$\sqrt{-5}$ $\frac{1+\sqrt{-5}}{2}$	$2\sqrt{2}(3\varepsilon^2+2\sqrt{\varepsilon})(1-\sqrt{\varepsilon})$ $16\,i\,\varepsilon'\sqrt{\varepsilon'}$	$16\,i\,\varepsilon\sqrt{\varepsilon}$ $2\sqrt{2}(3\varepsilon'^2+2\sqrt{\varepsilon'})(1-\sqrt{\varepsilon'})$ $\left(\varepsilon=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \varepsilon'=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$	$-2\sqrt{2}(3\varepsilon^2-2\sqrt{\varepsilon})(1+\sqrt{\varepsilon})$ $-2\sqrt{2}(3\varepsilon'^2-2\sqrt{\varepsilon'})(1+\sqrt{\varepsilon'})$
-7	1	$\frac{1+\sqrt{-7}}{2}$	$3\sqrt{7}$	$\frac{15+3\sqrt{-7}}{2}=3(2+\omega)$	$-\frac{15-3\sqrt{-7}}{2}=\ 3(3-\omega)$
-10	2	$\sqrt{-10}$ $\frac{\sqrt{-10}}{2}$	$6(3-\sqrt{10})(\varepsilon^3+\sqrt{2})\cdot\sqrt{2\varepsilon'^3(\varepsilon'^3-3\sqrt{2})}$ $-24\sqrt{2}\,\varepsilon'^3$	$6i(\varepsilon^3-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2\varepsilon^3(\varepsilon^3+3\sqrt{2})}$ $-6i(\varepsilon'^3-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2\varepsilon'^3(\varepsilon'^3+3\sqrt{2})}$ $\left(\varepsilon=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \varepsilon'=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$	$24\sqrt{2}\,\varepsilon^3$ $-6(3+\sqrt{10})(\varepsilon'^3+\sqrt{2})\cdot\sqrt{2\varepsilon^3(\varepsilon^3-\sqrt{2})}$
-11	1	$\frac{1+\sqrt{-11}}{2}$	$4(1+x)\cdot\sqrt{3-x^2}$, $x^3-2x^2+2x-2=0$	$x=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{17+3\sqrt{33}}+\sqrt[3]{17-3\sqrt{33}}\right)$	
-23	3	$\frac{1+\sqrt{-23}}{2}$	$-(3-4x-x^2)\cdot\sqrt{3+2x-x^2}$, $x^3-x-1=0$	$x=\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{12+3\left(\frac{1+\sqrt{69}}{2}\right)}+\sqrt[3]{12+3\left(\frac{1-\sqrt{69}}{2}\right)}\right)$	

III. Kapitel.

Die Teilungsgleichungen.

Die Erwägungen des letzten Kapitels haben vor allem ergeben, dass die Grössen $\mathfrak{t}_i(\omega)$ $(i = 1, 2, 3)$ ganze algebraische Zahlen sind (vgl. § 1, Satz II). Daraus folgt nun insbesondere der

Satz: Die Wurzeln $\mathfrak{T}_{i;\,r_1,r_2} = \mathfrak{T}_i\left(\frac{r_1\omega_1 + r_2\omega_2}{n}\right)$ der Gleichung

$$Z_n\big(\mathfrak{T}_i(z)\big) = 0$$

sind algebraische Zahlen; wenn n ungerade ist, so sind es ganze algebraische Zahlen.

Denn nach Kap. I, § 4, Satz I sind die Koeffizienten der Funktion Z_n, wie auch der Funktion N_n, ganze algebraische Zahlen, als ganze ganzzahlige Funktionen von $\mathfrak{t}_i(\omega)$. Bei ungeradem n ist ausserdem der oberste Koeffizient von Z_n gleich 1 [vgl. Kap. I, (37)].

Ist n ungerade, dann ist (nach Kap. I, § 4) der Grad von $Z_n = 0$ gleich $\frac{n^2-1}{2}$ und wir erhalten alle Wurzeln $\mathfrak{T}_{i;\,r_1,r_2}$ dieser Gleichung, wenn wir r_1, r_2 die Wertepaare (30) (pag. 18) durchlaufen lassen. Ist dagegen n gerade, so ist der Grad von $Z_n = 0$ gleich $\frac{n^2}{n} - 2$ und ihre Wurzeln sind die Werte $\mathfrak{T}_{i;\,r_1,r_2}$, die man erhält, wenn r_1, r_2 alle Wertepaare (31) (pag. 20) durchläuft.

Im Anschluss an H. Weber[1]) nennen wir die Gleichung $Z_n = 0$ die Periodenteilungsgleichung oder kurz die Teilungsgleichung. Dieselbe verdient besonderes Interesse, wenn n ungerade ist. Es sei daher von jetzt an $n \not\equiv 0 \ (2)$.

Wegen der Homogenität der Funktionen $\mathfrak{T}_i(z)$ (vgl. Kap. I, § 1, II) können wir nun

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = \omega$$

setzen und nehmen dabei an, dass ω das Verhältnis der Basiszahlen eines Ideals aus dem imaginär-quadratischen Körper $k(\sqrt{m})$,

$$m < 0, \ \neq -1, \ \neq -3,$$

sei. Dann ist jede Periode

$$r_1\omega_1 + r_2\omega_2 = r_1 + r_2\omega = \nu \qquad (r_1, r_2 = \text{ganze, rat. Zahlen})$$

---

[1]) Alg., Bd. III, pag. 205 u. ff.

eine Zahl aus $k(\sqrt{m})$. Setzen wir ferner als Rationalitätsbereich den Körper $k(\sqrt{m}, t_i)$ voraus, der aus $k(\sqrt{m})$ durch Adjunktion der Grössen $t_i(\omega)$ $(i = 1, 2, 3)$ hervorgeht, so ist die Teilungsgleichung $Z_n = 0$ im allgemeinen reduzibel. Denn es ist klar, dass diejenigen Zahlen $\mathfrak{C}_i\left(\frac{\nu}{n}\right)$, für die ν und n einen gemeinsamen Teiler ν_1 haben, auch Wurzeln der Gleichung $Z_{\frac{n}{\nu_1}} = 0$ sind. Es lässt sich demnach Z_n auf rationalem Wege von derartigen Faktoren $\mathfrak{C}_i(z) - \mathfrak{C}_i\left(\frac{\nu}{n}\right)$ befreien. Man erhält so eine Funktion $T_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{C}_i(z))$, $\mathfrak{n} = (n)$, deren Wurzeln diejenigen Zahlen $\mathfrak{C}_i\left(\frac{\nu}{n}\right)$ sind, für die $(\nu, n) = (1)$, und deren Koeffizienten wieder Zahlen aus $k(\sqrt{m}, t_i)$ sind. Da 2 Grössen $\mathfrak{C}_i\left(\frac{\nu}{n}\right)$ und $\mathfrak{C}_i\left(\frac{\nu'}{n}\right)$ nur dann einander gleich sind, wenn

$$\nu \equiv \pm \nu' \pmod{n},$$

so ist der Grad der Funktion $T_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{C}_i(z))$ gleich $\frac{1}{2}\varphi(n)$, wo die numerische Funktion $\varphi(n)$ die Anzahl aller zu n relativ primen Zahlen eines vollständigen Restsystems mod. n angibt.[1]) Die Gleichung $T_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{C}_i(z)) = 0$ nennen wir die Idealteilungsgleichung für den Divisor $\mathfrak{n} = (n)$. Die Wurzeln dieser Gleichung bestimmen einen Körper $K(\mathfrak{n})$ über dem Körper $k(\sqrt{m}, t_i)$, den Teilungskörper für den Divisor $\mathfrak{n}$. Von diesen Teilungskörpern lässt sich vor allem zeigen, dass sie in bezug auf den Körper $k(\sqrt{m}, t_i)$ relativ Abelsch sind.[2])

Zur zahlenmässigen Berechnung von Teilungsgleichungen muss man von den Multiplikationsformeln für einen ungeraden Multiplikator n [Kap. I, § 4, (38)]:

$$\mathfrak{C}_i(nz) = \mathfrak{C}_i(z) \cdot \frac{Z_n^2\left(\mathfrak{C}_i(z)\right)}{N_n^2\left(\mathfrak{C}_i(z)\right)}, \qquad n = 2m + 1 \quad (m = 1, 2, \cdots),$$

ausgehen. Dieselben liefern die Teilungsgleichungen $Z_n = 0$. Ist nun speziell n gleich einer Primzahl p, so ist $Z_p = 0$ in $k(\sqrt{m}, t_i)$ reduzibel oder nicht, je nachdem das Ideal $\mathfrak{p} = (p)$ in $k(\sqrt{m})$ in

[1]) Vgl. Hilbert: Zahlbericht, Satz 23.
[2]) Vgl. Weber: Alg., Bd. III, §§ 154 u. 158.

2 Primideale zerfällt oder selbst Primideal ist. Der Euklidsche Algorithmus und die Methode der unbestimmten Koeffizienten sind die naheliegenden Mittel zur Bestimmung der irreduziblen Faktoren. Im Falle $n = 3$ haben wir die letztere Methode angewendet. Die erwähnten Verfahren gestalten sich jedoch sehr bald so umständlich und zeitraubend, dass schon von $n = 5$ an eine praktische Verwertung derselben nicht mehr in Frage kommt.

Die nachfolgende Tabelle enthält nun eine Anzahl zahlenmässig berechneter Teilungsgleichungen für $n = 3$ und $n = 5$. Dabei haben wir uns jeweilen auf denjenigen der 3 Fälle $i = 1, 2, 3$ beschränkt, für den die zugehörige Grösse $t_i(\omega)$ am einfachsten ausfällt. — Es ist uns noch nicht gelungen, in den Fällen, wo (5) zerfällt, die Zerlegung von $Z_5 = 0$ durchzuführen. Doch hoffen wir, die betreffenden Zerfällungen durch Verwendung von Beziehungen zu bekommen, die sich aus der komplexen Multiplikation der Funktionen $\mathfrak{T}_i(z)$ ergeben.

Beispiele von Teilungsgleichungen.

Körper	h	Divisor $\mathfrak{n}$	$\frac{1}{2}\varphi(\mathfrak{n})$	Teilungsgleichung $T_{\mathfrak{n}} = 0$.
$\sqrt{-5}$	2	$(3) = (3, 1+\sqrt{-5})(3, 1\ \sqrt{-5})$	2	$\mathfrak{T}_2^2 + 2i\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \cdot \mathfrak{T}_2 - (2-\sqrt{5}) = 0$
		$(3, 1+\sqrt{-5})$	1	$\mathfrak{T}_2 - \left(i + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 0$
		$(3, 1-\sqrt{-5})$	1	$\mathfrak{T}_2 - \left(i - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 0$
		$(5) = (5, \sqrt{-5})^2 = (\sqrt{-5})^2$	10	$T_{(5)} \equiv \sum_{i=0}^{10} \alpha_i\, \mathfrak{T}_2^{10-i} = 0, \quad \alpha_0 = 1,$
		$(5, \sqrt{-5}) = (\sqrt{-5})$	2	$T_{(\sqrt{-5})} \equiv \mathfrak{T}_2^2 + \beta_1 \mathfrak{T}_2 + \beta_2 = 0,$
				wobei $T_{(5)} \cdot T_{(\sqrt{-5})} \equiv Z_5(\mathfrak{T}_2) \equiv \mathfrak{T}_2^{12} + a_1 \mathfrak{T}_2^{11} + a_2 \mathfrak{T}_2^{10} + \ldots + a_{10} \mathfrak{T}_2^2 + a_{11} \mathfrak{T}_2 + a_{12} = 0,$
				$a_1 = 0,$
				$a_2 = -50,$ $\quad a_7 = -1440i\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}},$
				$a_3 = -560i\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}},$ $\quad a_8 = -105,$
				$a_4 = 5\left(487 + 1024 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),$ $\quad a_9 = 320i\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}},$
				$a_5 = 64i\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\left(41 + 128 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),$ $\quad a_{10} = -2\left(97 + 256\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),$
				$a_6 = 60\left(59 + 128 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),$ $\quad a_{11} = 80i\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}},$
				$a_{12} = +5.$
$\sqrt{-7}$	1	$(3) = (3)$	4	$\mathfrak{T}_1^4 - 6\mathfrak{T}_1^2 - 3\sqrt{7}\,\mathfrak{T}_1 - 3 = 0$
		$(5) = (5)$	12	$\mathfrak{T}_1^{12} - 50\mathfrak{T}_1^{10} - 105\sqrt{7}\,\mathfrak{T}_1^9 - 755\mathfrak{T}_1^8 - 465\sqrt{7}\,\mathfrak{T}_1^7 - 1245\mathfrak{T}_1^6 - 270\sqrt{7}\,\mathfrak{T}_1^5 - 105\mathfrak{T}_1^4 + 60\sqrt{7}\,\mathfrak{T}_1^3 + 125\mathfrak{T}_1^2 + 15\sqrt{7}\,\mathfrak{T}_1 + 5 = 0.$

Beispiele von Teilungsgleichungen (1. Fortsetzung).

Körper	h	Divisor $\mathfrak{n}$	$\frac{1}{2}\varphi(\mathfrak{n})$	Teilungsgleichung $T_\mathfrak{n} = 0$.
$\sqrt{-10})$	2	$(3) = (3)$	4	$\mathfrak{T}_3^4 - 6\,\mathfrak{T}_3^2 - 24\sqrt{2}\,(2+\sqrt{5})\,\mathfrak{T}_3 - 3 = 0$
		$(5) = (5, \sqrt{-10})^2$	10	$T_{(5,\sqrt{-10})^2} \equiv \mathfrak{T}_3^{10} + \alpha_1'\,\mathfrak{T}_3^9 + \alpha_2'\,\mathfrak{T}_3^8 + \cdots + \alpha_8'\,\mathfrak{T}_3^2 + \alpha_9'\,\mathfrak{T}_3 + \alpha_{10} = 0,$
		$(5, \sqrt{-10})$	2	$T_{(5,\sqrt{-10})} \equiv \mathfrak{T}_3^2 + \beta_1'\,\mathfrak{T}_3 + \beta_2' = 0,$
				wobei $T_{(5,\sqrt{-10})^2} \cdot T_{(5,\sqrt{-10})} \equiv Z_5(\mathfrak{T}_3) \equiv \mathfrak{T}_3^{12} - 50\,\mathfrak{T}_3^{10} - 840\sqrt{2}\,(2+\sqrt{5})\,\mathfrak{T}_3^9$ $-5(20761+9216\sqrt{5})\,\mathfrak{T}_3^8 - 96\sqrt{2}\,(2+\sqrt{5})(2615+1152\sqrt{5})\,\mathfrak{T}_3^7 - 60(2597+1152\sqrt{5})\,\mathfrak{T}_3^6$ $-2160\sqrt{2}\,(2+\sqrt{5})\,\mathfrak{T}_3^5 - 105\,\mathfrak{T}_3^4 + 480\sqrt{2}\,(2+\sqrt{5})\,\mathfrak{T}_3^3 + 2(5215+2304\sqrt{5})\,\mathfrak{T}_3^2$ $+120\sqrt{2}\,(2+\sqrt{5})\,\mathfrak{T}_3 + 5 = 0.$
$\sqrt{-11})$	1	$(3) = \left(3, \frac{1+\sqrt{-11}}{2}\right)\left(3, \frac{1-\sqrt{-11}}{2}\right) = \omega \cdot \omega'$	2	$\mathfrak{T}_1^2 + x^2 \cdot \sqrt{3-x^2} \cdot \mathfrak{T}_1 + 3(1-x^2) = 0$
		$\left(\frac{1+\sqrt{-11}}{2}\right)$	1	$\mathfrak{T}_1 - x^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3-x^2}+\sqrt{3}}{2}\right) = 0$
		$\left(\frac{1-\sqrt{-11}}{2}\right)$	1	$\mathfrak{T}_1 - x^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3-x^2}-\sqrt{3}}{2}\right) = 0, \quad x^3 - 2x + 2x - 2 = 0$
		$(5) = \left(1 + \frac{1+\sqrt{-11}}{2}\right)\left(1 + \frac{1-\sqrt{-11}}{2}\right)$	8	$T_{(5)} \equiv \mathfrak{T}_1^8 + \alpha_1''\,\mathfrak{T}_1^7 + \cdots + \alpha_7''\,\mathfrak{T}_1 + \alpha_8'' = 0,$
		$\left(1 + \frac{1+\sqrt{-11}}{2}\right)$	2	$T_{\left(\frac{3+\sqrt{-11}}{2}\right)} \equiv \mathfrak{T}_1^2 + \beta_1''\,\mathfrak{T}_1 + \beta_2'' = 0,$
		$\left(1 + \frac{1-\sqrt{-11}}{2}\right)$	2	$T_{\left(\frac{3-\sqrt{-11}}{2}\right)} \equiv \mathfrak{T}_1^2 + \gamma_1''\,\mathfrak{T}_1 + \gamma_2'' = 0,$
				wobei $T_{(5)} \cdot T_{\left(\frac{3+\sqrt{-11}}{2}\right)} \cdot T_{\left(\frac{3-\sqrt{-11}}{2}\right)} \equiv Z_5(\mathfrak{T}_1) \equiv \mathfrak{T}_1^{12} - 50\,\mathfrak{T}_1^{10} - 140(1+x)\sqrt{3-x^2} \cdot \mathfrak{T}_1^9$ $+5(135 - 384x + 128x^2)\,\mathfrak{T}_1^8 - 16(29+83x)\sqrt{3-x^2}\,\mathfrak{T}_1^7 + 60(15 - 48x + 16x^2)\,\mathfrak{T}_1^6$ $-360(1+x) \cdot \sqrt{3-x^2} \cdot \mathfrak{T}_1^5 - 105\,\mathfrak{T}_1^4 + 80(1+x)\sqrt{3-x^2}\,\mathfrak{T}_1^3 - 2(9 - 96x + 32x^2)\,\mathfrak{T}_1^2$ $+20(1+x)\sqrt{3-x^2} \cdot \mathfrak{T}_1 + 5 = 0, \quad x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = 0.$

Beispiele von Teilungsgleichungen (2. Fortsetzung).

Körper	h	Divisor $\mathfrak{n}$	$\frac{1}{2}\varphi(\mathfrak{n})$	Teilungsgleichung $T_{\mathfrak{n}} = 0$.
$(\sqrt{-23})$	3	$(3) = \left(3, \frac{1-\sqrt{-23}}{2}\right)\left(3, \frac{1-\sqrt{-23}}{2}\right)$	2	$\mathfrak{T}_1^2 + \sqrt{3+2x-x^2} \cdot \mathfrak{T}_1 + 3(x-1) = 0$
		$\left(3, \frac{1+\sqrt{-23}}{2}\right)$	1	$\mathfrak{T}_1 - \frac{\sqrt{3+2x-x^2} + (1+x)\sqrt{3}}{2} = 0$
		$\left(3, \frac{1-\sqrt{-23}}{2}\right)$	1	$\mathfrak{T}_1 - \frac{\sqrt{3+2x-x^2} - (1+x)\sqrt{3}}{2} = 0$
		$(5) = (5)$	12	$\mathfrak{T}_1^{12} - 50\,\mathfrak{T}_1^{10} + 35\,(3 - 4x + x^2) \cdot \sqrt{3+2x-x^2}\,\mathfrak{T}_1^9 - 5\,(201 + 30x - 50x^2)\,\mathfrak{T}_1^8$ $+ 5\,(125 - 113x - 58x^2) \cdot \sqrt{3+2x-x^2}\,\mathfrak{T}_1^7 - 15\,(108 + 15x - 25x^2) \cdot \mathfrak{T}_1^6$ $+ 90(3 - 4x - x^2) \cdot \sqrt{3+2x-x^2}\,\mathfrak{T}_1^5 - 105\,\mathfrak{T}_1^4 + 20\,(-3 + 4x + x^2)\sqrt{3+2x-x^2} \cdot \mathfrak{T}_1^3$ $+ 5\,(30 + 3x - 5x^2)\,\mathfrak{T}_1^2 + 5\,(-3 + 4x + x^2) \cdot \sqrt{3+2x-x^2}\,\mathfrak{T}_1 + 5 = 0,$ $x^3 - x - 1 = 0.$