Ueber statistische Flächen- und Längenmessung

Autor(en): **Hadwiger, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1938)**

PDF erstellt am: **15.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-319390

H. Hadwiger

Ueber statistische Flächen- und Längenmessung

Das Verfahren, die Fläche eines ebenen Bereiches durch Gitterpunktsauszählung approximativ zu ermitteln, indem man den Bereich in einem hinreichend feinen quadratischen Gitter ausbreitet und die Zahl der zugedeckten Gitterpunkte zählt, ist allgemein bekannt. Bezeichnet a die Elementardistanz des verwendeten Gitters und N (a) die Zahl der bedeckten Gitterpunkte, so gilt

$$\lim_{a \to 0} N(a) \cdot a^2 = F, \quad F = \text{Fläche des Bereiches.}$$

Die Existenz des angeschriebenen Grenzwertes ist eine Folge der angenommenen Existenz des Jordanschen Flächeninhaltes des Bereiches. So zählte GAUSS[1]) in einem Kreise vom Radius 300, N(1) = 282 697. Der Flächeninhalt ist dagegen F = 282 743,34. Prinzipiell gesehen erscheint also der Flächeninhalt eines Bereiches darstellbar als Grenzwert empirisch unmittelbar feststellbarer Zahlen.

Der vorliegende Aufsatz handelt von der Möglichkeit, den Flächeninhalt eines ebenen zusammenhängenden Bereiches, sowie die Länge eines streckbaren Kurvenstückes als statistische Mittelwerte empirisch feststellbarer ganzer Zahlen darzustellen.

Um die Fläche F eines Bereiches zu ermitteln, dient die folgende Versuchsanordnung: Auf einer ebenen Tafel sei das quadratische Einheitsgitter markiert. Auf dieser Tafel wird der Bereich als starre dünne Platte allen möglichen Bewegungen unterworfen. Bei jeder Lage der Platte wird die Zahl der zugedeckten Gitterpunkte N ermittelt und schliesslich von allen Bedeckungszahlen der Mittelwert $\overline{N}$ berechnet. Dann gilt die Aussage:

A) Es ist $\overline{N} = F$, das heisst, die Fläche eines Bereiches ist gleich der mittleren Bedeckungszahl von Gitterpunkten im Einheitsgitter.

Um die Länge L eines streckbaren Kurvenstückes zu bestim-

[1]) Zitiert nach D. Hilbert-S. Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie. S. 29—30.

men, bewege man das starre Kurvenstück auf einer ebenen Tafel, die mit einer Schar paralleler und aequidistanter Geraden mit dem Abstand $\frac{2}{\pi}$ versehen ist. Man zähle die Zahl der Schnittpunkte S, die das Kurvenstück mit dem Geradengitter erzeugt, und ermittle den Mittelwert $\overline{S}$. Hier gilt:

B) Es ist $\overline{S} = L$, das heisst, die Länge eines Kurvenstückes ist gleich der mittleren Schnittpunktszahl im Geradengitter der Elementardistanz $\frac{2}{\pi}$.

Der Verfasser gestattet sich, hier eine ungefähre, aber anschauliche Darstellung zweier Teilergebnisse seiner Abhandlung: „Ueber Mittelwerte im Figurengitter“ [2]) zu geben. Die exakte Formulierung der beiden Mittelwertssätze A) und B) muss natürlich eine mathematisch fassbare Gestalt annehmen. In der erwähnten Arbeit werden die zu den oben anschaulich beschriebenen Mittelwertsbildungen erforderlichen Masse für Bewegungsmengen als Integrale über die kinematische Dichte von POINCARE [3]) definiert. Die Herleitung der Sätze führt auf die kinematische Hauptformel der ebenen Integralgeometrie, die bei den allgemeinen Voraussetzungen ziemlich tief liegt. Es soll nun nicht weiter auf die exakte Herleitung der Sätze A) und B) eingegangen werden, sondern wir wollen zeigen, wie sich diese Resultate auf einfache und anschauliche Weise plausibel machen lassen.

Wenn B ein einfach zusammenhängender Bereich und O ein streckbares Kurvenstück ist, so bezeichne $\overline{N}^{\mathrm{I}}$ (B) und $\overline{S}^{\mathrm{I}}$ (O) bzw. $\overline{N}$ (B) und $\overline{S}$ (O) die mittlere Bedeckungszahl durch B und die mittlere Schnittpunktszahl O, wenn alle Translationen bzw. alle Bewegungen zugelassen werden. Die symbolischen Beziehungen $B = B_1 + B_2$ bzw. $O = O_1 + O_2$ sollen bedeuten, dass sich der Bereich B in die beiden Teilbereiche B_1 und B_2 zerlegen lässt, bzw. das Kurvenstück O in die Stücke O_1 und O_2.

Es bezeichnen noch R den quadratischen Einheitsbereich im Punktgitter und K die Kreislinie vom Umfang 2. Wir stellen nun vier Forderungen auf, deren Gültigkeit als sehr plausibel bezeichnet werden darf:

---

[2]) Comment. Math. Helv. 11, (1939).

[3]) Vergl. W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie, 1. Heft, 2. Auflage. (1936), § 9.

I) $\overline{N}^{\mathrm{I}}(R) = 1$
II) $\overline{S}(K) = 2$
III) $\overline{N}^{\mathrm{I}}(B_1 + B_2) = \overline{N}^{\mathrm{I}}(B_1) + \overline{N}^{\mathrm{I}}(B_2)$
IV) $\overline{S}(O_1 + O_2) = \overline{S}(O_1) + \overline{S}(O_2)$

Da R immer genau einen Gitterpunkt bedeckt und K, dessen Durchmesser $\frac{2}{\pi}$ ist (Elementardistanz des Geradengitters) immer genau zwei Schnittpunkte aufweist (von speziellen Grenzlagen abgesehen, die die Mittelwertsbildung nicht beeinflussen), bestehen die Forderungen I) und II) zurecht. Die Forderungen III) und IV) sind plausibel, da die Bedeckungszahl bzw. die Schnittpunktszahl der Urfigur in jeder Lage gleich der Summe der entsprechenden Zahlen der Teilfiguren ist, und Urfigur und Teilfigur die gleiche Bewegungsgruppe durchlaufen. Es sollen nun die Mittelwertssätze A) und B) aus diesen Forderungen abgeleitet werden, die, was der besonderen Beachtung empfohlen wird, die fehlende exakte Definition der zu ermittelnden Funktionen $\overline{N}(B)$ und $\overline{S}(O)$ ersetzen.

Ist R_n ein Quadrat der Seitenlänge $\frac{1}{n}$ das zu R parallel orientiert ist, so folgt zunächst nach III)

$$\overline{N}^{\mathrm{I}}(R) = n^2\, \overline{N}^{\mathrm{I}}(R_n),$$

und mit Hinblick auf I)

$$\overline{N}^{\mathrm{I}}(R_n) = \frac{1}{n^2}.$$

Ist nun B^0 ein Bereich, der sich in m Bereiche R_n zerlegen lässt, so ist wieder wegen III)

$$\overline{N}^{\mathrm{I}}(B^0) = m\, \overline{N}^{\mathrm{I}}(R_n) = \frac{m}{n^2} = \text{Fläche von } B^0.$$

Da sich nun ein beliebiger Bereich B der Fläche F durch Bereiche B^0 bei ausreichend grossem n beliebig genau approximieren lässt, gilt offenbar

$$\overline{N}^{\mathrm{I}}(B) = F.$$

Wir notieren uns dieses unterwegs erhaltene Resultat:

Wird im quadratischen Einheitsgitter ein Bereich allen Translationen unterworfen, so ist die mittlere Zahl der bedeckten Gitterpunkte gleich der Fläche des Bereiches.

Als einfache Folgerung ergibt sich noch ein von BLICH-

FELDT[4]) gefundener Satz, der besagt, dass sich ein ebener Bereich immer so im Einheitsgitter parallel verschieben lässt, dass die Zahl der bedeckten Gitterpunkte die grösste ganze Zahl, die nicht grösser als die Fläche ist, übertrifft.

Da nun der Translationsmittelwert $\overline{N}^{\prime}$ (B) eine Abhängigkeit von B zeigt, die bei einer Drehung von B invariant bleibt, so muss der Bewegungsmittelwert gleich ausfallen. Damit haben wir die Aussage A) gewonnen, wonach

$\overline{N}\ (B) = F$ ist.

In analoger Weise gewinnen wir B). Wenn der Kreisbogen K_n der n.te Teil des Kreises K ist, so wird nach IV)

$$\overline{S}\ (K) = n\ \overline{S}\ (K_n)$$

oder wegen II)

$$\overline{S}\ (K_n) = \frac{2}{n}$$

Ist O^0 ein Kurvenstück, das sich in m Bögen K_n zerlegen lässt, so ist wieder nach IV)

$$\overline{S}\ (O^0) = m \,.\, \overline{S}\ (O_n) = \frac{2m}{n} = \text{Länge von } O^0 .$$

Nun kann man ein beliebig streckbares Kurvenstück O der Länge L durch Kurvenstücke O^0 bei ausreichend grossen n beliebig genau approximieren, so dass

$\overline{S}\ (O) = L$ sein wird.

Der benutzte Schluss macht das Resultat nur plausibel, beweist es aber nicht. In der Tat brauchen die Schnittpunktszahlen von O^0 und O nicht nahe beieinander zu liegen, obschon O durch O^0 gut approximiert wird. Die angedeuteten Schwierigkeiten sind bei strenger Behandlung ähnlicher Probleme keineswegs harmlos[5]), und beruhen auf den schwachen Voraussetzungen, die man über die verwendbaren Kurven getroffen hat.

Gestützt auf die beiden Mittelwertssätze A) und B) kann nun eine statistische Flächen- und Längenmessung vorgenommen wer-

---

[4]) Blichfeldt, Transactions of the American Mathematical Society 15, 227—235 (1914). Einen kurzen Beweis gab auch W. Scherrer, Math. Ann. 86, 106—107, (1922).

[5]) Vergl. hierzu: W. Maak, (Integralgeometrie 27), Ueber stetige Kurven. Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hansischen Universität, 12. Bd., 163—178, (1938).

den. P. GLUR[6]) hat in diesem Sinne Versuche angestellt, und die Resultate zweier Versuchsreihen sollen hier mitgeteilt werden.

I) Der Bereich ist ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck der Fläche $F = 50$. (Kathetenlänge 10).

Das Dreieck (Horndreieck) wurde 150 mal auf das Einheitsgitter geworfen. Die festgestellten Bedeckungszahlen N sind in der nachfolgenden Tabelle eingetragen.

50	46	51	52	52
50	51	50	49	50
50	50	50	50	50
49	50	53	52	51
49	50	55	47	50
49	51	47	51	50
51	50	52	50	50
50	56	49	51	55
49	47	51	50	48
51	50	50	50	46
50	52	50	47	50
50	53	51	50	51
50	51	50	47	50
50	52	51	52	51
51	51	50	50	48
50	51	55	52	54
50	50	50	50	51
45	50	50	51	50
50	50	49	50	50
50	50	51	52	51
51	51	50	50	51
52	52	50	50	49
51	50	47	51	49
51	53	49	50	50
52	51	50	50	50
51	50	50	52	49
47	49	50	51	46
49	51	49	53	49
49	51	51	49	51
52	51	49	50	49

Es ist $\sum N = 7539$,

und $\bar{N} = \dfrac{\sum N}{150} = 50{,}260.$

[6]) Mathematisches Seminar der Universität Bern, 1938.

II) Das Kurvenstück ist der Rand des bei I) verwendeten Dreiecks. Die Länge ist $L = 34,142$.

Das Dreieck wurde ebenfalls 150 mal auf das Geradengitter der Elementardistanz $\frac{2}{\pi} = 0,6366$ geworfen, und dabei die in untenstehender Tabelle eingetragenen Schnittpunktszahlen S festgestellt.

46	24	30	42	38
42	28	44	40	36
28	44	28	40	44
46	32	44	32	30
44	28	42	36	30
26	44	46	34	44
38	24	28	42	30
26	42	44	24	44
32	30	32	44	44
44	32	28	32	44
44	30	40	44	24
34	30	36	30	24
30	26	38	42	32
44	34	32	32	24
26	42	30	42	30
28	40	32	44	32
42	32	22	34	24
28	34	30	40	28
38	28	44	44	42
28	30	32	34	30
30	36	30	26	38
42	40	30	24	30
44	32	44	38	36
30	26	28	38	30
30	24	30	26	30
26	42	26	24	26
30	44	38	44	30
32	28	32	26	44
44	38	30	30	40
24	30	38	40	44

Es ist $\sum S = 5158$,

$$\overline{S} = \frac{\sum S}{150} = 34,387.$$