Bemerkung über vierdimensionale reguläre Polytope und Quaternionen

H. Hadwiger

Bemerkung über vierdimensionale reguläre Polytope und Quaternionen

Bilden die n komplexen Zahlen

$$z_1, z_2, \ldots, z_n \tag{1}$$

als Punkte in der Gauss'schen Zahlenebene die Ecken eines regulären Vielecks, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt, so gilt die elementar verifizierbare Relation [1])

$$z_1^2 + z_2^2 + \ldots z_n^2 = 0. \tag{2}$$

Wir betrachten nun einen vierdimensionalen regulären Körper im Quaternionenraum, dessen Mittelpunkt wir ebenfalls mit dem Ursprung zusammenfallen lassen. Die n Eckpunkte des Körpers werden dann durch n Quaternionen

$$q_1, q_2, \ldots, q_n \tag{3}$$

gebildet. Wir zeigen in dieser Note, dass

$$\frac{q_1^2 + q^2 + \ldots + q_n^2}{|q_1|^2 + |q_2|^2 + \ldots + |q_n|^2} = -\frac{1}{2} \tag{4}$$

ist. Diese Relation stellt in dem Sinne eine Analogie zu der in der Gaussschen Zahlenebene geltenden Relation (2) dar, als beide Beziehungen sich aus ein und derselben allgemein für reguläre Körper gültigen Gesetzmässigkeit ergeben. Diese Folgerung kann aber nur in Räumen hyperkomplexer Zahlen auf diese Weise dargestellt werden.

Es sei

$$q_\nu = a_{\nu 1} + i a_{\nu 2} + j a_{\nu 3} + k a_{\nu 4} \quad (\nu = 1, 2, \ldots n).$$

Aus der rechteckigen Matrix

$$A = \|a_{ik}\|$$

bilden wir die vierreihige bzw. die n-reihige Matrix

$$B = A^*A = \|b_{ik}\| \quad \text{und} \quad C = AA^* = \|c_{ik}\|$$

---

[1]) Nach einem bekannten Satz der Axonometrie ist das Verschwinden der Quadratsumme für ein beliebiges System von n komplexen Zahlen notwendig und hinreichend dafür, dass das durch die Zahlenvektoren gebildete n-Bein in der Ebene die Orthogonalprojektion eines n-Beins orthogonaler und gleichlanger Vektoren des n-dim. Raumes ist. — Etwas allgemeiner kann gezeigt werden, dass die Quadratsumme stets verschwindet, wenn das n-Bein in der Gaußschen Zahlenebene die Orthogonalprojektion eines regulären n-Beins des k-dim. Raumes auf die Ebene darstellt. Ein reguläres n-Bein wird durch die vom Mittelpunkt nach den n Ecken eines regulären Körpers führenden Vektoren gebildet. Die Relation (2) stellt in diesem Zusammenhang den einfachsten Spezialfall dieser Aussage (k = 2) dar.

Beide Matrizen haben den Rang 4 und die nämlichen 4 nicht verschwindenden Eigenwerte,[2] die wir mit

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4$$

bezeichnen.

C und B sind die Gram'schen Matrizen der Zeilenvektoren bzw. der Spaltenvektoren der Matrix A. Bezeichnet θ_{ik} den Zwischenwinkel des i.ten und des k.ten Zeilenvektors, und R den Radius der dem regulären Körper umschriebenen Kugel, so gilt

$$\sum_i \sum_k c_{ik}^2 = \sum_i \sum_k R^4 \cos^2 \theta_{ik}.$$

Wie an anderer Stelle gezeigt wurde,[3] nimmt die Quadratsumme der Kosinus der Zwischenwinkel der Eckpunktvektoren eines regulären Körpers des k-dim. Raumes stets den Wert $\frac{n^2}{k}$ an.[4] Wir erhalten so für die Normalspur der Matrix C den Wert

$$\sum_i \sum_k c_{ik}^2 = \frac{n^2 R^4}{4}.$$

Ferner ist die Spur von C

$$\sum_i c_{ii} = n R^2.$$

Nun können diese beiden Invarianten in bekannter Weise durch die Eigenwerte dargestellt werden. Es gilt

$$\sum_i \lambda_i^2 = \frac{n^2 R^4}{4}$$

$$\sum_i \lambda_i = n R^2.$$

Verwenden wir diese Resultate in der Identität

$$\sum_i \sum_k (\lambda_i - \lambda_k)^2 = 8 \sum_i \lambda_i^2 - 2 \left(\sum \lambda_i\right)^2$$

so folgt

$$\sum_i \sum_k (\lambda_i - \lambda_k)^2 = 0$$

oder

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{n R^2}{4}.$$

Wie früher bereits erwähnt, besitzt auch die Matrix B diese vier Eigenwerte. Ihr Grad fällt also mit der Zahl der zusammenfallenden Eigenwerte zusammen und sie muss deshalb eine Diagonalmatrix sein. Es gilt

---

[2] Vergl. den Beweis von E. Stiefel, Zum Satz von Pohlke, Comm. math. helv. 10 (1937/38), S. 208—225, bes. S. 212—213.

[3] H. Hadwiger, Ueber ausgezeichnete Vektorsterne und reguläre Polytope, Comm. math. helv. 13 (1940/41), S. 90–107. bes. S. 101, 103.

[4] Es handelt sich um den kleinsten Wert, den die Quadratsumme der Kosinus der Zwischenwinkel von n Vektoren im k-dim, Raume überhaupt annehmen kann.

$$b_{ik} = \begin{cases} 0 & (i \lessgtr k) \\ \dfrac{n R^2}{4} & (i = k). \end{cases}$$

Nun lässt sich die Relation (4) mühelos verifizieren. Zunächst ist

$$\sum_{\nu} q_{\nu}^{2} = \sum_{\nu} (a_{\nu 1} + i a_{\nu 2} + j a_{\nu 3} + k a_{\nu 4})^{2}$$

$$= b_{11} - b_{22} - b_{33} - b_{44} + i\,(b_{12} + b_{21}) + j\,(b_{13} + b_{31}) + k\,(b_{14} + b_{41})$$

so dass sich mit Rücksicht auf das weiter oben gewonnene Resultat über die Matrix B

$$\sum_{\nu} q_{\nu}^{2} = -\frac{n R^2}{2}$$

ergibt. Da weiter

$$\sum_{\nu} |q_{\nu}|^{2} = n R^2$$

ist, folgt

$$\frac{\sum_{\nu} q_{\nu}^{2}}{\sum_{\nu} |q_{\nu}|^{2}} = -\frac{1}{2}$$

was zu beweisen war.