Symmetrie und Form

Autor(en): **Nowacki, Werner**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1940)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-319395

Werner Nowacki

Symmetrie und Form[1]

Motto:

Lass die Moleküle rasen,
was sie auch zusammenknobeln!
Lass das Tüfteln, lass das Hobeln,
heilig halte die Ekstasen.

Chr. Morgenstern.
(Galgenlieder).

Nimmt man den Parmenideskommentar von A. SPEISER[2]) zur Hand, den Kommentar zu jenem Dialog PLATOS, der beim ersten Lesen einen so „abstrusen" Eindruck erweckt, der aber wohl von den letzten Dingen, von Gott, der Wirklichkeit und dem Schein handelt, den Kommentar, welcher 1928 an Bord der „Vienna" im Anblick der griechischen Küste in Gemeinschaft mit WOLFGANG GRAESER[3]) entstanden ist, wird man vielleicht erstaunt sein, an zwei Stellen dem Worte Kristallographie bzw. Kristallstruktur (S. 33) zu begegnen. Diese Begegnung ist nicht von ungefähr und hat ihren sehr tiefliegenden Grund darin, dass sowohl in der platonischen Philosophie wie in der Kristallographie der Begriff „Symmetrie" von grundlegender Bedeutung ist.

In der zweiten Position des Dialoges, der vom „Seienden Eins", der Wirklichkeit, handelt, steht in Nr. 15: „Das seiende Eins ist

[1]) Antrittsvorlesung, Phil. Fak. II. Univ. Bern, 9. Dezember 1939. — Es war naturgemäss in einem einstündigen Vortrag unmöglich, die angeführten Probleme in irgendeiner Hinsicht erschöpfend zu behandeln. Es kam mir nur darauf an, die Bedeutung des Symmetriebegriffes für einige wichtige, scheinbar weit auseinanderliegende Gebiete hervorzuheben.

[2]) A. Speiser, Ein Parmenideskommentar. Studien zur platonischen Dialektik. K. F. Koehler, Leipzig, 1937.

[3]) A. Speiser, Wolfgang Graeser. Neue Zürcher Zeitung, 19. Juni 1928, Nr. 1122.

eine unbegrenzte Menge. — Die beiden Teile des seienden Eins entbehren des gegenseitigen Anteiles nicht. Das Eins besitzt das Sein und ebenso besitzt das Sein auch das Eins. Jeder der beiden Teile enthält also wieder das Eins und das Sein, jeder ist zusammengesetzt aus mindestens zwei Teilen. Nach demselben Gesetz, sobald ein Teil wird, enthält er dieses Paar von Teilen, denn das Eins schliesst immer das Sein in sich und das Sein das Eins. So wird es notwendig immer Zwei und ist niemals Eins. In dieser Weise ist das seiende Eins unbegrenzt an Menge."

SPEISER fügt als Anmerkung hinzu: „Das seiende Eins ist nicht mehr einfach, sondern es ist ein Ganzes mit zwei Teilen, eine Menge mit zwei Elementen. Aber die beiden Teile sind ununterscheidbar; denn das Eins ist dasjenige unserer Position und nicht etwa das absolute Eins, es ist das seiende Eins, ferner ist das Sein seiner Natur nach nicht separierbar, sondern es ist Sein eines Eins, also ein Eins-Seiendes. Das seiende Eins und das Eins-Seiende sind aber gleich. So ist das erste Auftreten der Trennung, ihre oberste Kraft, ein Wesen, das zwei völlig ununterscheidbare Seiten hat. Man denke etwa an ein Blatt Papier, dessen beide Seiten absolut gleich sind, oder an einen vollkommenen Würfel. Aber auch diese räumlichen Bilder enthalten schon zu viel Verschiedenheit, denn nach Plato sind die beiden Elemente selber mit dem Ganzen gleich, jedes ist wieder ein Ganzes mit zwei Elementen, und so geht es weiter ins Unbegrenzte..."

Nr. 25 derselben Position erläutert die Begriffe „Gleichheit" und „Verschiedenheit". SPEISER kommentiert: „Ein zeitlich seiendes Ding bedarf der Gleichheit, welche seine Einheit während der Zeit wahrt. Die Gleichheit ist daher in einem solchen Eins oder anders ausgedrückt, das Eins erleidet die Gleichheit. Plato schliesst nun sophistisch, indem er ausnützt, dass auf griechisch die Gleichheit und das Gleiche durch denselben Ausdruck wiedergegeben wird: die Verschiedenheit kann nicht in dem gleichen Ding sein, weil sie sonst in der Gleichheit wäre. Es ist aber klar, und Plato sagt das auch früher (unter a und b), dass sehr wohl dasselbe Ding mit Gleichheit und Verschiedenheit qualifiziert werden kann.

Trotzdem glaube ich nicht, dass Plato dieses Spiel ohne Grund macht. Es ist sehr wahrscheinlich, dass er wirklich eine Sphäre aufgestellt hat, bei der die Eins so mit der Gleichheit verhaftet sind, dass sie die Verschiedenheit nicht aufnehmen. Wir haben gleich zu Anfang dieser Position gesehen, dass das seiende Eins eine Symmetrie enthält, welche zur sukzessiven Verdoppelung geführt hat, dass aber hier die Verschiedenheit noch nicht herangezogen ist, wie das bei der Kristallstruktur auch richtig ist..."

Bildlich können wir die Stelle so erklären: für „Eins" setzen wir einen Punkt, für „Sein" setzen wir auch einen Punkt und unterscheiden diese beiden Punkte n i c h t, da sie mit der Gleichheit behaftet sein sollen. Wir bezeichnen sie demnach als zwei nebeneinandergesetzte Punkte und vervielfachen sie gemäss der innewohnenden Symmetrie. Auf diese Weise erhalten wir ein kristallographisches Punktgitter, in welchem die Gitterpunkte symmetrisch gleich sind, während sie auf einer anderen Stufe der Betrachtungsweise, z. B. bezüglich ihrer Koordinaten, verschieden sind.

Für die pythagoräische Schule und PLATO[4]) sind die Begriffe „Symmetrie", „Form" und „Harmonie" von einer Bedeutung, wie wir sie uns heute kaum mehr vorstellen können. Treffender und eindringlicher, als dies E. FRANK in seinem Buch über „Plato und die sogenannten Pythagoreer" (1. c.) geschildert hat, kann man es kaum tun, weshalb ich daraus zitiere (S. 95/96): „In diesem Zahlenverhältnis (*λόγος*), in der ‚Harmonie' der Teile besteht für Demokrit wie Empedokles das eigentliche ‚Sein', die ‚Idee' (Form) des Dinges. Sogar die Beschaffenheit der Seele ist im Grunde von dem Verhältnis abhängig, in dem die verschiedenen Atome in ihr gemischt sind. Ist dies Zahlenverhältnis ‚symmetrisch', dann ist unser Denken vernünftig, Lust und Schmerzgefühl im Gleichgewicht und wir haben dann jenes Bewusstsein innerer ‚Harmonie', in dem nach Demokrit alles wahre Glück besteht. Denn nach Zahl und Mass, nach Symmetrie und Harmonie geht der innerste Trieb aller Naturkräfte. Zahl ist das, was die Welt eigentlich zusammenhält und was ihren Gebilden jene wunderbare Schönheit und Vollkommenheit verleiht, die sich überall offenbart, ob wir nun auf die Himmelskugel oder auf die Wunder im kleinsten Lebewesen und Atom blicken. Diese Symmetrie ist nach Demokrit auch das Wesen dessen, was wir Menschen das Schöne (*τὸ καλόν*) und das Gute (*τὸ εὖ*) nennen.

[4]) E. Frank, Plato und die sogenannten Pythagoreer. Ein Kapitel aus der Geschichte des griechischen Geistes. M. Niemeyer, Halle a. S., 1923.

Daher werden wir nur dann glücklich werden, das höchste Gut und das letzte Ziel alles Seins erreichen, wenn wir diesem den Dingen eingeborenen Drange zur Zahlenharmonie auch in unserem eigenen Leben folgen und ihr Gesetz uns zur Norm machen. Auf diese Weise wird die mathematische ‚Symmetrie' für Demokrit der oberste Grundsatz auch der Ethik. Indem die Naturwissenschaft in der Einfachheit und Harmonie der Zahlenverhältnisse das tiefste Wesen der Natur erkennt, weist sie uns damit den Weg zum wahren Glück, und so wird die ‚Physik' zugleich zur eigentlichen ‚Weisheit' (*σοφία*)."

Wem ob solcher Verherrlichung der Zahl bangt, möge sich an jene berühmten Worte des 7. Briefes von PLATO über das letztlich Wesentliche erinnern (zit. nach E. HOWALD[5]), S. 91): „Von mir wenigstens gibt es keine Schrift darüber und wird es sicher auch nie eine geben; denn das lässt sich nicht in Worte fassen wie andere Wissenschaften, sondern wenn man sich gerade damit beschäftigt und sich vertraut gemacht hat, entsteht es plötzlich wie ein Feuer, das von einem springenden Funken entfacht wird, in der Seele und von nun an nährt es sich weiter." (Vgl. das Motto von Chr. Morgenstern!)

Das Vorwort des Parmenideskommentar von A. SPEISER beginnt mit den Worten: „Unter den Dialogen Platos nimmt der Parmenides eine analoge Stellung ein, wie die Kunst der Fuge in Johann Sebastian Bachs Kompositionen;..." Damit betreten wir das Reich der Musik, einer Musik, welche von den skizzierten Vorstellungen durch eine Zeitspanne von 2000 Jahren getrennt ist und dennoch finden wir hier grundsätzlich dasselbe: einen besseren Beweis für die ewige Gültigkeit der wirklich wesentlichen Gedanken und Gefühle der Menschen lässt sich nicht vorbringen!

Musik war für die Pythagoräer neben Arithmetik, Geometrie und Astronomie eine der Wissenschaften par excellence. Die Beziehungen zur Mathematik waren ihnen, den Schöpfern der Harmonie der Sphären, ebenso geläufig und natürlich wie vielen heutigen Musikern dies nicht ist. Doch gibt es auch heute noch, oder vielleicht besser gerade heute wieder Musiktheoretiker, welche diese Beziehungen zu den wesentlichen Dingen rechnen. Einer

[5]) E. Howald, Die Briefe Platons. Seldwyla Zürich, 1923.

unter ihnen war WOLFGANG GRAESER [6]). — Wenn etwa die Frage gestellt wird, ob das 20. Jahrhundert ein Genie erzeugt habe, so kann man wohl auf diesen Jüngling weisen, der in den Gebieten der Philosophie, Mathematik, Musiktheorie und ostasiatischen Sprachen gleicherweise zu Hause und schöpferisch tätig war. Es ist die Tragik dieser strahlenden Erscheinung, dass sie den Jugendstürmen nicht gewachsen, mit 22 Jahren wieder ins Dunkel versank.

Die geniale Leistung WOLFGANG GRAESERs ist seine Wiedererweckung der „Kunst der Fuge", BACHs letztem Werke, [7]) welches in den Jahren 1749—1750 entstanden ist.

Die „Kunst der Fuge" besteht aus 19 Einzelfugen, deren letzte unvollendet geblieben ist. Schon die Zeitgenossen BACHs standen dem Werk ziemlich verständnislos gegenüber. Man betrachtete es als ein abstraktes theoretisches Lehrwerk, in dieser Meinung durch die Tatsache bestärkt, dass es gänzlich ohne Instrumentierung geschrieben worden war. Ein nicht sehr erlauchter Geist bezeichnete es sogar als „kontrapunktische Katzenmusik"! PHILIPP EMANUEL BACH schrieb die Kupferplatten zum Verkauf als Altmetall aus! Da BACH niemanden in die Geheimnisse seiner letzten Schöpfung eingeweiht hatte, wurden die einzelnen Fugen schon während des Druckes durcheinander gebracht, was ihr Verständnis natürlich nicht erhöhte. So blieb die „Kunst der Fuge" während beinahe 175 Jahren im wesentlichen unbeachtet liegen, bis der 17jährige WOLFGANG GRAESER im Sommer 1923 ihr begegnete und sogleich von ihr aufs stärkste gefesselt wurde. Die Ergebnisse seiner tiefgreifenden Studien legte er im „Bach-Jahrbuch 1924" (1. c.) nieder.

[6]) H. Zurlinden, Wolfgang Graeser. C. H. Beck, München, 1935, und A. Speiser ([3]).

[7]) Joh. Seb. Bachs Werke (XLVII, Supplementband), Die Kunst der Fuge, 1750. In ihrer ursprünglichen Form wiederhergestellt und von neuem herausgegeben durch Wolfgang Graeser. Breitkopf & Härtel, Leipzig, 1926.

Joh. Seb. Bachs Werke, Die Kunst der Fuge, 1750. In der Neuordnung von W. Graeser. Veröff. der Neuen Bachgesellschaft, Jahrg. XXVIII, H. 1. Breitkopf & Härtel, Leipzig, 1927. (Kl. Handaugabe).

W. Graeser, Bachs „Kunst der Fuge". Bach-Jahrbuch, 21. Jahrg. 1924. Breitkopf & Härtel, Leipzig, S. 1—104. — Weitere Publikationen von W. G.:

W. Graeser, Körpersinn. Gymnastik — Tanz — Sport. C. H. Beck, München 1930.

Nach GRAESER ist die „Kunst der Fuge“ eine einzige Riesenfuge, gebaut aus einem einzigen „Thema“. In seiner Originalarbeit hat GRAESER den Bau der „Kunst der Fuge“ bildlich darzustellen versucht, indem er jede Fuge durch einen Bogen, eine Fuge mit dem Thema rectum mit einem nach oben gewölbten Bogen, eine Fuge mit dem Thema inversum mit einem nach unten gewölbten Bogen beschrieb. Bei dieser Darstellung wird sogleich die eminent symmetrische Anordnung der einzelnen Fugen erkennbar; in der Mitte die grosse Symmetrieebene, welche die Fugen I—XI von den Fugen XII—XIX scheidet. Es war also das Symmetrieprinzip, welches GRAESER u. a. benutzte, um in die durcheinander geratenen Einzelfugen Klarheit und Licht zu bringen. — Das „Thema“ der „Kunst der Fuge“ — von allen Variationen befreit — besteht für GRAESER aus sechs, wieder symmetrisch angeordneten Noten:

H. ZURLINDEN, von dem eine sehr schöne Biographie über WOLFGANG GRAESER stammt (l. c.), sagt hierüber (S. 40): „In dieser denkbar einfachsten Zauberformel, in der all das seltsam Unwirtliche, Herbstliche dieser Harmonik beschlossen ist, sah er (Graeser) etwas wie die Idee des Themas im platonischen Sinne. Alle im Werke vorkommenden Themen, selbst die Nebenthemen, sind Abbilder dieser vollkommen abstrakten Formel, die in der unvollkommenen Realität keine Existenzmöglichkeit besitzt. So ist die ‚Kunst der Fuge‘ ein Kosmos, ein Universum, das aus der Emanation dieser Idee entstanden ist.“

Nach dieser genialen Leistung GRAESERs blieb noch die Instrumentierung der „Kunst der Fuge“ auszuführen übrig. Zusammen mit Professor STRAUBE in Leipzig gelang die Lösung. „Am 26. Juni 1927 wurde die ‚Kunst der Fuge‘ unter seiner Leitung uraufgeführt. Es war ein grosses Bachfest, feierlich in der Bedeutung, dass hier ein Meisterwerk, bis jetzt entstellt, vergessen, missdeutet und verkannt, nachträglich mit allen Ehren an den ihm gebührenden Platz eingesetzt wurde. Die alte ehrwürdige Thomaskirche stand im Zeichen einer Königskrönung.“ (H. ZURLINDEN, l. c., S. 51).

Mag auch Kritik an Einzelheiten oder sogar an der Konzeption des Aufbaues nach der Bearbeitung durch GRAESER geübt werden,[8]) so bleibt ihm dennoch das unsterbliche Verdienst, die „Kunst der Fuge“ wieder zum Leben erweckt, die Bedeutung der ihr innewohnenden Symmetrie erkannt und ihre Instrumentierung vollbracht zu haben.

Auf den S. 23—25 seiner Arbeit im „Bachjahrbuch“ deutet W. GRAESER auf ausserordentlich interessante Beziehungen zwischen Musik und G e o m e t r i e hin, auf welche wir, da sie uns auch sogleich zur Kristallographie, Ornamentik und Architektur führen werden, noch etwas näher eingehen wollen. Wir versuchen auf folgende Weise zwischen Musik und Geometrie eine „Abbildung“ herzustellen: 1. Die Stimmenzahl der Musik sei gleich der Dimensionszahl des Raumes der Geometrie (z. B. = 3); 2. Einem Ton entspreche ein Punkt; 3. Als „Thema“ oder festen „Tonkörper“ bezeichne man eine durch Veränderung der Tonhöhen entstandene Menge von Tönen. Ihm entspricht ein geometrischer fester Körper, als einer durch Veränderung der Koordinaten entstandenen Menge von Punkten; 4. Auf diesen „Tonkörper“ werden nun in der Musik gewisse „Variationen“ oder anders ausgedrückt „Transformationen“ ausgeübt, welche den Transformationen unserer Geometrie entsprechen. Sie bilden eine Gruppe, Transformationsgruppe genannt; 5. Als „Durchführung“ bezeichnet man ein System von durch Transformationen auseinander hervorgehenden Tonkörpern (Themata). Ihr entspricht ein System von geometrischen Körpern; und 6. könnte man ein Fugenwerk mit mehreren Themata (Tonkörpern) als ein System von Durchführungen der Komposition mehrerer Systeme von geometrischen Körpern gegenüberstellen.

Etwas anschaulicher und für den Naturwissenschaftler verständlicher wird diese Zuordnung, wenn wir an Stelle der reinen Geometrie die K r i s t a l l o g r a p h i e herbeiziehen. Dem Ton würde ein Atom, dem Thema (= Tonkörper) die sogenannte Basis des Elementarparallelepipedes, den Variationen die Raumgruppe, der Durchführung das regelmässige Punktsystem der Atome und dem Fugenwerk als Ganzem die Komposition mehrerer regelmässi-

[8]) Joh. Seb. Bach, Die Kunst der Fuge. Herausgegeben von Hans Th. David. C. F. Peters, Leipzig, 1928.

ger Punktsysteme, d. h. die allgemeine Kristallstruktur entsprechen.[9])

Die Bedeutung des Symmetriebegriffes für die Naturwissenschaft, insbesondere die Kristallographie ist allgemein bekannt und anerkannt.[10]) Das von Kristallindividuum zu Kristallindividuum ein und derselben Kristallart Invariante ist die Gesamtheit derjenigen Symmetrieoperationen, welche den Kristall mit sich selbst zur Deckung bringen, das ist seine Kristallklasse. Unter der durch die Beobachtung bedingten Annahme, dass nur 1-, 2-, 3-, 4- und 6-zählige Symmetrieachsen vorkommen dürfen, hat schon 1830 J. F. C. HESSEL[11]) gezeigt, dass nur 32 verschiedene Kristallklassen auftreten können und in der Tat ist bis jetzt weder ein natürlicher noch ein künstlicher Kristall angetroffen worden, dessen Symmetrieelemente nicht einer der 32 Klassen gleich wäre. Die Mannigfaltigkeit der möglichen Symmetrieoperationen erhöht sich, wenn wir in das Kristallinnere, den atomaren Feinbau blicken. Unter der einzigen Annahme, dass die Atome (von endlicher Grösse) derart im Raume verteilt sind, dass jedes Atom gleich oder spiegelbildlich gleich wie jedes andere Atom umgeben sei, ist es möglich, mit einem Schlage — rein deduktiv — 219 wesentlich, d. h. ihrer Symmetrie nach verschiedene Atomkonfigurationen abzuleiten, sodass, wenn irgendwo in der Welt ein Stoff kristallisiert, seine innere Architektur durch eine dieser 219 Raumgruppen beherrscht wird.

Die Symmetrielehre hat sich auch den Konfigurationen endlicher, molekularer Art, welche Untersuchungsgegenstand der Chemie sind, mit grossem Erfolg bemächtigt, ist es doch beispielsweise

---

9) Näheres über „Formfragen in der Musik" z. B. in A. Speiser, Die mathematische Denkweise. Rascher, Zürich, 1932, S. 23—36; A. Speiser, Musik und Mathematik. 11 S. Basler Druck- und Verlagsanstalt, Basel 1926; weiter H. Kayser, Orpheus. Vom Klang der Welt. Morphologische Fragmente einer allgemeinen Harmonik. G. Kiepenheuer, Potsdam, 1926 (2. Kap. Vom Klang im Stein!); H. Kayser, Der hörende Mensch. Elemente eines akustischen Weltbildes. Berlin, L. Schneider, 1930; Darstellung eines optischen Weltbildes bei H. Friedmann, Die Welt der Formen. System eines morphologischen Idealismus. Gebr. Paetel, Berlin, 1925.

10) Vgl. auch: P. Niggli, Mineralogie und Technik. Schweiz. Bauzeitung, 1929.

11) J. F. C. Hessel, Kristallometrie. 1. Bd. Ostwalds Klassiker Nr. 88, Akadem. Verlagsgesellschaft m. b. H., Leipzig.

möglich geworden [G. POLYA, Z. Krist. (A) **93** (1936) 415], auf Grund der sogenannten „Symmetrieformel" die Isomerenanzahl organischer Verbindungen im voraus zu berechnen.

Ueber die grundlegende Rolle der Theorie der Gruppen und Symmetrien in der modernen Physik (Quantenmechanik der Atom- und Molekülspektren) sei nur dies gesagt: das Atom, aus einem als fixiert angenommenen Kern und N umgebenden Elektronen in Form von „Elektronenwolken" bestehend, weist zwei grundsätzlich wichtige Symmetrien auf. Erstens die Gruppe der Rotationen: zwei Stellungen der Elektronen, welche durch eine Drehung um den Kern — ähnlich der Drehung eines festen Körpers — auseinander hervorgehen, sind ununterscheidbar; zweitens die Gruppe der $(N!)$ Permutationen unter den N vorhandenen Elektronen: da die Elektronen alle gleich sind, kann man sie unter sich vertauschen, so dass zwei derart ineinander überführbare Elektronenkonstellationen wieder nicht unterschieden werden können. Diese beiden Tatsachen gestatten, die verwirrende Fülle der Spektrallinien erschöpfend zu überblicken. — Ein genaueres Studium wollen wir unterlassen, da es uns in allzu abstrakte Gefilde führen würde.

Hingegen kann man in diesem Zusammenhang unmöglich an der Erscheinung des Astronomen KEPLER und seiner Werke,[12]) deren neue Gesamtausgabe soeben zu erscheinen begonnen hat, vorübergehen. Für KEPLER war der Glaube an die Harmonie und Symmetrie der Welt oberstes Gesetz. Er schrieb [zit. nach A. SPEISER, 1. c. (12) S. 120]: „Die Erdbahn ist das Mass für die anderen Bahnen. Ihr umschreibe ein Dodekaeder; die dieses umspannende Sphäre

[12]) J. Kepler, Opera omnia. Ed. Chr. Frisch, 8 vol., Heyder & Zimmer, Frankfurt a. M. und Erlangen, 1858—1871.

J. Keplers Gesammelte Werke, hg. i. A. d. Dtsch. Forschungsgemeinschaft u. d. Bayer. Akad. d. Wiss. unter d. Leit. v. W. v. Dyck † und M. Caspar. C. H. Beck, München. — Bd. I, Mysterium cosmographicum. De stella nova. Hg. v. M. Caspar, 1938; Bd. II, Astronomiae pars optica. Hg. v. F. Hammer, 1939; Bd. III, Astronomia nova. Hg. v. M. Caspar, 1937.

J. Kepler, Das Weltgeheimnis. Mysterium Cosmographicum. Uebers. u. eingel. v. M. Caspar. R. Oldenburg, München und Berlin, 1936.

J. Kepler, Astronomia nova. Uebers. v. M. Caspar. R. Oldenburg, München.

A. Speiser, Die mathematische Denkweise. Rascher, Zürich, 1932 (S. 110 bis 135, Kepler und die Lehre von der Weltharmonie).

ist Mars. Der Marsbahn umschreibe ein Tetraeder; die dieses umspannende Sphäre ist Jupiter. Seiner Bahn umschreibe einen Würfel, die umspannende Sphäre ist Saturn. Nun lege in die Erdbahn ein Ikosaeder; die umschriebene Sphäre ist Venus. In die Venusbahn lege ein Oktaeder; die umschriebene Sphäre ist Merkur. Damit hast du den Grund für die Anzahl der Planeten." KEPLER baut also das Weltall aus der Kugel (der Erde) und den fünf regulären Polyedern, alles Körper von hoher Symmetrie, auf. Als er Einblicke in die Beobachtungen TYCHO BRAHES erhielt, sah er ein, dass er mit den Kreisbahnen nicht auskam und dass seine Ansichten geändert werden mussten. Statt nun aber zu Epizyklen zu greifen, was ihm wegen seines Glaubens an die Einfachheit und Harmonie der Weltgesetze widerstrebte, entdeckte er das erste der drei nach ihm benannten Gesetze für die Planetenbahnen, dass nämlich diese Bahnen Ellipsen sind. — Es ist demnach fraglos, dass der Glaube an die Weltharmonie KEPLER dazu geführt hat, seine grossartigen Entdeckungen zu machen.

Dasjenige Gebiet nun, in welchem die Symmetrien am unmittelbarsten und anschaulichsten zur Wirkung gelangen, ist — neben der Kristallographie — das der bildenden Künste, insbesondere der Malerei und Architektur.[13])

In der Malerei wiederum ist es die Ornamentik,[14]) die von der Symmetrielehre hervorragenden Gebrauch macht, und zwar brauchen wir uns, um dies zu erkennen, gar nicht hochentwickelten Kulturen zuzuwenden, sondern es genügt, auf die Kunst der Primitiven hinzuweisen. Es ist erstaunlich, in welchem Masse bei der Verzierung von Gefässen, Werkzeugen, Waffen, an Klei-

---

[13]) P. Niggli, Reine und angewandte Naturwissenschaft. Neue Schweizer Rundschau **22** (1929) 138.

P. Niggli, Naturwissenschaftliches und künstlerisches Gestalten. ib. **23** (1930) 812.

P. Niggli, Naturerkenntnis und Naturgestaltung. ib. [N. F.] **5** (1938) 601.

P. Niggli, Vom Geiste der Naturwissenschaften. 67. Jahrb. d. Ver. Schweiz. Gymnasiallehrer 1938, S. 11.

[14]) A. Speiser, Die mathematische Denkweise. Rascher, Zürich, 1932 (S. 15—22, über Symmetrien in der Ornamentik).

A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. 2. A., J. Springer, Berlin, 1927 (S. 1—4: Zur Vorgeschichte der Gruppentheorie, S. 77—98: Symmetrien der Ornamente).

H. Weyl, Symmetry. J. Washington Acad. Sci. **28** (1938) 253—271.

dungsstücken usw. Motive mit einem hohen Gehalt an Symmetrie, welche den Eindruck des Schönen erwecken, zur Verwendung gelangen. Die Tatsache, dass schon in den ersten Stadien menschlicher Entwicklung ein Streben nach Gestaltung einer symmetrischen Form zum Ausdruck kommt, beweist uns, dass wir es mit einem Etwas zu tun haben, welches tief in der menschlichen Seele verankert ist. — Nun hat uns die neuere Psychologie gelehrt, vieles aus der Anschauungswelt der Primitiven in den Träumen unserer heutigen „hochentwickelten" Menschen wiederzufinden. So beschreibt z. B. E. JUNG in dem Buche „Wirklichkeit der Seele" (Hrg. von C. G. JUNG; Rascher, Zürich, 1934 und 1939, S. 327) wie eine Frau, ganz von irrationalem Typus, als Darstellung unbewusster Inhalte „nur streng geometrische Figuren, lauter kristallartige Gebilde, wie man sie in Lehrbüchern der Geometrie oder der Mineralogie findet" zeichnete. Aus alledem ist erkenntlich, welche grundsätzliche Wichtigkeit den Symmetrien zukommt. — Die symmetrischen Figuren der Ornamente sind von zweierlei Art: entweder es sind endliche, in sich geschlossene Gebilde oder solche, welche sich nach ein oder zwei Richtungen ins Unendliche erstrecken, einen „unendlichen Rapport" aufweisen, wie der Fachausdruck lautet. Bei den ersteren sind als Symmetrieelemente Drehungen und Spiegelungen möglich. Wohl die schönsten Erzeugnisse dieser Art sind die Rosettenfenster gotischer Kathedralen, deren Wirkung durch das Farbenspiel aufs höchste gesteigert wird. — Die Muster mit unendlichem Rapport weisen als wesentlich neues Symmetrieelement die Verschiebung, die Translation auf: man kann das ganze Muster in bestimmten Richtungen um gewisse Beträge so verschieben, dass es wieder mit sich zur Deckung kommt. — Die Flächenornamente findet man auch schon bei den Primitiven, z. B. als Muster geflochtener Matten; besonders hoch entwickelt aber bei den Aegyptern, welche im Erfinden möglichst aussergewöhnlicher Symmetrien geradezu eine Virtuosität an den Tag legten. Diese ägyptische Kunst breitete sich weitherum aus und beeinflusste die griechische, persische, arabische und maurische Ornamentik in starkem Masse. Einen Begriff dieser künstlerischen Leistungen vermittelt das Prachtwerk von OWEN JONES, The grammer of ornament (Day and Son, London, 1856), in welchem herrliche Proben ornamentaler Kunst wiedergegeben sind.

In jedem Flächenornament lässt sich — manchmal erst nach einigem Studium — eine Figur, das „Motiv“ herausschälen, welches dank geometrischer Gesetzmässigkeiten, nämlich der Symmetrieoperationen wie Drehung, Spiegelung, Translation oder Gleitspiegelung, in regelmässig-harmonischer Weise das Ornament aufbaut. Diese Gesetzmässigkeiten sind merkwürdigerweise erst im Jahre 1891 durch den Kristallographen FEDOROFF [15]) in ihrem vollen Umfang erkannt und abgeleitet worden; unabhängig nochmals von G. POLYA [15]) und P. NIGGLI [15]) im Jahre 1924. Das einfache Resultat besteht in dem Satze, dass es in der Ebene nur 17 in bezug auf die Symmetrieverhältnisse verschiedene Anordnungsmöglichkeiten von Motiven gibt (17 ebene Gruppen), so dass die Gesamtheit aller Symmetrien irgend eines Musters in einem der 17 aufgezählten Fälle enthalten ist. So einfach das Resultat erscheint, so tiefliegend sind die zur Aufdeckung nötigen gruppentheoretischen Begriffe und in dem Auffinden von Flächenmustern, wie es die Aegypter taten, muss daher eine grosse mathematische Leistung gesehen werden.

Das „Motiv“ des Ornaments enspricht vollkommen dem „Thema“ des Fugenwerkes oder der „Basis“ der Kristallstruktur. [16]) — Dass diese Erkenntnis, welche früher — natürlich unbewusst — Gemeingut der Künstler gewesen waren, auch heute wieder Beachtung finden, zeigte z. B. eine vor einiger Zeit von ITTEN [17]) veranstaltete kunstgewerbliche Ausstellung. Ein Schüler hatte eine schwarz-weiss gefleckte Kuh photographiert, aus dieser Photographie Kopf und Vorderbeine als Rechteck ausgeschnitten und nun dieses edle „Motiv“ nach der Lehre der 17 ebenen Gruppen auf die verschiedenste Art lückenlos aneinander gereiht, wodurch überraschenderweise eine Anzahl wirklich schöner Muster entstanden, deren Motive man bei flüchtigem Hinsehen gar nicht

---

[15]) E. S. Fedoroff, Symmetrie in der Ebene. Verh. Russ. K. Mineral. Ges. [2] **28** (1891) 345 (russisch).

G. Pólya, Ueber die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene. Z. Krist. [A] **60** (1924) 278.

P. Niggli, Die Flächensymmetrien homogener Diskontinuen. Z. Krist. [A] **60** (1924) 283.

[16]) Vgl. auch: M. Bill, Fünfzehn Variationen über ein Thema. Editions de chroniques du jour, Paris, 1939, als Versuch, ein malerisches Thema in Variationen abzuwandeln.

[17]) Zürich, Kunstgewerbemuseum, 1939.

gewahr wurde. Sogar die Kenntnis der 17 ebenen Gruppen selbst wurde den Schülern in Form der Planigone von FEDOROFF vermittelt.

Hat man einmal gelernt, auf die Symmetrien der Gegenstände, welche uns im Alltag umgeben, zu achten, so wird man erstaunt sein, wie mannigfaltig diese sind: Fussböden, Tapeten, Decken, Teppiche, Stoffmuster und dergleichen; sie alle sind den 17 ebenen Symmetrien untertan.

Dass auch in der Malerei im engeren Sinne Symmetrien enthalten sind, will ich nur kurz am Beispiel des Parallelismus bei HODLER erläutern.[18]) — Bildern, wie „Einmütigkeit", „Die Lebensmüden", „Heilige Stunde" oder „Blick in die Unendlichkeit" ist gemeinsam, dass in ihnen ein Rhythmus enthalten ist, welcher durch das parallele Nebeneinandersetzen von ähnlichen Gestalten bewirkt wird; es handelt sich bei diesen Bildern um eigentliche Kompositionen. Allerdings ist es keine Wiederholung ein und desselben Objektes im Sinne der Mathematik, sondern jede Figur weist individuelle Variationen auf, ist ein Einzeltypus, aber nicht ein für sich allein bestehender, sondern einem Ganzen untergeordneter Typus.

Ueber die Bedeutung der Proportionslehre für Plastik und Architektur sind viele Bücher geschrieben worden;[19]) ich begnüge mich mit einem Beispiel, dem Strassburger Münster.[19]) Die Breite der Turmfassade am Fusse der Türme und die ganze Höhe verhalten sich wie Seite und Durchmesser des regelmässigen Achteckes. Ebenso verhalten sich äussere Breite des Langhauses und die ganze Länge der Bauachse. — Interessanter als dies ist der Umstand, dass im Helm des Münsters durch aufeinandergestellte sechseckige Prismen geradezu eine komplizierte Raumgruppe anschaulich verwirklicht ist, worauf A. SPEISER [(14), Theorie der Gruppen, S. 2] aufmerksam machte. Es wäre eine für Uebungen

[18]) Vgl. z. B. A. Maeder, F. Hodler. Eine Skizze seiner seelischen Entwicklung und Bedeutung für die schweizerisch-nationale Kultur. Rascher, Zürich, 1916 (S. 52—56).

Th. Roffler, Ferdinand Hodler. Huber, Frauenfeld und Leipzig, 1926.

[19]) Z. B. E. Mössel, Vom Geheimnis der Form und der Urform des Seins. Deutsche Verlagsanstalt, Stuttgart-Berlin, 1938.

G. Dehio und G. v. Bezold, Die kirchliche Baukunst des Abendlandes. 5 Atlas-Bände (1884—1901) und 2 Text-Bände (1892—1901), A. Bergsträsser, Stuttgart.

zur Kristallstrukturlehre reizvolle Aufgabe, einmal die Raumgruppe dieser architektonischen Form an Stelle der atomaren Strukturmodelle zu bestimmen. Man findet die rhomboedrische Gruppe D_{3d}^5. Das Thema, der Tonkörper, das Motiv, die Basis, der Baustein oder wie immer man das damit Bezeichnete nennen möge, ist in diesem Falle ein selbst schon symmetrischer, materieller Körper: das hexagonale Steinprisma. Durch die gesetzmässige, wendeltreppenförmige Wiederholung dieses Bauelementes schuf JOHANNES HÜLTZ von Köln (zirka 1430) eine — für sich genommen — ästhetische Form und zugleich bewies er damit sein hochentwickeltes räumliches Anschauungs- und Gestaltungsvermögen. (Aufriss und Grundriss dieses Helmes in DEHIO-v. BEZOLD, 1. c. Tafel 482, Fig. 1 und 3, Beschreibung im 2. Textbd., S. 355).

* * *

Die einzelnen Teile der in diesem Vortrage behandelten Gebiete sind — zum mindesten dem Fachmanne — bekannt; vielleicht weniger bekannt ist das Band der Symmetrien und Formen, welches diese Teile zu einem Ganzen knüpft.

Ich schliesse mit den einführenden Worten KARL SCHEFFLERs zu seinem einzigartigen Buche „Form als Schicksal" (E. Rentsch, Erlenbach-Zürich und Leipzig, 1939), [20]) welche besonders heute für uns alle von wesentlicher Bedeutung geworden sind:

„Darum ist das Denken über Fragen der Form im hohen Masse aktiv, wenn auch in einem übertragenen Sinne. In Formen, nur in ihnen, offenbart sich dem Menschen die ewige Aktivität Gottes. So gehört die Beschäftigung zu jenen Bestrebungen, die ihren Lohn in sich selbst tragen. Nur der Verwirrte hält sie für unzeitgemäss, nur der Unwissende unterschätzt ihren Wert. Der Einsichtige wünscht seiner Zeit hohe Schulen, in denen sehr still und ganz zweckfrei das Wesen der Form erforscht und gelehrt wird."

[20]) Vgl. auch das ebenso eminent geistreiche wie höchst anspruchsvolle Buch von F. Lion, Geheimnis des Kunstwerks. Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart-Berlin, 1932.