

# Sitzungsberichte der Mathematischen Vereinigung in Bern

Objekttyp: **AssociationNews**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern**

Band (Jahr): **3 (1946)**

PDF erstellt am: **28.06.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

# Sitzungsberichte

## der Mathematischen Vereinigung in Bern

---

*135. Sitzung, Freitag, den 2. Februar 1945*

Herr Dr. F. Meyer spricht über das Thema: „Die Exponentialfunktion als Beispiel der didaktischen Behandlung eines Kapitels der Schulmathematik“.

Die elementare Einführung der speziellen Exponentialfunktion  $e^x$  bereitet didaktisch eine gewisse Schwierigkeit. Diese liegt darin, dass bei den üblichen Verfahren immer eine dem Schüler zunächst unverständliche Definition notwendig ist. Am natürlichsten erscheint folgendes Vorgehen: Nachdem die Funktion  $a^x$  für verschiedene positive Werte der Basis  $a$  elementar behandelt worden ist, wird aus diesem Kurvenbüschel eine Kurve als einfachste und daher wichtigste herausgegriffen. Die Differentiation führt zunächst auf  $(a^x)' = a^x \cdot \lim_{\Delta x > 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot k$ , wobei  $k$  nur von  $a$  abhängig ist.

Anstatt nun die Konstante  $k$  zu bestimmen, kann die Frage umgedreht werden, nämlich: Wie muss  $a$  gewählt werden, damit die Konstante  $k$  den einfachen Wert 1 annimmt?

Damit kommt man auf die andere natürliche Frage: Welche Funktion stimmt mit ihrer Ableitung überein?

a) Algebraische Lösung: Die gesuchte Funktion ist

$$y = f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \text{ wenn } n \rightarrow \infty. \text{ Denn es wird}$$

$$y' = f'(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \text{ wenn } n \rightarrow \infty.$$

$$\text{Also } f(x) - f'(x) = \frac{x^n}{n!} \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

b) Die geometrische Lösung wird den Anfänger besser befriedigen: Wenn der Differentialquotient mit der Funktion selber übereinstimmen soll, so muss die Kurve im Punkte S (0/1) die Richtungsgrösse 1 haben. Die Gerade  $y = x + 1$  muss also Kurventangente im Punkte S sein. Nach der Figur gilt:

$$a^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} \text{ oder } a = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Nun muss aber der Punkt P mit dem Punkt S zusammenfallen. Folglich ergibt sich als Basis der speziellen Exponentialfunktion  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

---

136. Sitzung, Freitag, den 16. Februar 1945

Herr dipl. ing. H. Weber spricht über das Thema: „Eine spezielle Algebra zur Lösung von Schaltaufgaben (Relais-Stromkreise)“.

Die Grundlage zu diesem Vortrag bot eine Arbeit von Claude E. Shannon, betitelt „A symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits“, welche in der Zeitschrift Transactions 1938 of the American Institut of Electrical Engineers publiziert wurde. Das Verdienst des genannten Autors besteht vor allem darin, die in mathematischen Kreisen bekannte Algebra von Bool auf einen Zweig der Ingenieurwissenschaft erstmals angewandt zu haben, der bisher von den Theoretikern sehr stiefmütterlich behandelt wurde, eben den der Schaltungstechnik wie sie vorkommt in der Telephonautomatik, den Liftsteuerungen, Stellwerkanlagen usf. Nach Aufstellung der grundlegenden Definitionen und Postulate, welche die Beziehung zwischen der elektrischen Schaltung und der Algebra von Bool herstellen, können dann die bekannten Sätze und funktionellen Zusammenhänge aus dieser Algebra auf die elektrischen Schaltungen angewendet werden. Es seien jene daher hier angeben.

1. Eine Anordnung von Kontakten (auf Schaltern, Relais, Wähler usf.) kontrolliert die Schliessung oder Oeffnung eines Stromkreises, in dem ein Relais X bei Schliessung oder Oeffnung der Kontakte betätigt wird. Die Abhängigkeit von diesen Kontakten wird als Hinderungsfunktion X definiert. Sie kann, wie auch die Argumente (= Kontakte), nur zwei Werte annehmen: Null (0) oder unendlich (1) (Analogie zur Impedanz in der Elektrotechnik).

2. a) Ein Stromkreis ist geschlossen, wenn seine Hinderung gleich Null ist.

b) Ein Stromkreis ist offen, wenn seine Hinderung gleich 1 ist.

3. a) Einer Serieschaltung zweier Stromkreise entspricht die Addition der entsprechenden Hinderungen.

b) Einer Parallelschaltung zweier Stromkreise entspricht die Multiplikation der entsprechenden Hinderungen.

Folgende Beziehungen sind nun ohne weiteres gegeben:

$$\begin{array}{cccc} 0 \cdot 0 = 0 & 1 + 0 = 1 & 0 + 0 = 0 & X = 0 \text{ oder } 1 \text{ in einem} \\ 1 + 1 = 1 & 0 \cdot 1 = 0 & 1 \cdot 1 = 1 & \text{bestimmten Zeitmoment.} \end{array}$$

4. Die reziproke Hinderung  $X'$  hat stets den andern Wert z. B.

$$X = 0 \quad X' = 1 \quad \text{oder} \quad X = 1 \quad X' = 0$$

woraus sich nützliche Beziehungen aufbauen lassen, wobei die in die Augen springende Dualität besonders wertvoll ist.

Es wurde anschliessend an diese elementaren Betrachtungen die Reihenentwicklung nach Summen und Produkten einer allgemeinen Hinderungsfunktion von n Variabeln nach diesen angegeben, der Gültigkeitsbeweis wird auf rein induktivem Weg geleistet. Die Anwendung der Reihenentwicklung erlaubt u. U. eine wesentliche Vereinfachung der Schaltung. Die Anzahl der möglichen Funktionen von n Variabeln ist  $2^{(2^n)}$ , die Anzahl der möglichen Funktionen  $\Phi(n)$ , welche von allen n Variabeln abhängen, ist

$$\Phi(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 2^{(2^k)} \cdot (-1)^{(n-k)}$$

Die Betrachtung von Funktionen mit besonderen Eigenschaften und ihre Anwendung auf Schaltungen führt zu überraschenden Ergebnissen.

1. Diejenige Funktion, die zu ihrer Realisierung in Serie-, Parallelschaltung am meisten Kontakte benötigt, stellt sich als Summe modulo zwei der  $n$  Variablen heraus. Summe modulo zwei von:

$$\begin{aligned} X_1, X_2 &= X_1 X_2' + X_1' X_2 \\ 0,0 &= 0 \\ 0,1 &= 1 \\ 1,1 &= 0 \end{aligned}$$

Es ist nichts anderes als der algebraische Ausdruck für die Treppenhausbeleuchtung mit  $n$  Schaltstellen.

2. Die allgemeine symmetrische Funktion von  $n$  Variablen zeichnet sich dadurch aus, dass in ihr die Variablen beliebig permutiert werden können, ohne dass sie sich ändert. Ihre Kennzeichnung geschieht durch die Angabe derjenigen Anzahlen  $K$  von Variablen, die Null gesetzt werden müssen, damit auch die Funktion den Wert Null erhält. Verschiedene nützliche Sätze lassen sich darauf basierend ableiten. Die Summe modulo zwei von  $n$  Variablen ist nichts anderes als eine symmetrische Funktion mit den  $K$ -Zahlen, 0,2,4 — oder 1,3,5 ...

Die der symmetrischen Funktion entsprechende Schaltung lässt sich sehr gut mit einem Minimum von Kontakten realisieren, wobei die letztgenannte auf die bekannte Schaltung der Treppenhausbeleuchtung führt.

Zwei Beispiele der praktischen Anwendung vervollständigten die Ausführungen. Das erste betraf die elektrische Addition zweier Zahlen, wobei Summe und Summanden als Summen von Potenzen der Basis 2 dargestellt werden, deren Koeffizienten den Wert 0 oder 1 besitzen. Die Schaltung ist mit Hilfe der symmetrischen Funktionen ohne Schwierigkeiten erhältlich. Das zweite Beispiel gab die Lösung für ein elektrisches Schloss als Analogon zu dem mechanischen Kombinationsschloss bei Tresoranlagen mit dem Unterschied, dass der Schlüssel auf einfachste Art jederzeit geändert werden kann. Ein ausgeführtes Modell wurde demonstriert.

---

### 137. Sitzung, Freitag, den 2. März 1945

Herr Prof. Dr. W. Michel spricht über das Thema: „Der Gauss'sche Primzahlsatz“.

Bereits im Jahre 1792 soll der grosse Mathematiker K. F. Gauss (damals erst 15 jährig!) die Vermutung ausgesprochen haben, dass die Anzahl  $p(x)$  der Primzahlen, die kleiner als die Zahl  $x$  sind, asymptotisch durch den Wert  $x/\log x$  approximiert werde. Dies bedeutet genauer, dass der Quotient von  $p(x)$  und  $x/\log x$  für unbegrenzt wachsendes  $x$  gegen 1 strebt.

Ist beispielsweise  $x = 100\,000$ , so ist  $p(x) = 74\,498$ ; als Näherungswert ergibt sich in diesem Fall  $x/\log x = 72\,382$  (Fehler zirka 8 Prozent).

Der Beweis dieser Vermutung konnte aber nach vielen vergeblichen Anstrengungen erst von Hadamard und De la Vallée Poussin im Jahre 1896 erbracht werden. Seither sind verschiedene neue Beweise gefunden worden,

so u. a. auch von Landau im Jahre 1903. — In verdienstvoller Weise unternahm es der Referent, der Vereinigung einen neuzeitlichen Beweis dieses klassischen Satzes vorzuführen und durch seine geschickt vorbereitete Darbietung einen Einblick in die Funktionsweise moderner analytischer Methoden zu geben. Er folgte hierbei im wesentlichen einer von G. Doetsch in seinem im Jahre 1937 erschienenen Werk über die Laplace-Transformation ausgeführten Anwendung funktionentheoretischer Tauber-Sätze zum Beweis des Primzahlsatzes. Nach verschiedenen (nicht sehr einfachen!) Vorstudien über Grundeigenschaften der Laplace-Transformation, über die Funktionentheorie der Riemann'schen Zetafunktion, über Dirichletsche Reihen, Taubersche Asymptotik u. a. gelingt schliesslich der Hauptbeweis.

(„Der Bund“ Nr. 156.)

---

*138. Sitzung, Freitag, den 22. Juni 1945*

Herr Dr. E. Schubarth (Basel) spricht über das Thema: „Der Briefwechsel von Johann I. Bernoulli mit dem Marquis de l'Hospital“.

---

*139. Sitzung, Freitag, den 2. November 1945*

Herr Prof. Dr. H. Hadwiger spricht über das Thema: „Mittelwert und Integral“.

Einleitend erklärt der Referent den Begriff der Mittelbarkeit für eine reelle, über dem Einheitsintervall definierte Funktion. Durch einen verschiebbaren Raster wird ein System von Argumenten ausgewählt und das arithmetische Mittel der zugehörigen Funktionswerte bestimmt. Gelingt stets die Angabe eines Rasters derart, dass bei seiner Verschiebung die jeweiligen arithmetischen Mittel beliebig wenig von einer festen Zahl  $M$  abweichen, so heisst die Funktion mittelbar mit dem Mittelwert  $M$ .

Ein solcher Mittelwert existiert für alle Funktionen einer bestimmten Menge, genügt dort den vier Postulaten der Eindeutigkeit, Linearität, Mittelhaftigkeit und Bewegungsinvarianz und stimmt, wenn das Lebesgue-Integral ebenfalls vorhanden ist, mit diesem überein. Die Mittelbarkeit liefert somit eine neue Definition des Integrals. Sie erfasst, wie der Referent an einigen Beispielen zeigte, zwar nicht alle  $L$ -integrablen, dafür aber gewisse  $L$ -nicht-integrierte Funktionen. Der Begriff der Mittelbarkeit lässt sich unverändert übertragen auf sogar komplexwertige, über abstrakten Gruppen definierte Funktionen und liefert für alle Elemente einer wohlbestimmten Funktionenmenge  $\mathfrak{M}$  ein Integral, das den erwähnten vier Postulaten genügt.

Eine unbeschränkte Fortsetzung eines solchen Integrals über die Menge  $\mathfrak{M}$  hinaus scheitert daran, dass die vier Postulate, wie Hausdorff gezeigt hat, für beliebige Funktionen nicht widerspruchsfrei sind. Diese Schwierigkeit umgeht der Referent durch ein besonderes Verfahren. Die Menge aller Funktionen wird so in zueinander elementfremde Banach'sche Klassen eingeteilt, dass stets zwei Funktionen, deren Differenz den Mittelwert 0 hat, zur selben Klasse gehören. Die Menge aller Klassen ist linear, und nach dem Wohlordnungsgesetz der Mengenlehre lässt sich daraus durch ein induktives Ver-

fahren eine Basis herausgreifen, welche insbesondere die Klasse  $A_1$  der Funktionen mit dem Mittelwert 1 enthält, und über welcher sich alle Klassen eindeutig linear kombinieren lassen. Der Klasse  $A_1$  wird nun die Zahl 1, den andern Basisklassen je irgend eine willkürliche Zahl zugeordnet; den übrigen Klassen wird dann die zugehörige Linearkombination zugewiesen. Die so jeder Klasse zugeordnete Zahl heisst das Integral der in ihr enthaltenen Funktionen.

Damit hat der Referent folgendes Resultat erreicht: jeder beliebigen Funktion wird ein Integral zugeordnet. Die zugrundeliegende Konstruktion ist eindeutig, linear, mittelhaft und, falls die Funktion zu  $\mathfrak{M}$  gehört, bewegungs-invariant, steht also nicht im Widerspruch zur Aussage von Hausdorff. Zudem erfasst sie nach einem allgemeinen Eindeigkeitssatz jeden möglichen Integralbegriff, so dass nun die vielgestaltige Theorie der verschiedenen gebräuchlichen Integrale über dem anschaulichen Fundament der Mittelbarkeit einheitlich aufgebaut erscheint.

140. Sitzung, Freitag, den 30. November 1945

Herr Dr. H. Bieri spricht über das Thema: „Variationsprobleme der Differentialgeometrie“.

(Bezeichnungen nach W. Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie, und C. Carathéodory: Variationsrechnung.)

1. Eine Verallgemeinerung des Problems der geodätischen Linien.

$$\int \phi(K) \sqrt{I} dt = \text{Extremum.}$$

2. Ein Gegenstück zum Problem der geodätischen Linien.

$$\int \sqrt{II} dt = \text{Extremum} \rightarrow \int x_n ds = \text{Extremum.}$$

3. Eine Verallgemeinerung des Minimalflächenproblems.

$$\iint \phi(x, y, z) \sqrt{EG - F^2} dudv = \text{Extremum.}$$

4. Einfache Herleitung der Euler'schen Differentialgleichung für ein allgemeines Variationsproblem der Kurventheorie.

$$\int \Phi(x, \tau) ds = \text{Extremum.}$$

5. Uebertragung des Problems 4 auf Raumflächen unter besonderer Berücksichtigung des Spezialfalles

$$\Phi(x, \tau) = x.$$

6. Algebraische Extremalen des räumlichen Variationsproblems

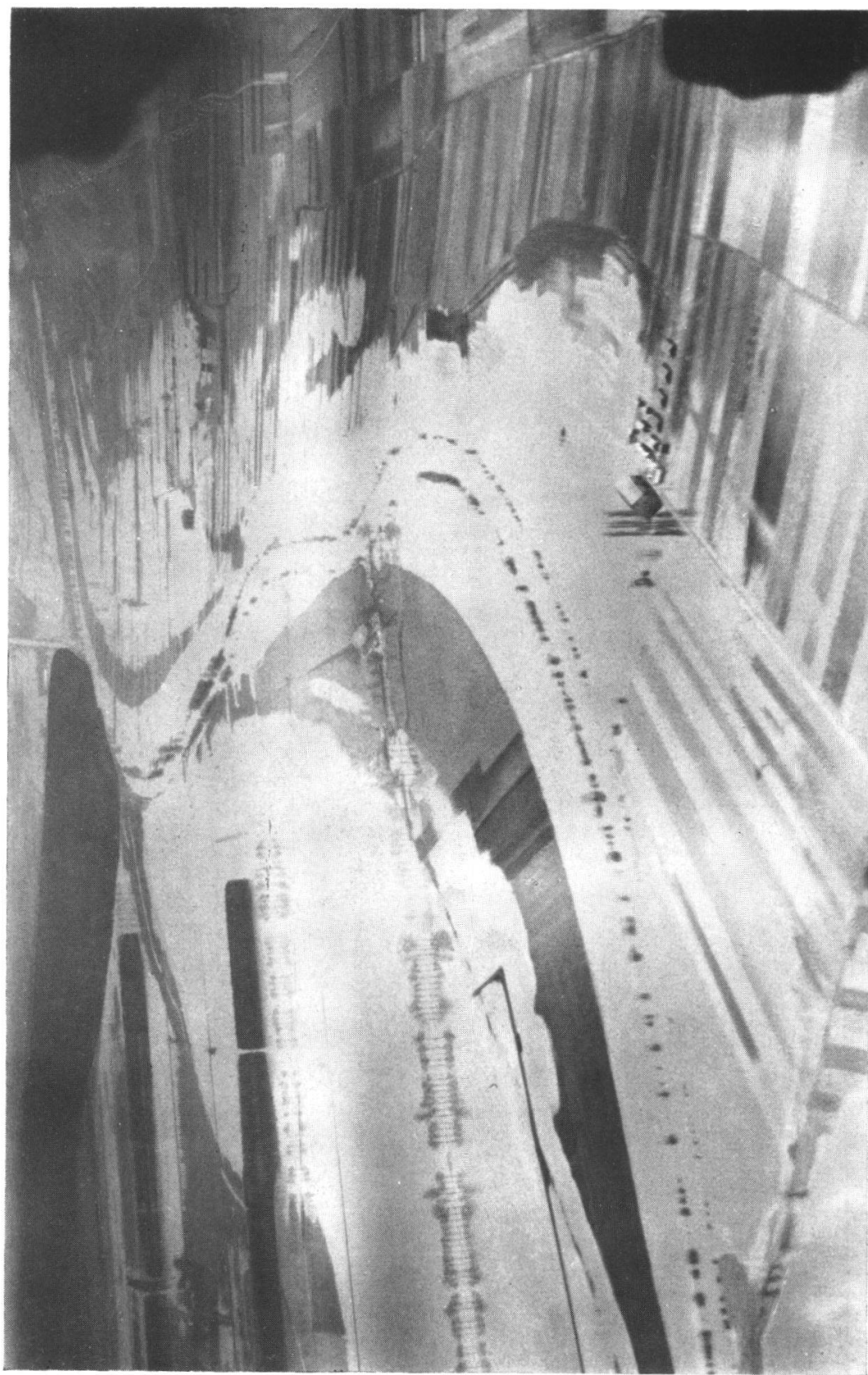
$$\int (\mathfrak{X}\dot{x} + \sqrt{\phi \cdot \dot{x}^2}) dt = \text{Extremum.}$$

6. Bemerkungen zum Randwertproblem für das ebene Problem.

$$\int (\mathfrak{X}\dot{x} + \sqrt{(x_1^2 - 1) \dot{x}^2}) dt = \text{Extremum.}$$

$$\text{rot } \mathfrak{X} = (0, 0, a)$$





Der Broye-Kanal mit dem Witzwilerggebiet. Blick nach Osten, zwischen den schmalen Schutzwäldern der „Erlenhof“; auf der durch die Ueberschwemmung entstandenen Insel, im Bild links vom Kanal, der „Neuhof“. Rechts die Aecker am Fusse des Mont Vully.

Nr. 8039 B. R. B. 3. 10. 1939.



Die Aare unterhalb Büren mit der Brücke bei Arch. Das Bild zeigt die leichte Ueberhöhung des Aarebettes gegenüber dem Ueberschwemmungsgürtel links der Aare und die mit Wasser gefüllten alten Aareschlüngen. 25. November 1944. Nr. 8039 B. R. B. 3. 10. 1939.