Sitzungsberichte der Mathematischen Vereinigung in Bern

Objekttyp: **AssociationNews**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1936)**

PDF erstellt am: **15.08.2024**

Sitzungsberichte
der Mathematischen Vereinigung in Bern

---

93. Sitzung, Freitag, den 5. Juni 1936.

Herr **Prof. Dr. P. Gruner** spricht über das Buch von **L. de Broglie „L'électron magnétique"**. Der Vortragende bietet einen lehrreichen Ueberblick über die neuere Entwicklung der Atomtheorie. Als wichtiger Fortschritt erscheint vor allem die wellenmechanische Darstellung von Schrödinger und weiterhin auch deren „Relativisierung". Die ganze Entwicklung der Atomphysik ist noch in vollem Flusse.

---

94. Sitzung, Freitag, den 6. November 1936.

Herr **Pd. Dr. H. Hadwiger** spricht über das Thema: **„Versuch einer kontinuierlichen Integration"**.

Es handelt sich darum, einen Operator (Funktionaltransformation) zu definieren, der eine Verallgemeinerung der mehrfachen Integration (Differentiation) auf einen beliebigen nicht ganzen (auch komplexen) Index darstellt. Dabei wird davon abgesehen, dem Operator eine anschaulich fassbare Deutung beizulegen.

Der Operator soll folgende Forderungen erfüllen:

I. $J\omega\, f(x)$ ist sinnvoll für alle (komplexen) ω und alle Funktionen $f(x)$ einer gewissen Menge M (Definitionsfeld) und liefert eine wieder zu M gehörende Funktion.

II. $J\omega\, f(x)$ ist eindeutig für alle ω und alle $f(x)$ in M.

III. $J\omega\, a \, . \, f(x) = a \, . \, J\omega\, f(x)$; $J\omega\, (f(x) + g(x)) = J\omega\, f(x) + J\omega\, g(x)$;

IV. $J\,0\, f(x) = f(x)$; $J\omega_1\, J\omega_2\, f(x) = J\,\omega_1 + \omega_2\, f(x)$;

V. $J^{-1}\, f(x) = f'(x)$.

Der Referent zeigt zunächst, dass das Definitionsfeld M die ganzen rationalen Funktionen nicht enthalten kann. Tatsächlich ist bei den klassischen Operatoren dieser Art (Riemann-Liouville, Grünwald, Most), die auch auf ganze rationale Funktionen angewandt werden, entweder Forderung II oder IV nicht intakt.

Für diese unbefriedigende Tatsache findet sich folgender Grund: Eine (um 0) reguläre Funktion $f(x)$ kann ersetzt werden durch das System der Taylorkoeffizienten oder also durch die Folge $f^{(\nu)}(0)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$. Diese Charakterisierung ist ungenügend, wenn in dem Integrationskalkül Eindeutigkeit bestehen soll, was am eindrücklichsten durch das Auftauchen der willkürlichen Integrationskonstanten merkbar wird.

Der Referent setzt nun an Stelle der Folge $f^{(\nu)}(0)$ die allseitig unendliche Matrix:

$$\left\| f^{(\nu + i\mu)}(0) \right\| \qquad (\nu, \mu = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots) \qquad i = \sqrt{-1}$$

und nennt diese Abstraktion „Matrizialfunktion".

Es gelingt nun eine kontinuierliche Abelsche Gruppe eindeutiger Transformationen (Integrationen) solcher Matrizialfunktionen anzugeben, für die die Gesetze I bis V in modifizierter Gestalt gültig sind.

Die Matrix $\| 1 \|$, welche der Exponentialfunktion entspricht, ist invariant. Für die Klasse der „beschränkten Matrizialfunktionen" lässt sich eine „Integration" als unitäre Abbildung des Hilbertschen Raumes darstellen, wobei die Invarianz der Exponentialfunktion geometrisch interpretiert wird.

H. Hadwiger.

Lineare Diffusion zweier Partikel bei verbotenem Abstand.

Lösung einer von Herrn Prof. Dr. W. Scherrer gestellten Aufgabe: Man zeige, dass ein Abstandsverbot bei der linearen Diffusion zweier Partikel eine zeitliche Zunahme der Distanz bewirkt.

Wir betrachten zwei längs einer Geraden G diffundierende Partikel A und B. Die lineare Diffusion von A allein oder von B allein sei auf G homogen und kräftefrei, so dass die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Verschiebung ξ nach Ablauf der Zeit T gegeben ist durch

$$1. \quad \omega\,[\xi, T] = \frac{1}{2\sqrt{\pi\, DT}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4\,DT}}$$

für jeden Punkt auf G als Anfangsort.*)

D ist der sogenannte Diffusionskoeffizient.

Es wird nun eine gegenseitige Störung der Partikel A und B angenommen, indem der Doppelbewegung die Bedingung auferlegt wird, dass eine gegebene Distanz λ nicht erreicht werden darf. (Distanzverbot!)

Die Koordinaten von A und B nach der Zeit T sollen mit $x(T)$ und $y(T)$ bezeichnet werden.

Es ist keine Einschränkung, anzunehmen, dass

2. $x(0) = a;\ y(0) = -a;$

ist. Die Wirkung des Distanzverbotes auf den Diffusionsvorgang der Partikel wird in zwei getrennten Fällen völlig verschieden ausfallen. Nämlich:

1. Fall:

$$a \geqq \frac{\lambda}{2}$$

Das Distanzverbot wird ersetzt durch die Forderung:

Die Partikel A und B dürfen eine feste Distanz λ nie überschreiten.

---

*) Einstein: Ann. der Physik 17.558, 1905.

2. Fall:

$$\alpha \leqq \frac{\lambda}{2}$$

Das Distanzverbot analog ersetzt:

Die Partikel A und B dürfen eine feste Distanz λ nie unterschreiten.

Die Beeinflussung des Diffusionsvorganges durch die Forderungen des 1. Falles bezw. des 2. Falles muss dem Wesen nach als Abstossungs- bezw. Anziehungstendenz gewertet werden.

Eine ungenaue physikalische Interpretation des 1. Falles könnte eine gegenseitige Abstossungskraft annehmen, welche erst dann (stark) wirksam wird, wenn die Distanz der beiden Partikel den Wert λ unterschritten hat.

Es bezeichne

1. Fall: $W_1 [x, y, T, \alpha]$ $\quad \alpha \geqq \frac{\lambda}{2}; \quad x - y \geqq \lambda;$

2. Fall: $W_2 [x, y, T, \alpha]$ $\quad \alpha \leqq \frac{\lambda}{2}; \quad |x - y| \leqq \lambda$

die Wahrscheinlichkeitsdichte des Ereignisses

$$x(T) = x; \quad y(T) = y;$$

das heisst

$$W_1 [x, y, T, \alpha]\, d x\, d y$$

$$W_2 [x, y, T, \alpha]\, d x\, d y$$

sei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

$$x \leqq x(T) < x + d x; \qquad y \leqq y(T) < y + d y$$

ausfällt.

Wären beide Partikel A und B frei beweglich, so würde man wegen der Unabhängigkeit der beiden Vorgänge den Produktsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung anwenden, und mit Rücksicht auf 1 und 2 erhalten:

$$3.\quad W_1^0 [x, y, T, \alpha] = \frac{1}{4 \pi DT}\, e^{-\frac{(x - \alpha)^2 + (y + \alpha)^2}{4 DT}}$$

und ebenso

$$4.\quad W_2^0 [x, y, T, \alpha] = \frac{1}{4 \pi DT}\, e^{-\frac{(x - \alpha)^2 + (y + \alpha)^2}{4 DT}}$$

(Die Wahrscheinlichkeitsdichten für die freie Diffusion der Partikel sind durch eine 0 gekennzeichnet.)

Die beiden Funktionen W_1^0 und W_2^0 genügen der bekannten Differentialgleichung

$$5.\quad \frac{\partial W}{\partial T} = D \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right\}$$

der Wärmeleitung in zwei Dimensionen.*)

Betrachten wir einen Partikel C, dessen Koordinaten bezüglich eines ge-

*) Riemann-Weber: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, von Ph. Frank, Bd. II, S. 196

wählten ebenen orthogonalen Koordinatensystems im Zeitpunkt T gegeben sind durch x(T) und y(T), so liefert der eindimensionale Diffusionsvorgang der beiden Partikel A und B einen Diffusionsvorgang des Partikels C in der Ebene, und umgekehrt.

In der Tat ist 5 die Differentialgleichung für die ebene homegene und freie Diffusion.

Bei dieser Interpretation erfährt das Abstandsverbot eine einfache geometrische Deutung.

In der Ebene darf der Partikel C im 1. Fall nie in die Halbebene $x-y < \lambda$, im 2. Fall nie in die Halbebenen $x-y > \lambda$, $y-x > \lambda$ eindringen.

Die Grenzgeraden $x-y = \lambda$ und $y-x = \lambda$ sind in den beiden Problemen der ebenen Diffusion, die sich nun bieten, als sogenannte „reflektierende" Gerade aufzufassen.

Damit ist der Zusammenhang gefunden mit den durch die Spiegelungsmethode gelösten Problemen der freien Diffusion bei reflektierenden Wänden. **)

Die Wahrscheinlichkeitsdichten W_1 und W_2 sind nun Integrale der Diffusionsgleichung 5, wobei folgende Randbedingungen erfüllt sein müssen:

1. Fall $\frac{\partial W_1}{\partial x} = \frac{\partial W_1}{\partial y}$ auf der Geraden $x - y = \lambda$

2. Fall $\frac{\partial W_2}{\partial x} = \frac{\partial W_2}{\partial y}$ auf den Geraden $\left\{\begin{array}{l} x-y=\lambda \\ y-x=\lambda \end{array}\right.$

Diese Randbedingungen fordern, dass längs einer reflektierenden Geraden die Normalkomponente des Wahrscheinlichkeitsgradienten verschwindet. *)

Für die gesuchten Wahrscheinlichkeitsdichten ergeben sich die Ausdrücke:

$$6.\ W_1[x, y, T, a] = \frac{1}{4\pi DT}\left\{ e^{-\frac{(x-a)^2 + (y+a)^2}{4\,DT}} + e^{-\frac{(x-\lambda+a)^2 + (y+\lambda-a)^2}{4\,DT}} \right\}$$

$$7.\ W_2[x, y, T, a] =$$
$$\frac{1}{4\pi DT}\sum_{-\infty}^{\infty}{}_K \left\{ e^{-\frac{(x-2K\lambda-a)^2 + (y+2K\lambda+a)^2}{4\,DT}} + e^{-\frac{(x-(2K+1)\lambda+a)^2 + (y+(2K+1)\lambda-a)^2}{4\,DT}} \right\}$$

Für die folgenden Ausführungen spezialisieren wir die Anfangsbedingungen, indem im 1. Fall $a = \frac{\lambda}{2}$, im 2. Fall $a = 0$ gesetzt wird.

Die Wahrscheinlichkeitsdichten 6. und 7. erfahren dadurch die Vereinfachungen.

$$8.\ W_1\left[x, y, T, \frac{\lambda}{2}\right] = \frac{1}{2\pi DT}\, e^{-\frac{(x-\frac{\lambda}{2})^2 + (y+\frac{\lambda}{2})^2}{4\,DT}}$$

**) R. Fürth: Neuere Untersuchungen über die Brownsche Bewegung. Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik, 16 (1920), S. 321.

*) Vergl. Riemann-Weber, a. a. O. S. 231.

$$9.\ W_2[x, y, T, 0] = \frac{1}{4\pi DT} \sum_{-\infty}^{\infty}{}_K\, e^{-\frac{(x - K\lambda)^2 + (y + K\lambda)^2}{4DT}}$$

Es bedeutet α (T) die Partikeldistanz x(T) — y(T).
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

$$\alpha \leqq \alpha(T) < \alpha + d\alpha$$

ist, werde bezeichnet im 1. Fall mit $\Theta_1[\alpha, T]\, d\alpha$,
im 2. Fall mit $\Theta_2[\alpha, T]\, d\alpha$.

Es ist dann

$$\Theta_1[\alpha, T] = \begin{cases} 0 & [\alpha < \lambda]; \\ \int\int W_1[x, y, T, \frac{\lambda}{2}]\, dx\, dy & [\alpha \geqq \lambda]; \end{cases}$$

$$\Theta_2[\alpha, T] = \begin{cases} 0 & [|\alpha| > \lambda]; \\ \int\int W_2[x, y, T, 0]\, dx\, dy & [|\alpha| \leqq \lambda]; \end{cases}$$

wo die Integration über das Streifgebiet

$\alpha \leqq x - y < \alpha + d\alpha$ zu erstrecken ist.

Nach Transformationen der Variabeln:

$$\alpha = x - y$$
$$\beta = x + y$$

gewinnt man

$$\Theta_1[\alpha, T] = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} W_1[\frac{\beta+\alpha}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2}, T, \frac{\lambda}{2}]\, d\beta \end{cases}$$

$$\Theta_2[\alpha, T] = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} W_2[\frac{\beta+\alpha}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2}, T, 0]\, d\beta \end{cases}$$

Nach Durchführung der Integration erhält man

$$10.\ \Theta_1[\alpha, T] = \begin{cases} 0 & \alpha < \lambda \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi DT}}\, e^{-\frac{(\alpha - \lambda)^2}{8DT}} & \alpha \geqq \lambda \end{cases}$$

$$11.\ \Theta_2[\alpha, T] = \begin{cases} 0 & |\alpha| > \lambda \\ \frac{1}{\sqrt{8\pi DT}} \sum_{-\infty}^{\infty}{}_K\, e^{-\frac{(\alpha - 2K\lambda)^2}{8DT}} & |\alpha| \leqq \lambda \end{cases}$$

Beachtenswert ist die asymptotische Beziehung:

$$12.\ \lim_{T \to \infty} \Theta_2[\alpha, T] = \frac{1}{2\lambda}.$$

Wir berechnen noch den Erwartungswert α^0 (T) der Distanz zur Zeit T im 1. Fall.

(Der genannte Wert ist im 2. Falle O und ohne weitere Bedeutung.)

Zunächst ist

$$\alpha^0 (T) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta_1 [\alpha, T] \, \alpha \, d\alpha = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(\alpha - \lambda)^2}{8 DT}}}{\sqrt{2 \pi DT}} \, \alpha \, d\alpha$$

Man erhält:

13. $\alpha^{\prime} (T) = \lambda + \sqrt{\frac{8 DT}{\pi}}$

Bei ungestörter Diffusion beider Partikel wäre der Erwartungswert der Distanz konstant und gleich λ.

Das Resultat 13. zeigt, dass das Distanzverbot im 1. Falle eine zeitliche Zunahme dieses Erwartungswertes bewirkt.

Dadurch wird die abstossende Tendenz, welche dem Diffusionsvorgang durch das Verbot auferlegt wird, formelmässig erfasst.

Damit ist das Ziel der Untersuchung erreicht.