

# Die Dynamik der Sternsysteme

Autor(en): **Schürer, Max**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): - **(1940)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-319398>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

**Max Schürer**

## **Die Dynamik der Sternsysteme\*)**

### **Inhaltsangabe**

Nach einem kurzen geschichtlichen Rückblick in der Einleitung und der Aufzählung der Beobachtungsergebnisse, die durch die Theorien dargestellt werden müssen, erfolgt die Ableitung der Grundgleichungen der Dynamik eines Sternsystems. In der Folge werden als Hauptziel dieser Arbeit die Grundgleichungen nach vier Methoden unter der Annahme eines dynamisch bekannten stationären Zustandes zu lösen und einer vergleichenden Betrachtung zu unterwerfen versucht.

### **Einleitung**

Die Dynamik der Sternsysteme ist eines der jüngsten Forschungsgebiete der Astronomie. Wohl hat schon H. LAMBERT in seinen kosmologischen Briefen über die Einrichtung des Weltbaues im Jahre 1761 die Sterne in ein dem Planetensystem übergeordnetes System zusammengefasst, aber seine Theorie war von rein spekulativem Charakter. Erst am Anfang des 20. Jahrhunderts war die Beobachtungsgenauigkeit so weit fortgeschritten, dass systematische Bewegungen der Sterne festgestellt und zu einer Theorie der Sternbewegungen verwendet werden konnten. Bei der Bestimmung der Apexbewegung der Sonne zeigten sich Unstimmigkeiten in den aus verschiedenen Sterngruppen hergeleiteten Resultaten. Sie liessen sich unter der Annahme zweier Sternströme beseitigen. Es schien, als ob jeder Stern ein Vertreter des einen oder andern Stromes sei, die einander in gegensätzlichen Richtungen durchdringen. Diese Zweistromtheorie wurde hauptsächlich von KAPTEYN gefördert und war zu Anfang des Jahrhunderts die einzig herrschende. Einige Jahre später stellte SCHWARZSCHILD dar, dass man die Sternengeschwindigkeitsver-

\*) Die vorliegende Abhandlung ist ein Auszug einer von der philosophischen Fakultät II der Universität Bern mit dem ersten Preis ausgezeichneten Arbeit.

teilung ausser durch die Zweistromtheorie auch durch eine Ellipsoidtheorie erklären könne. Nach ihr ist die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer Sternengeschwindigkeit mit den rechtwinkligen Komponenten  $u, v, w$  gleich

$$ce - (h^2 u^2 + k^2 v^2 + l^2 w^2).$$

$c, h, k, l$  sind nur mit dem Ort, aber nicht mit der Geschwindigkeit veränderliche Grössen.

Obgleich beide Theorien die Beobachtungstatsachen mit ungefähr derselben Güte darstellten, schien doch die SCHWARZSCHILDsche Hypothese physikalisch weniger sinnvoll zu sein. EDDINGTON und JEANS haben im Jahre 1915 die letzte Theorie auch dynamisch begründet und ihr so zum Siege verholfen. Beobachtungsfehler, Unkenntnis der Entfernungen, interstellare Absorption, Abweichungen vom stationären Zustand u. a. erschweren immer noch die Lösung des Problems, so dass von einem Abschluss der Theorie keine Rede sein kann. Trotzdem lässt uns das Erreichte schon einen Einblick in die dynamischen Verhältnisse des Sternsystems tun.

Von der Dynamik der Sternsysteme verlangt man die Darstellung:

- a) der differentiellen Rotationseffekte, hervorgerufen durch die von Ort zu Ort veränderliche Massenströmung,
- b) der Geschwindigkeitsverteilung in Form eines dreiachsigen Ellipsoides, dessen grösste Achse in der Symmetrieebene des Systems liegt und um wenig von der Richtung nach dem Systemzentrum abweicht,
- c) der Asymmetrie der Geschwindigkeitsverteilungen (die Schwerpunkte der Geschwindigkeitskörper der Sterngruppen mit grosser Geschwindigkeitsstreuung bleiben im Masse dieser Streuung hinter einer idealen Kreisbahnbewegung im System zurück),
- d) der Spiralstruktur der Sternsysteme.

Die ersten drei Forderungen ergeben sich aus Beobachtungen in unserem Milchstrassensystem. Die Spiralstruktur ist in unserem eigenen System noch nicht mit Sicherheit nachgewiesen. Es darf aber angenommen werden, dass das Milchstrassensystem ein Mitglied der Spiralnebefamilie darstellt. Wir dehnen deshalb unsere vier Forderungen auf die Sternsysteme im allgemeinen aus. In der Folge wird gezeigt, wie diese teilweise erfüllt werden können.

### Die Grundgleichungen

Unser Sternsystem ist mit einem abgeschlossenen System materieller Punkte zu vergleichen, die ein Gravitationsfeld erzeugen. Dieses zerlegen wir in

- a) das durch Mittelbildung geglättete Gravitationsfeld des Gesamtsystems — gleich dem Gravitationsfeld einer kontinuierlichen Massenverteilung, deren von Ort zu Ort stetig veränderliche Dichte gleich der Dichte unseres Sternsystems ist — und
- b) die „Unebenheiten“ des Gravitationsfeldes in der Nachbarschaft der einzelnen Massenpunkte.

Wir wollen die Kräfte, die durch die beiden Teile des Gravitationsfeldes hervorgerufen werden, regulär oder dynamisch, bzw. irregulär oder statistisch nennen. Eine Untersuchung von JEANS zeigt, dass die irregulären Kräfte in unserem Sternsystem eine untergeordnete Rolle spielen. Eine nahe Sternbegegnung — Ablenkung der Sternbahn um weniger als  $90^\circ$  — kommt bei der in der Nähe der Sonne herrschenden Sterndichte in  $3 \cdot 10^{14}$  Jahren, ein Zusammenstoß nur in  $6 \cdot 10^{16}$  Jahren einmal vor. Diese Tatsache unterscheidet unser Sternsystem von den Gasen, bei welchen nicht das Gesamtgravitationsfeld, sondern die einzelnen Zusammenstöße die Kinematik und Dynamik beherrschen.

Die Bewegungen und die Dichte unseres Sternsystems lässt sich statistisch durch eine Verteilungsfunktion  $f$  der allgemeinen Koordinaten  $q_i$ , der Impulskoordinaten  $p_i$  und der Zeit  $t$  beschreiben, so dass

$$dM = f(q_i, p_i, t) dq_1 dq_2 dq_3 dp_1 dp_2 dp_3 \quad (1)$$

die Masse bedeutet, die sich zur Zeit  $t$  in dem 6-dimensionalen Phasenelement  $dq_1 dq_2 dq_3 dp_1 dp_2 dp_3$  befindet.  $f$  ist die Massendichte am Orte  $q_1, q_2, q_3$  mit den Impulsen  $p_1, p_2, p_3$  zur Zeit  $t$ . Die Dichteänderung wird bestimmt durch die verallgemeinerte 6-dimensionale Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik

$$\operatorname{div}(f\mathfrak{B}) = - \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2)$$

$\mathfrak{B}$  ist ein 6-dimensionaler „Geschwindigkeitsvektor“ mit den Komponenten  $q_1', q_2', q_3', p_1', p_2', p_3'$ . Die  $q_i'$  und  $p_i'$  sind Ableitungen nach der Zeit und genügen den HAMILTON'schen kanonischen Gleichungen



$$q_i' = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad p_i' = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad H = T + V \quad (3)$$

Da keine Bindungen vorhanden sind, ist die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i, k} g_{ik} q_i' q_k'$$

eine homogene quadratische Form der Geschwindigkeiten und

$$V = V(q_i, t)$$

die potentielle Energie.

Gleichung (2) kann weiter umgeformt werden.

$$\operatorname{div} (f \mathfrak{B}) = f \operatorname{div} \mathfrak{B} + \mathfrak{B} \operatorname{grad} f = -\frac{\partial f}{\partial t}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathfrak{B} &= \sum_i \left\{ \frac{\partial}{\partial q_i} (q_i') + \frac{\partial}{\partial p_i} (p_i') \right\} \\ &= \sum_i \left\{ \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial}{\partial p_i} \left( -\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

eine Beziehung, die als LIOUVILLE'scher Satz bekannt ist und aussagt, dass allen Phasenraumelementen dieselbe a-priori-Wahrscheinlichkeit zukommt. Gleichung (2) reduziert sich damit auf

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} \operatorname{grad} f &= \sum_i \left\{ q_i' \frac{\partial f}{\partial q_i} + p_i' \frac{\partial f}{\partial p_i} \right\} \\ &= \sum_i \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right\} \\ &= (f, H) = -\frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned} \quad (5)$$

$(f, H)$  ist der POISSON'sche Klammerausdruck. Das Potential  $V$ , welches nur den regulären Kräften entsprechen soll, muss der POISSON'schen Gleichung

$$\Delta V = 4\pi x \rho = 4\pi x \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} f dp_1 dp_2 dp_3 \quad (6)$$

genügen.  $\rho$  ist im Gegensatz zu  $f$  die räumliche Massendichte,  $x$  ist die Gravitationskonstante.

### Stationarität

Den zwei Teilfeldern der Gravitation entsprechend, unterscheiden wir auch zwei Arten von stationären Zuständen, das dyna-

mische Gleichgewicht, dem regulären Felde entsprechend und das statistische Gleichgewicht, in dem auch die irregulären Kräfte keine Veränderung der Verteilungsfunktion mehr hervorrufen können. Vom regellosen Zustand ausgehend, bewirken vor allem die regulären Kräfte eine gewisse Vermischung. Die Vermischungszeit bis zum dynamischen Gleichgewicht wird auf 300 Millionen Jahre geschätzt, der Umlaufszeit unserer Sonne im Milchstrassensystem entsprechend. Nach Erreichung dieses Zustandes rufen nur noch die irregulären Kräfte eine Änderung der Verteilungsfunktion hervor, die Relaxation genannt wird. Die Relaxationszeit beträgt grössenordnungsmässig  $10^{14}$ — $10^{16}$  Jahre. Nach dieser Zeit ist die Geschwindigkeitsverteilung kugelsymmetrisch nach MAXWELL und die einzelnen Partikel zerstreuen sich ins Unendliche. Statistische Stationarität ist in unserem Sternsystem offensichtlich noch nicht erreicht. Bei der Herleitung der Differentialgleichung für die Funktion  $f$  haben wir auch die Wirkung von Kollisionen und nahen Passagen vernachlässigt. Nach den bisherigen Beobachtungen befindet sich unser Sternsystem auch noch nicht im Zustand eines dynamischen Gleichgewichtes. Dennoch werden wir in der Folge meist diesen Zustand als erreicht betrachten, um speziellere Ableitungen möglich zu machen. Wir setzen deshalb in Gleichung (5)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \text{ die sich damit auf} \\ (f, H) = 0 \quad (7)$$

reduziert.

HECKMANN und STRASSL zeigten, dass unter sehr allgemeinen Voraussetzungen die Gleichung (7) auch für das Zeitmittel der Funktion  $f$  von nicht stationären Zuständen gilt.

### Methoden zur Lösung der Grundgleichungen

Die simultane Lösung der beiden Gleichungen (5) und (6), bzw. (7) und (6) stellt das Hauptproblem der Stelldynamik dar, das aber in dieser Allgemeinheit noch nicht in Angriff genommen wurde. Vielmehr wurden meist unter Voraussetzung von Stationarität und gewissen Symmetrien Lösungen von (7) gesucht. Die Bindung durch die POISSON'sche Gleichung (6) ist wegen der Lösungsmannigfaltigkeit von (7) weniger streng, als man beim ersten Anblick erwartet. Sie legt in erster Linie nur dieser

Lösungsmannigfaltigkeit Beschränkungen auf. Zur Lösung (7) bzw. (5) wurden im wesentlichen vier verschiedene Methoden angewandt.

1. Lösung der Differentialgleichung nach der Methode von LAGRANGE, der dieselbe auf die Lösung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückführt. Vgl. JEANS und LINDBLAD.
2. Einsetzen eines bestimmten Ansatzes für  $f$  in die Differentialgleichung und Bestimmung der Konstanten. Vgl. OORT und EDDINGTON.
3. Aufstellen eines bestimmten Kraftansatzes. Dadurch ist die Betrachtung individueller Sternbahnen möglich. Die folgende statistische Zusammenfassung der Gesamtheit der Sterne, die einen bestimmten Raumteil durchsetzen ergibt eine Verteilungsfunktion, die der Gleichung (7) genügen muss. Vgl. BOTTLINGER.
4. Untersuchung der relativen Bewegung der Sterne in bezug auf einen Idealstern in der Nähe der Sonne, der im System eine Kreisbahn beschreibt. Das Potential  $V$  wird in der Nähe dieses Idealsterns in eine Potenzreihe entwickelt, wodurch eine Integration ermöglicht wird. Vgl. LINDBLAD und CHANDRASEKHAR.

Im folgenden werden diese vier Methoden im einzelnen behandelt.

### *1. Methode*

Geht man voraussetzungslos an die Lösung der partiellen linearen Differentialgleichung erster Ordnung (7), so wird man nach irgendeinem Lehrbuch über partielle Differentialgleichungen auf die Lösung der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, die Charakteristiken, geführt. Das zu unserer Gleichung (7) gehörige System ist mit den Gleichungen (3) identisch.

Funktionen  $\varphi = \varphi(q_i, p_i)$  nennt man erste Integrale des kanonischen Systems (3), wenn sie längs jeder Integralkurve  $q_i(t)$  einen konstanten Wert behalten. Funktionen solcher Art sind z. B. der Energiesatz und das Flächenintegral. Diese Integrale sind nun auch Lösungen der Differentialgleichung  $(f, H) = 0$ . Es gibt für unser System 5 von einander unabhängige erste Integrale. Mit ihnen ist auch jede willkürliche differenzierbare Funktion  $f = f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5)$  eine Lösung. Jedes erste Integral stellt

eine 5-dimensionale Hyperebene im 6-dimensionalen Phasenraum dar, auf der die Bahnkurven des Systems verlaufen müssen. Die ersten Integrale werden in zwei Klassen eingeteilt, in die primitiven, d. h. unendlich vieldeutigen, und in die imprimitiven. Würden in die willkürliche Funktion primitive Integrale eingesetzt, so wäre das Ergebnis für unsere Verteilungsfunktion eine Konstante. Um diese triviale Lösung zu vermeiden, lassen wir als Argumente der willkürlichen Funktion  $f$  nur imprimitive Integrale zu.

Um ausser dem Energieintegral weitere erste Integrale zu erhalten, müssen bestimmte Symmetrievoraussetzungen gemacht werden. Es werden im folgenden Kugelsymmetrie und Zylindersymmetrie vorausgesetzt.

In einem kugelsymmetrischen System ist das Potential  $V$  eine Funktion des Abstandes vom Kugelmittelpunkt allein. Wir führen Polarkoordinaten ein.

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \sin \vartheta \\y &= r \sin \varphi \sin \vartheta \\z &= r \cos \vartheta\end{aligned}$$

Hieraus lässt sich leicht die kinetische Energie  $T$  berechnen.

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2) \\&= \frac{1}{2} (r'^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \cdot \varphi'^2 + r^2 \cdot \vartheta'^2) \\&= \frac{1}{2} (R^2 + \varphi^2 + \theta^2)\end{aligned}$$

$R$ ,  $\varphi$  und  $\theta$  sind lineare, zu  $r'$ ,  $\varphi'$  und  $\vartheta'$  parallele Geschwindigkeitskomponenten. Die den räumlichen Koordinaten  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\vartheta$  entsprechenden Impulskoordinaten  $p$ ,  $\chi$ ,  $\psi$  erhält man aus

$$p = \frac{\partial T}{\partial r'} = r'; \quad \chi = \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = r^2 \sin^2 \vartheta \cdot \varphi'; \quad \psi = \frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = r^2 \cdot \vartheta'$$

Die HAMILTONsche Funktion  $H$  erhält damit die Form

$$H = H(q_i, p_i) = \frac{1}{2} \left( p^2 + \frac{\chi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{\psi^2}{r^2} \right) + V(r),$$

deren verschiedene partielle Ableitungen die kanonischen Gleichungen

$$\begin{aligned}r' &= \frac{\partial H}{\partial p} = p; & p' &= - \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{\chi^2}{r^3 \sin^2 \vartheta} + \frac{\psi^2}{r^3} - \frac{dV}{dr} \\ \varphi' &= \frac{\partial H}{\partial \chi} = \frac{\chi}{r^2 \sin^2 \vartheta}; & \chi' &= - \frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \\ \vartheta' &= \frac{\partial H}{\partial \psi} = \frac{\psi}{r^2}; & \psi' &= - \frac{\partial H}{\partial \vartheta} = \frac{\chi^2 \cotg \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta}\end{aligned}$$

ergeben.

Erste Integrale dieses kanonischen Systems sind:

$$I_1 = (R^2 + \Phi^2 + \theta^2) + 2V = \text{konst.}$$

$$I_2 = \chi = r \sin \vartheta \cdot \Phi = \text{konst.}$$

$$I_3 = \psi^2 + \frac{\chi^2}{\sin^2 \vartheta} = r^2 (\theta^2 + \Phi^2) = \text{konst.}$$

Verlangen wir, dass nicht nur das Potential  $V$ , sondern auch die Verteilungsfunktion Kugelsymmetrie zeigen soll, so ist das Integral  $I_2$  wegen der Auszeichnung der  $\Phi$ -Richtung und der Abhängigkeit von  $\vartheta$  zu verwerfen. Die Verteilungsfunktion ist somit von der Form

$$f = f(I_1, I_3).$$

Lassen wir für die Verteilungsfunktion  $f$ , wie es die Beobachtungen nahe legen, nur das SCHWARZSCHILD'sche Ellipsoidgesetz

$$f = p e^{-\frac{1}{a^2} \xi^2} \text{ zu,}$$

wo  $p$  und  $a$  Konst. sind und  $\xi^2$  eine quadratische Form in den Geschwindigkeiten ist, so kann  $\xi^2$  nur die Form

$$\xi^2 = I_1 + k I_3 = R^2 + (1 + k r^2) (\Phi^2 + \theta^2) + 2V$$

haben. Der Geschwindigkeitskörper ist also ein Rotationsellipsoid mit dem Radiusvektor als Rotationsachse. Eine Sternströmung kann nur in Richtung dieses Radiusvektors vorhanden sein.

In einem achsensymmetrischen System ist das Potential  $V$  eine Funktion des Abstandes von der Rotationsachse  $\bar{w}$  (klein Pi) und der Zylinderkoordinate  $z$ , d. h.

$$V = V(\bar{w}, z).$$

Wir führen Zylinderkoordinaten ein.

$$x = \bar{w} \cos \vartheta$$

$$y = \bar{w} \sin \vartheta$$

$$z = z$$

Analog dem Früheren wird die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} (\bar{w}'^2 + \bar{w}^2 \cdot \vartheta'^2 + z'^2)$$

$$= \frac{1}{2} (H^2 + \theta^2 + Z^2)$$

Die den räumlichen Koordinaten  $\bar{w}$ ,  $\vartheta$ ,  $z$  entsprechenden Impulskordinaten  $\rho$ ,  $\psi$ ,  $\zeta$  erhält man aus

$$\rho = \frac{\partial T}{\partial \bar{w}'} = \bar{w}; \quad \psi = \frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = \bar{w}^2 \cdot \vartheta'; \quad \zeta = \frac{\partial T}{\partial z'} = z'$$

Die HAMILTON'sche Funktion und die kanonischen Gleichungen lauten

$$H = \frac{1}{2} (\rho^2 + \frac{\psi^2}{\bar{\omega}^2} + \zeta^2) + V(\bar{\omega}, z)$$

$$\bar{\omega}' = \frac{\partial H}{\partial \rho} = \rho; \quad \rho' = -\frac{\partial H}{\partial \bar{\omega}} = \frac{\psi^2}{\bar{\omega}^3} - \frac{\partial V}{\partial \bar{\omega}}$$

$$\vartheta' = \frac{\partial H}{\partial \psi} = \frac{\psi}{\bar{\omega}^2}; \quad \psi' = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = 0$$

$$z' = \frac{\partial H}{\partial \zeta} = \zeta; \quad \zeta' = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Erste Integrale dieses kanonischen Systems sind:

$$I_1 = (\Pi^2 + \theta^2 + Z^2) + 2V = \text{konst.}$$

$$I_2 = \psi = \bar{\omega} \theta = \text{konst.}$$

Ist  $V(\bar{\omega}, z)$  von der Form  $V_1(\bar{\omega}) + V_2(z)$ , oder anders ausgedrückt, ist

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \bar{\omega} \partial z} = 0,$$

so existiert noch ein weiteres erstes Integral

$$I_3 = Z^2 + V_2(z) = \text{konst.}$$

Den beiden Fällen entsprechend kann unsere Verteilungsfunktion die Formen

$$f = f(I_1, I_2) \text{ und } f = f(I_1, I_2, I_3) \text{ annehmen.}$$

Ist wiederum  $f$  von der Form

$$f = P e^{-\frac{1}{a^2} \xi^2},$$

so ist die allgemeinste Darstellung von  $\xi^2$  im ersten Falle

$$\begin{aligned} \xi^2 &= I_1 + 2k_1 I_2 + k_2 I_2^2 \\ &= \Pi^2 + \theta^2 + Z^2 + 2k_1 \bar{\omega} \theta + k_2 \bar{\omega}^2 \theta^2 + 2V(\bar{\omega}, z) \\ &= \Pi^2 + Z^2 + (1 + k_2 \bar{\omega}^2) \left( \theta + \frac{k_1 \bar{\omega}}{1 + k_2 \bar{\omega}^2} \right)^2 - \frac{k_1^2 \bar{\omega}^2}{1 + k_2 \bar{\omega}^2} + 2V \\ &= \Pi^2 + \lambda^2 (\theta - \theta_0)^2 + Z^2 + 2V_0 \end{aligned}$$

$$\lambda^2 = 1 + k_2 \bar{\omega}^2, \quad \theta_0 = -\frac{k_1 \bar{\omega}}{1 + k_2 \bar{\omega}^2}, \quad V_0 = V - \frac{1}{2} \frac{k_1^2 \bar{\omega}^2}{1 + k_2 \bar{\omega}^2}$$

Der Geschwindigkeitskörper ist auch hier ein Rotationsellipsoid. Die mittlere Geschwindigkeit ist aber für die betrachtete Sterngruppe nicht gleich 0 wie beim kugelsymmetrischen Fall, sondern gleich

$$\theta_0 = \bar{\omega} \vartheta'_0 = \bar{\omega} \omega_0.$$

Die Rotationsachse des Geschwindigkeitskörpers liegt in einer

der Ebenen  $z = \text{konst.}$  und bildet mit der  $\bar{\omega}$ -Richtung einen rechten Winkel. Dieses Resultat steht im Widerspruch zu den Beobachtungen, die zwar ebenfalls ein Rotationsellipsoid als Darstellung der Geschwindigkeitsverteilung wahrscheinlich machen, dessen ausgezeichnete Achse aber in Richtung zum Zentrum des Systems liegt.

Zur Behebung dieser Schwierigkeit wurden nach verschiedenen Autoren entweder die Fiktion eines dynamisch stationären Zustandes fallen gelassen (LINDBLAD, HECKMANN u. STRASSL) oder die Gültigkeit des NEWTON'schen Gravitationsgesetzes bezweifelt (PILOWSKI nimmt z. B. abstossende Zusatzkräfte an). LINDBLAD geht unter anderem auch vom Bestehen der Beziehung

$$\left| \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{\omega} \partial z} \right| \ll 1 \quad \text{aus.}$$

Indem man diesen Ausdruck streng 0 setzt, kann für  $\xi^2$

$$\xi^2 = I_1 + 2 k_1 I_2 + k_2 I_2^2 + k_3 I_3$$

gesetzt werden. Bei geeigneter Wahl der beliebigen Konstanten  $k_1$ ,  $k_2$  und  $k_3$  ist eine bessere Darstellung der beobachteten Geschwindigkeitsellipsoide durch die Theorie möglich.

Unser Milchstrassensystem hat in grossen Zügen die Form eines stark abgeplatteten Rotationsellipsoides, ist also ein achsensymmetrisches System, das ein grosses Drehmoment vermuten lässt. Wir haben gesehen, dass in solchen Systemen der Mittelpunkt der Geschwindigkeitsellipsoide eine Bewegung senkrecht zur  $\bar{\omega}$ -Richtung, eine Kreisbewegung ausführt. Wir gehen auf die dadurch hervorgerufenen Effekte, die von OORT untersucht wurden, ein. Es werden nur die Bewegungen der Ellipsoidmittelpunkte ins Auge gefasst.

Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit des Problems unsern Ort im Raum mit den Koordinaten

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0, \quad \vartheta = 0, \quad z = z_0$$

bezeichnen. Die mittlere Geschwindigkeit einer benachbarten Sterngruppe mit den Koordinaten

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + d\bar{\omega}, \quad \vartheta = 0 + d\vartheta, \quad z = z_0 + dz$$

wird durch den Geschwindigkeitsvektor

$$\mathfrak{B} = [w, \mathfrak{K}]$$

in einem NEWTON'schen Inertialsystem dargestellt;



$$\mathfrak{w} = (0, 0, \frac{\theta_0(\bar{w}, z)}{\bar{w}} = \omega)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 + d\mathfrak{R} &= (\bar{w}_0 + d\bar{w}, 0 + \bar{w}_0 d\vartheta, z_0 + dz) \\ &= (\bar{w}_0 + \xi, \eta, z_0 + \zeta). \end{aligned}$$

Die relative Geschwindigkeit in bezug auf den Beobachter im Punkte

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_0 &= (\bar{w}_0, 0, z_0) \quad \text{ist} \\ \mathfrak{v} &= \mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0 = [\mathfrak{w}, \mathfrak{R}] - [\mathfrak{w}_0, \mathfrak{R}_0] \\ &= [\mathfrak{w}_0 + d\mathfrak{w}, \mathfrak{R}_0 + d\mathfrak{R}] - [\mathfrak{w}_0, \mathfrak{R}_0] \\ &= [\mathfrak{w}_0, d\mathfrak{R}] + [d\mathfrak{w}, \mathfrak{R}_0] = (\xi', \eta', \zeta'). \\ d\mathfrak{w} &= (0, 0, \frac{1}{\bar{w}_0} \left[ \left( \frac{\partial \theta_0}{\partial \bar{w}} - \frac{\theta_0}{\bar{w}_0} \right) d\bar{w} + \frac{\partial \theta_0}{\partial z} dz \right]) \end{aligned}$$

Eine einfache Rechnung unter Verwendung der oben gegebenen Substitutionen ergibt

$$\mathfrak{v} = (\xi', \eta', \zeta') = \left( -\frac{\theta_0}{\bar{w}_0} \eta, \frac{\partial \theta_0}{\partial \bar{w}} \xi + \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \zeta, 0 \right)$$

Wir führen Polarkoordinaten ein.

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos l \cos b \\ \eta &= r \sin l \cos b \\ \zeta &= r \sin b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r' &= \cos l \cos b \cdot \xi' + \sin l \cos b \cdot \eta' + \sin b \cdot \zeta' \\ r \cos b \cdot l' &= -\sin l \cdot \xi' + \cos l \cdot \eta' \\ r \cdot b' &= -\cos l \sin b \cdot \xi' - \sin l \sin b \cdot \eta' + \cos b \cdot \zeta' \end{aligned}$$

Setzen wir für  $\xi', \eta', \zeta'$  die gefundenen Werte ein, so erhält man

$$\begin{aligned} r' &= A r \sin 2l \cos^2 b + C r \sin l \sin 2b \\ l' &= B + A \cos 2l + 2C \operatorname{tg} b \cos l \\ b' &= -\frac{1}{2} A \sin 2l \sin 2b - 2C \sin l \sin^2 b, \end{aligned}$$

$$\text{wo} \quad A = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta_0}{\partial \bar{w}} - \frac{\theta_0}{\bar{w}_0} \right); \quad B = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta_0}{\partial \bar{w}} + \frac{\theta_0}{\bar{w}_0} \right)$$

$$C = \frac{1}{2} \frac{\partial \theta_0}{\partial z}$$

Betrachten wir die Bewegungen der Sterne in der Milchstrassenebene, für die  $b=0$  gesetzt werden kann, so erhält man für die Radialgeschwindigkeiten  $r'$  und die Eigenbewegung in galaktischer Länge  $l'$  die etwas einfacheren Formeln

$$\begin{aligned} r' &= A r \sin 2l \\ l' &= B + A \cos 2l. \end{aligned}$$

Nach ihnen tragen die systematischen Bewegungen den Charakter von Doppelwellen. I wird von der Richtung nach dem Milchstrassenzentrum aus gezählt. Die Beobachtung ergibt für die beiden Konstanten A und B

$$A = -0.0155 \text{ Km/sek per Parsek,}$$

$$B = -0.012 \text{ Km/sek per Parsek.}$$

Es lassen sich im weiteren Beziehungen zwischen diesen kinematischen Ergebnissen und der Geschwindigkeitsverteilung herleiten. Nach Früherem ist

$$B + A = \frac{\partial \theta_0}{\partial \bar{\omega}}, \quad B - A = \frac{\theta_0}{\bar{\omega}} = \omega;$$

$$\theta_0 = - \frac{k_1 \bar{\omega}}{1 + k_2 \bar{\omega}_2} = - \frac{k_1 \bar{\omega}}{\lambda^2},$$

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial \bar{\omega}} = - \frac{k_1}{\lambda^2} + \frac{2 k_1 k_2 \bar{\omega}}{\lambda^4},$$

$$\frac{B - A}{B} = \lambda^2$$

$\lambda$  ist das Achsenverhältnis des Geschwindigkeitsellipsoides, das durch obige Gleichung mit den OORT'schen Rotationskonstanten A und B in enger Beziehung steht. Ferner war

$$f = P e^{- \left\{ \frac{\Pi^2 + Z^2 + 2 V_0}{a^2} + \frac{(\theta - \theta_0)^2}{b^2} \right\}}$$

$$= f_1 e^{- \left\{ \frac{\Pi^2 + Z^2}{a^2} + \frac{(\theta - \theta_0)^2}{b^2} \right\}}$$

$$f_1 = P e^{- \frac{2 V_0}{a^2}}; \quad \frac{a}{b} = \lambda$$

Die räumliche Dichte  $\rho$  findet man aus dem dreifachen Integral

$$\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1 e^{- \left\{ \frac{\Pi^2 + Z^2}{a^2} + \frac{(\theta - \theta_0)^2}{b^2} \right\}} d \Pi d \theta d Z.$$

Durch die Substitutionen

$$\lambda (\theta - \theta_0) = \theta_1; \quad c_1^2 = \Pi^2 + Z^2 + \theta_1^2$$

erhält man dessen Lösung

$$\rho = \frac{P}{\lambda} e^{- \frac{2 V_0}{a^2}} (\pi a^2)^{3/2}$$

Die logarithmische Differentiation dieses Ausdrucks ergibt nach einigen Umformungen

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\bar{\omega}} = - \frac{1}{\bar{\omega}} \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) - \frac{2}{a^2} \left(\frac{dV}{d\bar{\omega}} - \frac{\theta_0^2}{\bar{\omega}}\right)$$

Wir wollen die „Rotationsgeschwindigkeit“ unserer Sterngruppe mit der Kreisbahngeschwindigkeit eines Sterns im Orte des Beobachters vergleichen. Für die Kreisbahngeschwindigkeit gilt

$$\theta_c^2 = \bar{\omega} \frac{dV}{d\bar{\omega}}$$

Setzen wir dies in obigen Ausdruck ein, so erhalten wir

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\bar{\omega}} = - \frac{1}{\bar{\omega}} \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) - \frac{2}{a^2 \bar{\omega}} (\theta_c^2 - \theta_0^2).$$

Die Beobachtungen lassen erkennen, dass im allgemeinen die Sternbahnen wenig von Kreisen abweichen. Die Differenz

$$S = \theta_c - \theta_0$$

ist daher klein gegenüber  $\theta_0$ . Wir können deshalb für

$$\theta_c^2 - \theta_0^2 = S^2 + 2 S \theta_0 \sim 2 S \theta_0$$

setzen und erhalten schliesslich

$$S = - \frac{a^2 \bar{\omega}}{4 \theta_0} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\bar{\omega}} + \frac{1}{\bar{\omega}} \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \right].$$

S stellt das Zurückbleiben der Geschwindigkeitsellipsoidmittelpunkte hinter der Kreisbahngeschwindigkeit dar. Betrachten wir verschiedene Sterngruppen, die nach physikalischen Gesichtspunkten ausgelesen sein mögen, so ist nicht zu erwarten, dass alle dieselbe Streuung zeigen. Da aber der Faktor von  $a^2$  in der Gleichung für S für die verschiedenen Sterngruppen nahezu derselbe sein wird, ist S proportional dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat der Sterngruppen, eine Gesetzmässigkeit, die schon STRÖMBERG aus Beobachtungen erkannte und theoretisch zu deuten versuchte.

Dasselbe Gesetz erhält man auf einem weniger strengen, aber anschaulichen Weg. Wir vergleichen zu diesem Zwecke die Gesamtenergie  $W_c$  des Sterns mit der Kreisbahngeschwindigkeit mit der mittleren Gesamtenergie  $W_0$  pro Stern der betrachteten Sterngruppe.

$$W_c = \frac{1}{2} \theta_c^2 + V$$

$$W_0 = \frac{1}{2} (\theta_0^2 + a^2 + \frac{1}{2} b^2) + V$$

Die Differenz der beiden Energien beträgt

$$W_c - W_0 = \frac{1}{2} (\theta_c^2 - \theta_0^2) - \frac{1}{2} (a^2 + \frac{1}{2} b^2)$$

Betrachten wir die Randzone eines Sternsystems, so wird dort  $W_c - W_0$  positiv sein, da sonst die Mehrzahl der Sterne der betrachteten Sterngruppe während der längsten Zeit ihrer Bewegung ausserhalb der Kreisbahn anzutreffen wären.

Diese Gefahr wächst mit der Streuung in der Sterngruppe. Wir machen deshalb die etwas hypothetische Annahme

$$W_c - W_0 = x a^2, \quad x = \text{konstant} > 0.$$

Mit derselben Vernachlässigung wie früher finden wir dann

$$S = \frac{a^2}{\theta_0} \left[ x + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{b^2}{2a^2} \right) \right].$$

Es ist damit mehr eine Begründung unserer hypothetischen Annahme, als ein Beweis für die STRÖMBERG'sche Asymmetrie gewonnen.

## 2. Methode

OORT ist auf einem andern, spezielleren Wege an die Lösung des Problems gegangen. Er macht schon am Anfang für die Verteilungsfunktion den Ansatz

$$f = f_0 e^{-[h^2 \Pi^2 + k^2 (\theta - \theta_0)^2 + l^2 Z^2 + m \Pi (\theta - \theta_0) + n \Pi Z + p (\theta - \theta_0) Z]}$$

und setzt ihn in die Differentialgleichung (7) ein. Zu diesem Zwecke muss letztere transformiert werden. Wir führen die Koordinaten  $\bar{w}$ ,  $\vartheta$ ,  $z$ ,  $\Pi$ ,  $\theta$ ,  $Z$  ein. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{Df}{Dt} &= \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \bar{w}' + \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \vartheta' + \frac{\partial f}{\partial z} z' + \frac{\partial f}{\partial \Pi} \Pi' + \frac{\partial f}{\partial \theta} \theta' + \frac{\partial f}{\partial Z} Z' \\ &= \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \Pi + \frac{\partial f}{\partial z} Z + \frac{\partial f}{\partial \Pi} \left( \frac{\theta^2}{\bar{w}} - \frac{\partial V}{\partial \bar{w}} \right) + \frac{\partial f}{\partial \theta} \left( -\frac{\Pi \theta}{\bar{w}} \right) - \frac{\partial f}{\partial Z} \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

Es ist zu beachten, dass  $f_0$ ,  $h^2$ ,  $k^2$ ,  $l^2$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $p$  Funktionen von  $\bar{w}$  und  $z$  sein können, aber weder von den Geschwindigkeiten, noch von  $\vartheta$  abhängen. Es handelt sich bei obigem Ansatz also wieder um ein SCHWARZSCHILD'sches Geschwindigkeitsellipsoid in einem achsensymmetrischen System. Setzen wir  $f$  in die letzte Gleichung ein und dividieren wir das Ganze durch  $-f$ , so folgt:

$$\begin{aligned}
& \Pi^3 \frac{\partial h^2}{\partial \bar{\omega}} + \Pi^2 \theta \left( \frac{\partial m}{\partial \bar{\omega}} - \frac{m}{\bar{\omega}} \right) + \Pi^2 Z \left( \frac{\partial h^2}{\partial z} + \frac{\partial n}{\partial \bar{\omega}} \right) \\
& + \Pi \theta^2 \left( \frac{\partial k^2}{\partial \bar{\omega}} + \frac{2h^2 - 2k^2}{\bar{\omega}} \right) + \Pi \theta Z \left( \frac{\partial m}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial \bar{\omega}} - \frac{p}{\bar{\omega}} \right) \\
& + \Pi Z^2 \left( \frac{\partial l^2}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\partial n}{\partial z} \right) + \theta^3 \frac{m}{\bar{\omega}} + \theta^2 Z \left( \frac{\partial k^2}{\partial z} + \frac{n}{\bar{\omega}} \right) \\
& + \theta Z^2 \frac{\partial p}{\partial z} + Z^3 \frac{\partial l^2}{\partial z} - \Pi^2 \frac{\partial (\ln \theta_0)}{\partial \bar{\omega}} - 2 \Pi \theta \left\{ \frac{\partial (k^2 \theta_0)}{\partial \bar{\omega}} - \frac{k^2 \theta_0}{\bar{\omega}} \right\} \\
& - \Pi Z \left\{ \frac{\partial (m \theta_0)}{\partial z} + \frac{\partial (p \theta_0)}{\partial \bar{\omega}} \right\} - \theta^2 \frac{m \theta_0}{\bar{\omega}} - 2 \theta Z \frac{\partial (k^2 \theta_0)}{\partial z} - Z^2 \frac{\partial (p \theta_0)}{\partial z} \\
& + \Pi \left\{ \frac{\partial (k^2 \theta_0^2)}{\partial \bar{\omega}} + 2 h^2 \frac{\partial V}{\partial \bar{\omega}} - n \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{f_0} \frac{\partial f_0}{\partial \bar{\omega}} \right\} - \Theta \left( m \frac{\partial V}{\partial \bar{\omega}} + p \frac{\partial V}{\partial z} \right) \\
& + Z \left\{ \frac{\partial (k^2 \theta_0^2)}{\partial z} - 2 l^2 \frac{\partial V}{\partial z} - n \frac{\partial V}{\partial \bar{\omega}} - \frac{1}{f_0} \frac{\partial f_0}{\partial z} \right\} - m \theta_0 \frac{\partial V}{\partial \bar{\omega}} + p \theta_0 \frac{\partial V}{\partial z} = 0.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist nach Potenzen von  $\Pi$ ,  $\Theta$  und  $Z$  geordnet. Da die Geschwindigkeitskomponenten voneinander unabhängig sind, müssen alle Koeffizienten verschwinden. Wir erhalten daraus zum grösseren Teile eine Reihe von partiellen Differentialgleichungen, die jedoch verhältnismässig leicht zu lösen sind. Das Resultat deckt sich vollkommen mit demjenigen der ersten Methode. Es wird.

$$\begin{aligned}
m &= n = p = 0 \\
h^2 &= l^2 = k^2 = c_0 \bar{\omega}^2 \\
f &= f_0 e^{-\left( h^2 \Pi^2 + k^2 (\Theta - \Theta_0)^2 + h^2 Z^2 \right)}
\end{aligned}$$

Auch die Beziehung zwischen dem Achsenverhältnis des Geschwindigkeitsellipsoides und den OORT'schen Rotationskonstanten, sowie die Formel für die STRÖMBERG'sche Asymmetrie lässt sich ohne Schwierigkeit nach dieser Methode herleiten. Sie lauten mit den neuen Ausdrücken

$$\frac{h^2}{k^2} = \frac{B}{B - A}$$

und

$$S = \frac{1}{4 h^2 (A - B)} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\omega}} + \frac{1}{\bar{\omega}} \left( 1 - \frac{h^2}{k^2} \right) \right\}$$

Ist  $\frac{\partial^2 V}{\partial \bar{\omega} \partial z} = 0$ , so folgt daraus wie früher, dass

$$h^2 \text{ nicht gleich } l^2.$$

EDDINGTON hat diese Methode angewandt, um einen Satz von allgemeiner Bedeutung aber mehr theoretischem Interesse abzuleiten. Er setzt ebenfalls das SCHWARZSCHILD'sche Geschwindigkeitsverteilungsgesetz voraus. Die Achsen der von Ort zu Ort veränderlichen Geschwindigkeitsellipsoide sind die Tangenten an eine dreifache orthogonale Flächenschar, den Hauptgeschwindigkeitsflächen, die bei dynamisch stationären Zuständen Flächen zweiter Ordnung sein müssen.

### 3. Methode

Die erste und zweite Methode suchen direkt die Geschwindigkeitsverteilungen darzustellen, ohne etwas über die einzelne Sternbahn aussagen zu können. Die dritte und vierte Methode gehen von der Betrachtung der einzelnen Sternbahn aus und suchen erst nachträglich durch statistische Zusammenfassung der einzelnen Bahnen Aussagen über die Geschwindigkeitsverteilungen zu machen. Die dritte Methode untersucht die Sternbahnen im Grossen, die vierte im Kleinen.

EDDINGTON hat die dritte Methode zur Untersuchung des Dichteverlaufs in einem kugelförmigen, dynamisch stationären Sternsystem angewandt, um sie mit Beobachtungen an Kugelsternhaufen zu vergleichen. SCHWARZSCHILD stellte die Gleichungen für die Bahnkurven in einem homogenen Sternsystem von der Form eines dreiaxigen Ellipsoides auf und erhält, indem er sie statistisch zusammenfasst, für die Verteilungsfunktion die Form

$$f = f(x'^2 + A^2 x^2, y'^2 + B^2 y^2, z'^2 + C^2 z^2),$$

die sich auch nach der ersten Methode herleiten lässt. Die Voraussetzungen sind hier von so spezieller Natur, dass diese Untersuchungen nur von theoretischem Interesse sind. BOTTLINGER geht von den wirklichen Verhältnissen in unserem Milchstrassensystem aus, und wir wollen seinen Gedankengängen in kurzen Zügen folgen. Er betrachtet in erster Linie ein ebenes Problem und nimmt an, dass sich die Sterne in Ellipsen bewegen, deren Brennpunkt im Zentrum des Milchstrassensystems liegt. Er denkt sich also die gravitierende Masse des Systems im Zentrum vereinigt. Aus dem Zweikörperproblem, nach welchem wir jetzt die Bahnen behandeln dürfen, werden die nächsten Beziehungen abgeleitet. Ist  $v$  die Geschwindigkeit,  $a$  die grosse Halbachse der

Ellipse,  $e$  deren Exzentrizität,  $r$  der Radiusvektor und  $\vartheta$  der Winkel zwischen Radiusvektor und Geschwindigkeitsvektor, dann gilt

$$v^2 = x^2 M \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right); \quad v r \sin \vartheta = x \sqrt{M a (1 - e^2)}$$

BOTTLINGER stellt die Geschwindigkeitsvektoren als Funktion der Bahnhalbachse und der Exzentrizität graphisch dar. Er benutzt die obigen Beziehungen, in denen man den Energiesatz und den Flächensatz erkennt. Die Halbachse  $a$  und die Exzentrizität  $e$  können an Stelle des Energieintegrals und des Flächenintegrals treten. Unsere Verteilungsfunktion kann also auch als

$$f = f(a, e) \text{ geschrieben werden.}$$

Aus der oben genannten Figur (siehe z. B. Hdb. d. Astrophysik Bd. V<sub>2</sub>) kann auf anschaulichem Wege die Asymmetrie erkannt werden. Der Ort der Sonne in dieser Figur entspricht einer Exzentrizität von ungefähr 0,15, einer Halbachse von 1,14 in Einheiten Sonne-Milchstrassenzentrum und einer wahren Anomalie von 320°. Man erkennt aus diesen Zahlenangaben die Anschaulichkeit der Methode.

Die Voraussetzung, dass sich alle Sterne in einer Ebene und in KEPLER-Ellipsen bewegen, muss fallen gelassen werden. In Wirklichkeit wird ein Stern Rosettenbahnen beschreiben, die zwischen einer KEPLER-Bewegung und einer harmonischen Ellipse liegen. Die Bahnen werden im allgemeinen nahezu eben bleiben, aber gegeneinander geneigt sein, und ein neues Integral ( $\sin i = \text{konst.}$  im Zweikörperproblem entsprechend) wird auftreten. Die der Knotenlänge und der Perihellänge entsprechenden Integrale treten nicht auf, da dieselben bei achsensymmetrischen Systemen auf den ganzen Kreisumfang gleichmässig verteilt sein müssen. Nach der ersten Methode ist zwischen der „Neigung“ und der „Exzentrizität“ eine enge Korrelation zu erwarten. BOTTLINGER setzt empirisch  $\sigma(\sin i) = a \cdot \sigma(e)$ .  $\sigma$  ist die Verteilungsfunktion für  $\sin i$ , resp.  $e$ .

Wie man sieht, bleiben ungelöste Fragen bestehen. Es sollten plausible Ansätze für die Kraft

$$\left( F = \frac{aR}{1 + bR^3} \text{ nach BOTTLINGER, } F = \frac{C}{R^2} + DR \text{ nach OORT} \right)$$

durchgerechnet und eine Erklärung für die Korrelation zwischen „Neigung“ und „Exzentrizität“ gefunden werden.



## 4. Methode

Nahezu kreisförmige Bahnen bezieht man in der Dynamik öfters auf rotierende Koordinatensysteme. Die Abweichungen von der Kreisbahn werden dadurch zu kleinen Schwingungen um ein rotierendes Zentrum. LINDBLAD untersuchte nach dieser Methode Sternbahnen in der Ebene. CHANDRASEKHAR entwickelte die Verallgemeinerung in drei Dimensionen. Der Ursprung des rotierenden Koordinatensystems bewege sich auf einer Kreisbahn im Abstand  $\bar{\omega}_1$  vom Systemzentrum, mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$ . Die  $\xi$ -Achse falle beständig mit der  $\bar{\omega}_1$ -Richtung zusammen, die  $\eta$ -Achse stehe senkrecht darauf und liege in der Symmetrieebene, während die  $\zeta$ -Achse parallel zur z-Achse gerichtet ist. Das Potential sei wie früher  $V = V(\bar{\omega}, z)$ . Die Gleichungen von LAGRANGE lauten

$$\begin{aligned}\xi'' - 2 \omega_1 \eta' - \omega_1^2 (\bar{\omega}_1 + \xi) &= - \frac{\bar{\omega}_1 + \xi}{\bar{\omega}} \frac{\partial V}{\partial \bar{\omega}} \\ \eta'' + 2 \omega_1 \xi' - \omega_1^2 \eta &= - \frac{\eta}{\bar{\omega}} \frac{\partial V}{\partial \bar{\omega}} \\ \xi'' &= - \frac{\partial V}{\partial \zeta}\end{aligned}$$

Wir bestimmen die Winkelgeschwindigkeit aus der Gleichung

$$\omega^2 \bar{\omega}_1 = \left( \frac{\partial V}{\partial \bar{\omega}} \right)_1$$

Das Koordinatensystem sei im übrigen so gewählt, dass die Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  des betrachteten Sterns während längerer Zeit klein bleiben. Wir können dann die Ableitungen der Potentialfunktion nach Taylor entwickeln.

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= \bar{\omega}_1 + \xi \\ \left( \frac{\partial V}{\partial \bar{\omega}} \right)_{\bar{\omega}, \zeta} &= \left( \frac{\partial V}{\partial \bar{\omega}} \right)_1 + \xi \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{\omega}^2} \right)_1 + \zeta \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{\omega} \partial \zeta} \right)_1 \\ \left( \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right)_{\bar{\omega}, \zeta} &= \left( \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right)_1 + \xi \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta \partial \bar{\omega}} \right)_1 + \zeta \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} \right)_1\end{aligned}$$

Unter Beachtung von

$$\eta'' + 2 \omega_1 \xi' = 0 \quad \rightarrow \quad \eta' = - 2 \omega_1 \xi$$

nehmen die Gleichungen von LAGRANGE die Form

$$\begin{aligned}\xi'' + \alpha \xi + \beta \zeta &= 0 \\ \zeta'' + \beta \xi + \gamma \zeta &= - Q\end{aligned}$$

an. Ihre Integration lässt sich nach bekannten Methoden aus-

führen. Transformiert man endlich die erhaltenen Integrale auf ein für alle Sterne gemeinsames Koordinatensystem, so lauten dieselben

$$I_1 = \left\{ \left( \frac{\eta'_0}{2(A+\omega)} + \frac{\beta}{\alpha r - \beta^2} Q \right) + \frac{\beta}{g_2^2 - a} \left( \zeta_0 + \frac{\alpha}{\alpha r - \beta^2} Q \right) \right\}^2$$

$$+ \frac{1}{g_1^2} \left( \xi'_0 - \frac{\beta}{g_2^2 - a} \zeta'_0 \right)^2$$

$$I_2 = \left\{ \frac{g_1^2 - a}{\beta} \left( \frac{\eta'_0}{2(A+\omega)} + \frac{\beta}{\alpha r - \beta^2} Q \right) + \left( \zeta_0 + \frac{\alpha}{\alpha r - \beta^2} Q \right) \right\}^2$$

$$+ \frac{1}{g_2^2} \left( \frac{g_1^2 - a}{\beta} \xi'_0 - \zeta'_0 \right)^2$$

$$A = - \frac{1}{4\omega_0} \left\{ \omega_0^2 - \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \omega^2} \right)_0 \right\}$$

$I_1$  und  $I_2$  sind zwei erste Integrale, die wie bei der ersten Methode als Argumente einer beliebigen Funktion  $f$  dieselbe zu einer Lösung unseres Problems machen. Speziell ist

$$f = f_0 e^{-k(I_1 + \lambda^2 I_2)}$$

Eine Diskussion dieser Gleichung zeigt, dass das Geschwindigkeitsellipsoid drei verschiedene Achsen haben kann, und dass die Hauptachse, die nach der Symmetrieachse des Systems zeigt mit derselben einen Winkel  $\mp 90^\circ$  einschliessen kann. CHANDRASEKHAR glaubt, damit einen Widerspruch zwischen Theorie und Beobachtung behoben zu haben. M. E. kann man nach der beschriebenen Methode nur Aussagen über beschränkte Gebiete, in denen unser Ansatz für das Potential nahezu seine Gültigkeit behält, machen. Aussagen über das System als Ganzes sind unzulässig.

### Schlusswort

Die vier betrachteten Methoden führen im grossen Ganzen zu gleichen Resultaten. Einige Unterschiede müssen noch geklärt werden. Vor allem weisen die letzten beiden Methoden, wenn auch noch nicht beweiskräftig, auf ein drittes Integral, das die grösste Unstimmigkeit zwischen Beobachtung und Theorie, das Bestehen eines dreiachsigen Ellipsoides, zum Verschwinden brächte. Es hat eine Reihe Versuche gegeben, diesen Widerspruch durch Aufgeben der Stationarität oder des NEWTON'schen Gravitations-

gesetzes zu lösen (HECKMANN und STRASSL, LINDBLAD, PILOWSKI und andere). Die dabei verwendeten Methoden sind dieselben geblieben. Die verfügbaren Konstanten werden vermehrt, und es ist anzunehmen, dass sich die Theorie den Beobachtungen besser anpassen lässt. Die Erklärung der Doppelwellen in den Radialgeschwindigkeiten und den Eigenbewegungen ist bei jeder Sternströmung möglich (PILOWSKI, OGRODNIKOFF, MILNE).

Vielleicht wird einmal eine Theorie über die Spiralstruktur der Sternsysteme zugleich weitere Widersprüche in der Dynamik eines Sternsystems lösen. Es gibt schon jetzt hiefür bemerkenswerte Anzeichen.

### Literaturverzeichnis

#### Zusammenfassende Darstellungen:

von der PAHLEN, Lehrbuch der Stellarstatistik.

SMART, Stellar dynamics.

JEANS, Astronomy and cosmogony.

LINDBLAD, Die Milchstrasse, Hdb. d. A. ph. Bd. V<sub>2</sub>, VII.

#### Originalarbeiten:

JEANS, MN 76.

EDDINGTON, MN 74, 75, 76.

SCHWARZSCHILD, Göttinger Nachr., 1907, Festschrift für Hugo v. Seli-ger 1924.

LINDBLAD, Archiv. f. Math., Astr. och Fys. Bd. 19 A u. ff. MN 95 ff.

OORT, BAN Heft 120, 132, 133, 159, 196, 238.

BOTTLINGER, Veröff. Babelsberg VIII<sub>5</sub>, X<sub>2</sub>, Naturwiss. Bd. 19, Ergebn. d. ex. Naturw. 11.

CHANDRASEKHAR, MN 98.

SHIVESHWARKAR, MN 95 ff.

CLARK, MN 97.

HECKMANN und STRASSL, Veröff. Göttingen H. 41, 43.

PILOWSKI, Himmelswelt 1932, A. N. 5922, 5977, 6158, Z. f. Aph. 3<sub>1</sub>, 3<sub>4</sub>, 4.

OGRODNIKOFF, Z. f. Aph. 4.

MILNE, MN 95.