

Sitzungsberichte der Mathematischen Vereinigung in Bern

Objekttyp: **AssociationNews**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern**

Band (Jahr): **6 (1949)**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

<http://www.e-periodica.ch>

Sitzungsberichte

der Mathematischen Vereinigung in Bern

152. Sitzung, Freitag, den 30. Januar 1948.

Herr **Dr. Hans Bieri** (Bern) spricht über das Thema: „**Aufgaben und Methoden der Variationsrechnung**“.

Hilbert hat in seinen Vorlesungen ein ganz allgemeines Maximum-Minimumproblem formuliert, welches sowohl die Aufgaben der Variationsrechnung als auch die Theorie der gewöhnlichen Extrema umfasst: Gegeben ist eine unendliche Menge irgendwelcher mathematischer Objekte a, b, \dots und jedem Individuum dieser Menge ist eine reelle Zahl J_a, J_b, \dots zugeordnet; es sollen diejenigen Individuen dieser Menge bestimmt werden, welchen die grösste resp. kleinste Zahl zugeordnet ist.

Bedeutet die Objekte Funktionen, die Zahlen Werte von bestimmten Integralen mit wohldefinierten Grenzen und lässt man noch Nebenbedingungen allgemeiner Art zu, so treiben wir Variationsrechnung. Endziel ist die Herleitung des vollständigen Systems von notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das absolute Extremum.

Während in der Theorie der gewöhnlichen Maxima und Minima der grundlegende Satz von Weierstrass uns ein für allemal die Lösbarkeit der Extremalaufgabe sichert, besteht in der Variationsrechnung die eigentümliche Schwierigkeit, dass Probleme, die sich sinnvoll formulieren lassen, dennoch unter Umständen keine Lösung zu besitzen brauchen. So bedarf die Existenz der Lösung eines gegebenen Extremalproblems immer noch eines besonderen Beweises.

Zusammenfassend ist festzustellen, dass das Endziel bei Wahrung der vollen Allgemeinheit der Problemstellung heute noch nicht erreicht ist.

153. Sitzung, Freitag, den 5. März 1948.

Herr **Prof. Dr. Willy Scherrer** (Bern) spricht über: „**Methoden und Begriffe der Flächentheorie**“.

Bei der analytischen Bearbeitung geometrischer Gebilde wie Kurven und Flächen stehen grundsätzlich zwei Gesichtspunkte im Vordergrund: die Gebilde werden 1. anhand ihrer „endlichen“ Gleichungen in ihrer ganzen Ausdehnung diskutiert und 2. auf ihr Verhalten im Kleinen mit Hilfe infinitesimaler Methoden untersucht. Die dem zweiten Gesichtspunkt zugrunde-

liegende Differentialgeometrie hat sich im Laufe der Entwicklung als äusserst fruchtbar erwiesen und insbesondere das Teilgebiet der Flächentheorie ist weitgehend ausgebaut worden.

Nach diesen einleitenden Ausführungen über Ziel und Bedeutung der Flächentheorie erinnert der Referent an die hier grundlegenden Sätze aus der Theorie der Differentialgleichungen und geht dann über zum Begriff der Metrik. Die Länge eines Bogens auf der durch eine Parameterdarstellung gegebenen Fläche wird durch eine quadratische Differentialform, die sog. erste Hauptform geliefert, welche demnach die auf dieser Fläche gültige Geometrie festlegt und somit ihre innere Struktur wiedergibt. Die äussere Struktur der Fläche wird durch ihre Krümmungen beschrieben; ihre Bestimmung verlangt die Einführung der zweiten Hauptform. Gelegentlich wird zur Veranschaulichung besonderer Verhältnisse noch das Normalenbild der Fläche herangezogen und die mit ihm im Zusammenhang stehende dritte Hauptform hängt linear von den ersten beiden ab und liefert nichts Neues.

Weil nun aber die bisher genannten Hauptformen noch wesentlich von der Wahl der Parameterdarstellung der untersuchten Fläche abhängen, sucht die Invariantentheorie Grössen, welche nur noch Funktionen des Ortes auf der Fläche sind. Zwei solche Invarianten sind die G a u s s' s che und die mittlere Krümmung; der weitere Ausbau der Invariantentheorie führt auf die Differentialoperatoren von B e l t r a m i.

Zusammenfassend wird festgestellt, dass die Struktur im Kleinen einer vorgegebenen Fläche nach Bestimmung ihrer Hauptformen recht eingehend erforscht werden kann, und es stellt sich nun im sogenannten Formenproblem die umgekehrte Frage: Gibt es zu vorgegebenen 1. und 2. Hauptform eine zugehörige Fläche?

Die Lösung dieses Formenproblems führt über eine Reihe von Differentialgleichungen, deren Auflösbarkeit an drei Integrabilitätsbedingungen, die Gleichungen von G a u s s und C o d a z z i, geknüpft ist. Die erste offenbart die bemerkenswerte Tatsache, dass die G a u s s' s che Krümmung einer Fläche effektiv von der 1. Hauptform allein abhängt. Im übrigen sind jedoch die Bindungen, welche den sechs Koeffizienten der beiden Hauptformen durch diese drei Gleichungen auferlegt werden, noch ziemlich unübersichtlich.

Zu diesem Problem liefern eigene Untersuchungen des Referenten,¹ ausgehend von einer geeigneten Darstellung der Fläche durch Stützfunktion und Radius und dem über Normalen- und Stützvektor errichteten Dreibein, folgendes Resultat. Das Formenproblem reduziert sich auf nur mehr zwei Bedingungsgleichungen, deren Deutung erkennen lässt, dass die Verhältnisse der Koeffizienten der 2. Hauptform zusammen mit der G a u s s' s chen Krümmung frei vorgegeben werden dürfen und es gilt der Satz: Eine Fläche ist durch die 2. Hauptform und die G a u s s' s che Krümmung nach Vorgabe eines nichtasymptotischen Streifens bestimmt.

Analoge Sätze lassen sich mit 1. Hauptform und mittlerer Krümmung bzw. mit 3. Hauptform und harmonischer Krümmung formulieren.

¹ W. Scherrer: Stützfunktion und Radius I. *Comm. Math. Helv.* 20, 1947, 366–381.

154. Sitzung, Freitag, den 21. Mai 1948.

Herr Prof. Dr. Willy Scherrer (Bern) spricht über das Thema: „Gravitationstheorie und Elektrodynamik“.

Das Ziel der Untersuchung ist, die an anderer Stelle² angegebene kontinuierliche Darstellung der Newton'schen Gravitationstheorie auf die Einstein'sche Gravitationstheorie zu übertragen.

Die traditionelle Darstellung der Einstein'schen Gravitationstheorie bildet eine Mischung aus feldtheoretischen und punktdynamischen Begriffen:

1. Das Gravitationsfeld wird — als metrisches Feld — erzeugt durch den in der Welt kontinuierlich als Quellendichte ausgebreiteten Energie-Impulstensor T_{ik} gemäss den Gleichungen

$$(1) \quad R_{ik} - \frac{1}{2} G_{ik} \cdot R = -\kappa T_{ik}.$$

2. Die Bahnbewegung der Materie wird bestimmt durch die Differentialgleichungen der geodätischen Linie

$$(2) \quad \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx_k}{ds} \cdot \frac{dx_l}{ds} = 0,$$

wo s die Bogenlänge der Weltlinie bedeutet.

3. Schliesslich wird noch der Erhaltungssatz der Materie

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sqrt{-G} \cdot \mu \frac{dx_k}{ds} \right) = 0$$

gefordert, worin μ die kontinuierlich ausgebreitete Ruhmassendichte bedeutet.

Diese drei Gleichungen bilden aber erst ein in sich geschlossenes System, wenn für das oben noch offen gelassene T_{ik} der phänomenologische Energietensor

$$(1') \quad T_{ik} = \mu \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds}$$

eingeführt wird.

Einen ersten Schritt zur Vereinheitlichung des Systems im Sinne der kontinuierlichen Auffassung bildet nun die Einführung des Viererimpulses

$$(4) \quad p^i = \mu \frac{dx_i}{ds},$$

wobei derselbe als Vektorfeld aufzufassen ist. Die Gleichungen (1) und (1') können dann zusammengezogen werden in

$$(I) \quad R_{ik} - \frac{1}{2} G_{ik} R = - \frac{\kappa p^i p_k}{\sqrt{G_{\alpha\beta} \cdot p^\alpha \cdot p^\beta}}.$$

Der damit erzielte Fortschritt kommt darin zum Ausdruck, dass sich jetzt die Gleichungen (2) und (3) als Folgerungen aus (I) ergeben. Die verschwindende Divergenz der linken Seite erzwingt nämlich den Erhaltungssatz für die rechte Seite, der sich bei näherer Analyse als gleichwertig mit (2) und (3) herausstellt.

² W. Scherrer: „Ueber die Gravitation kontinuierlich ausgebreiteter Massen“; vergl. untenstehende Bemerkung.

Trotzdem ist das System (I) im Sinne der allgemeinen Kovarianz noch nicht befriedigend, da für die 14 Grössen G_{ik} und p_i nur 10 unabhängige Differentialgleichungen vorliegen. Die restlichen 4 Gleichungen für die p_i stehen in einseitiger Abhängigkeit von (I) und können nicht als Feldgleichungen angesehen werden.

Es erhebt sich also die Frage, ob man den phänomenologischen Energietensor (1') durch einen Tensor ersetzen könne, der einem selbständigen System von materiellen Gleichungen entspricht. Diese Frage wurde bekanntlich erstmals von Mie und Hilbert auf relativistischer Basis in Angriff genommen.

Bei einer neuerlichen Analyse der Mie'schen Theorie hat der Referent nun festgestellt, dass in den Grundlagen dieser Theorie ein Fehler steckt. Wenn man diesen Fehler ausmerzt, erhält man ohne Schwierigkeit eine neue Variante der Mie'schen Theorie, die ein exaktes Modell zur Einsteinschen Gravitationstheorie liefert und überdies auf eine endliche elektromagnetische Selbstenergie führt.

Eine ausführliche Darstellung wird in den *Helvetica Physica Acta* erscheinen.

Bemerkung zur Mitteilung von W. Scherrer: „Ueber die Gravitation kontinuierlich ausgebreiteter Massen“; Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern, Neue Folge, Bd. 5 1948, S. XLVI—XLVII:

Die daselbst angekündigte ausführliche Darstellung wird nicht in den *Helvetica Physica Acta* — wie irrtümlich angegeben — sondern in den *Commentarii Mathematici Helvetici* erscheinen.

155. Sitzung, Mittwoch, den 7. Juli 1948.

Vortrag von Herrn Dr. H. Wold (Upsala): „*Sur les processus stationnaires ponctuels*“.

Betrachtet werden hier zufallsartig im Laufe der Zeit auftretende Ereignisse, die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines solchen Ereignisses im Zeitintervall $(t/t + dt)$ sei $\Phi(t) dt$. Ein derartiger stochastischer Prozess heisst nach Khintchine stationär, wenn in gleichen Zeiträumen gleichviele Ereignisse zu erwarten sind, das heisst wenn $\Phi(t) = \lambda$ konstant ist.

Der Referent fasst nun den Begriff „stationär“ etwas weiter. Im Ansatz λdt für die Elementarwahrscheinlichkeit wird angenommen, λ hänge zwar nicht vom Beobachtungszeitpunkt t , wohl aber von den zeitlichen Abständen $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ der n letzten beobachteten Ereignisse ab:

$$\lambda = \lambda(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n).$$

Es handelt sich also um eine Nachwirkung zurückliegender Ereignisse auf das zu erwartende nächste Ereignis. Solche Prozesse sind nun nicht mehr stationär, wohl aber in gewissem Sinne translationsinvariant in bezug auf den Beobachtungszeitpunkt t .

Die Verhältnisse werden besonders einfach, wenn $\lambda = \lambda(\tau)$ nur vom zeitlichen Abstand eines einzigen letzten Ereignisses abhängt; zwei Fälle sind dann besonders interessant:

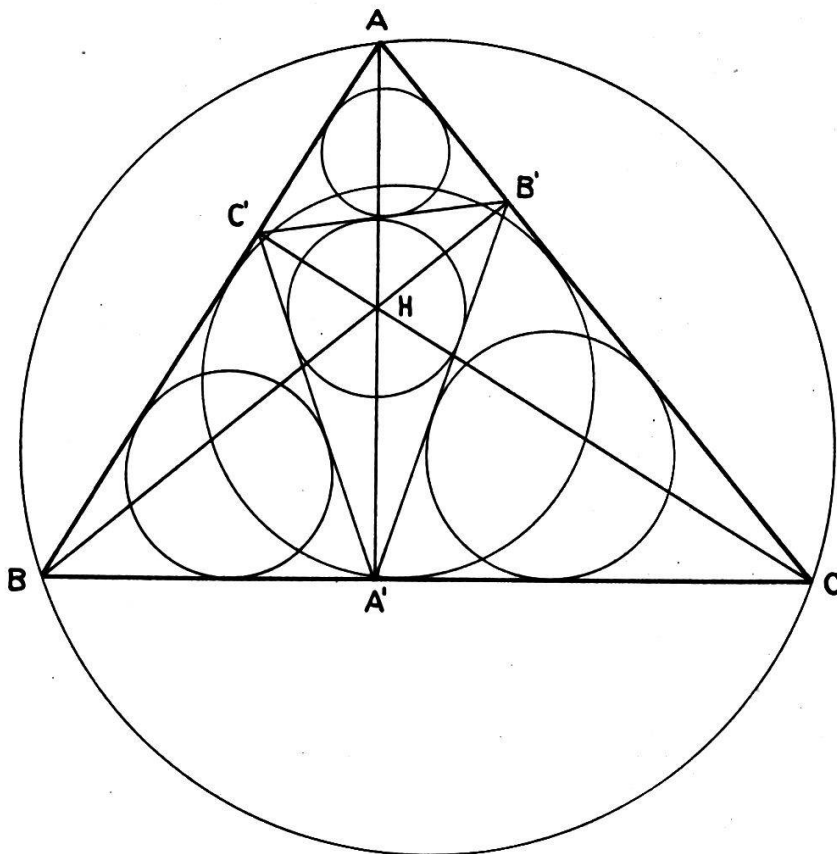
1. $\lambda(\tau)$ nimmt mit τ monoton ab. Es handelt sich dann um eine Nachwirkung, welche z. B. im Falle einer Epidemie stattfindet und welche die Tendenz zu Ereignisanhäufungen zeigt.

2. $\lambda(\tau)$ nimmt mit τ monoton zu. Die hier auftretende Nachwirkung entspricht der Möglichkeit einer Immunisierung und wirkt auf eine Gleichverteilung der Ereignisse hin.

156. Sitzung, Freitag, den 19. November 1948 (Mitteilungsabend).

1. Herr Dr. Arnold Streit (Bern) berichtet über „Eine Eigenschaft des rechtwinkligen Dreiecks“.

Es seien im spitzwinkligen Dreieck ABC (vgl. Fig.).



h_a, h_b, h_c die drei Höhen AA', BB', CC' ;
 R und r Um- bzw. Inkreisradius des Dreiecks ABC ,
 r' der Inkreisradius des Höhenfusspunktdreiecks $A'B'C'$,
 r_a, r_b, r_c die Inkreisradien der Dreiecksabschnitte $AB'C', BC'A', CA'B'$.

Dann gilt die bemerkenswerte Beziehung

$$(1) \quad \underline{h_a + h_b + h_c = 2R + 3r + r' + r_a + r_b + r_c.}$$

Zum Beweis setze man die unter Berücksichtigung von $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ leicht erhältlichen Werte

$$\begin{aligned} h_a + h_b + h_c &= 2R (\sin \alpha \sin \beta + \sin \beta \sin \gamma + \sin \gamma \sin \alpha) \\ &= 2R (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta + \cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha), \\ r &= 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = R (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma - 1), \\ r' &= 2R \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma, \\ r_a + r_b + r_c &= r (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) \end{aligned}$$

ein und (1) verifiziert sich dann auf Grund der für $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ gültigen goniometrischen Bedingungsgleichung

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1 = 0.$$

Für ein in A rechtwinkliges Dreieck fallen die Punkte B', C' und H' mit A zusammen, es wird

$$h_b = c, h_c = b, 2R = a, r' = r_a = 0$$

und es bleibt

$$h_a + c + b = a + 3r + r_b + r_c$$

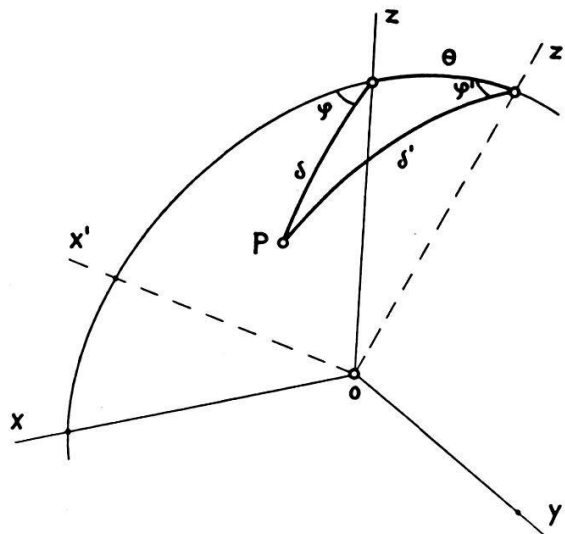
oder im Hinblick auf $b + c - a = 2r$ schliesslich

$$(2) \quad \underline{h_a = r + r_b + r_c.}$$

Diese Formel lässt sich elementargeometrisch am rechtwinkligen Dreieck direkt herleiten.

1. Herr Prof. Dr. Max Schürer (Bern) spricht über die „Herleitung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie“.

Es seien x, y, z die Koordinaten eines Punktes P der Einheitskugel in einem orthogonalen Koordinatensystem; x', y', z' die Koordinaten desselben Punktes in bezug auf ein System, welches aus jenem durch eine Drehung um die y -Achse um den Winkel θ in der xz -Richtung hervorgegangen sei. (Vgl. Fig.).



Es gelten dann die Transformationsgleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} x = x' \cos \theta - z' \sin \theta \\ y = y' \\ z = x' \sin \theta + z' \cos \theta. \end{cases}$$

Führt man Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= \sin \delta \cos \varphi & \text{und analog} & \quad x' = \sin \delta' \cos \varphi' \\ y &= \sin \delta \sin \varphi & & \quad y' = \sin \delta' \sin \varphi' \\ z &= \cos \delta & & \quad z' = \cos \delta' \end{aligned}$$

ein, so folgt in (1)

$$(2) \quad \begin{cases} \sin \delta \cos \varphi = \cos \theta \sin \delta' \cos \varphi' - \sin \theta \cos \delta' \\ \sin \delta \sin \varphi = \sin \delta' \sin \varphi' \\ \cos \delta = \sin \theta \sin \delta' \cos \varphi' + \cos \theta \cos \delta'. \end{cases}$$

Obige Herleitung liefert also simultan Sinuscosinus-, Sinus- und Cosinus-satz; es sind dies gerade die drei Formeln der sphärischen Trigonometrie, welche bei der Berechnung des schiefwinkligen Kugeldreiecks fast ausschliesslich benötigt werden.

3. Herr Prof. Dr. Willy Scherrer (Bern) spricht: „Zur Gravitationstheorie“.

Die Einstein'schen Gravitationsgleichungen

$$(1) \quad R_{ik} - \frac{1}{2} G_{ik} \cdot R = - \kappa T_{ik}$$

liefern auch im Falle $T_{ik} = 0$ noch Lösungen. Das ist in gewissem Sinne paradox, denn von einer Theorie, welche die Materie nicht nur für die Abweichungen von der Trägheitsbahn, sondern auch für die gesamte Raumstruktur verantwortlich macht, sollte man eigentlich erwarten, dass sie im Falle verschwindender Materie degeneriert.

Bei einer Durchmusterung verschiedener Modifikationen hat der Referent nun festgestellt, dass vermutlich Wirkungsprinzipien folgender Gestalt Interesse verdienen:

$$(2) \quad \delta \int [(R - 2 \lambda) G_{ik} \Phi_i \Phi_k + \alpha F] \sqrt{-G} \cdot dx = 0.$$

Dabei bedeutet Φ_i das Viererpotential, F die Wirkungsfunktion des elektromagnetischen Feldes und die Konstante α muss aus dimensionellen Gründen eine reine Zahl sein.

Auf das skalare Analogon

$$(3) \quad \delta \int [(R - 2 \lambda) \psi^2 + \alpha G_{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}] \sqrt{-G} \cdot dx = 0$$

wurde schon bei anderer Gelegenheit hingewiesen.³

Ansätze dieser Art besitzen folgende Vorteile:

1. Sie sind quadratisch homogen in den Feldgrössen und ein Nullsetzen der Materie ist daher unstatthaft.

2. Sie sind auch — abgesehen vom λ -Glied — homogen in den G_{ik} , was im Verein mit 1. günstige Lösungsaussichten für die an sich verwickelten Systeme liefert.

³ W. Scherrer: „Zur Theorie der Elementarteilchen“; Verhandlungen der Schweiz. Naturf. Ges., Basel 1941, S. 86—87.

3. Ihre Feldgleichungen können durch Division durch $G^{ik} \Phi_i \Phi_k$ resp. ψ^2 auf die Einstein'sche Gestalt (1) gebracht werden, was den Vergleich mit der klassischen Theorie erleichtert.

4. Die Variation von Φ_i resp. ψ liefert Relationen, die den Bau von Wellengleichungen aufweisen, durch die vielleicht eine Verbindung zur Wellenmechanik hergestellt werden kann.

157. Sitzung, Freitag, den 10. Dezember 1948.

Herr Prof. Dr. J. G. van der Corput (Amsterdam) spricht: „Ueber den Fundamentalsatz der Algebra“.

Es seien Ω ein archimedisch geordneter kommutativer Körper, z. B. der Körper der reellen Zahlen, I ein Intervall aus Ω und $C(x) \equiv x^\mu + c_1 x^{\mu-1} + \dots + c_\mu$ ein von mehrfachen Wurzeln befreites Polynom aus Ω .

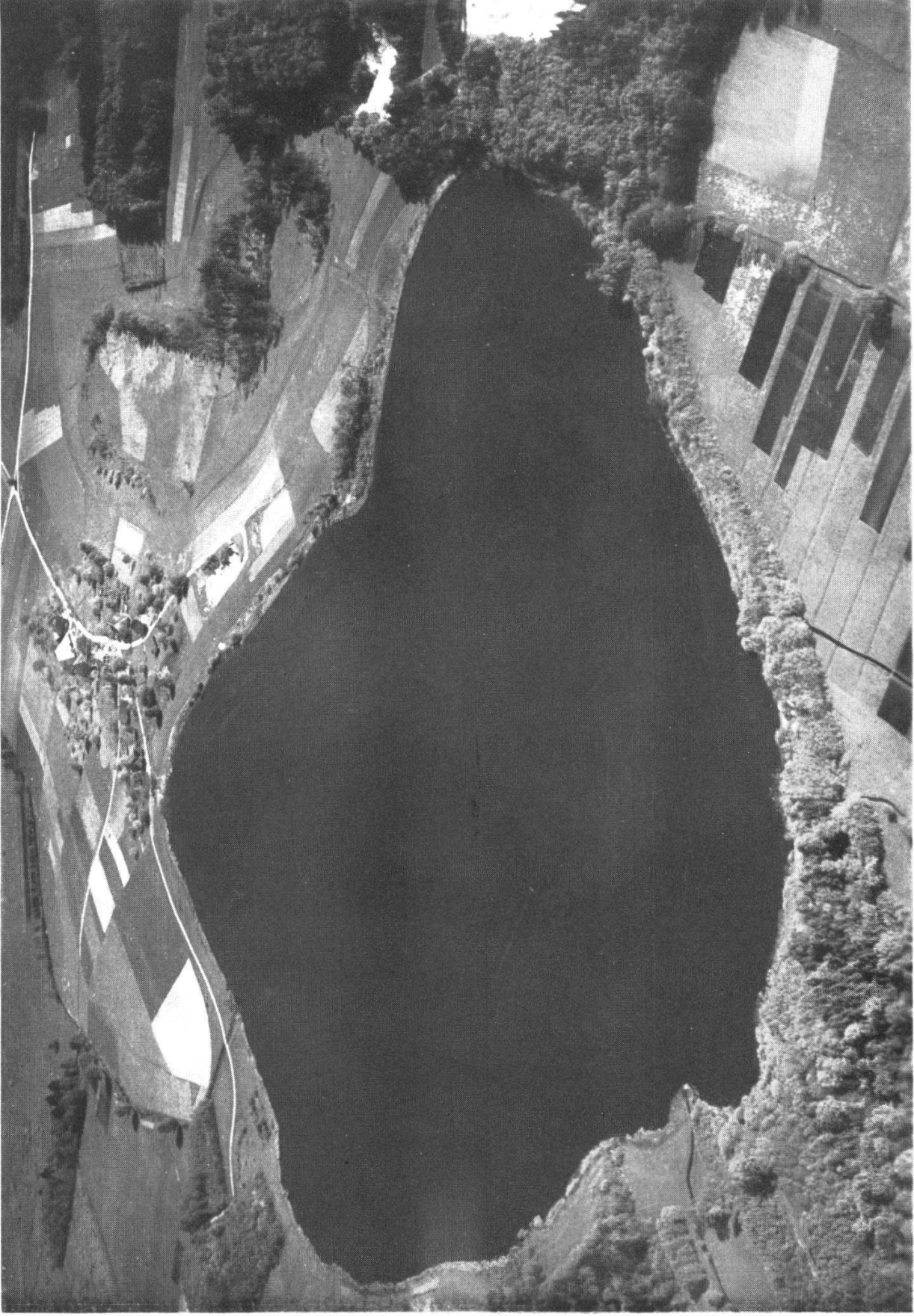
Falls C in I genau einmal das Vorzeichen wechselt, so werden I und C zu einem Paar zusammengefasst: $\gamma = (I, C)$.

In der Menge dieser Paare definiert der Referent die Begriffe der Gleichheit, der Summe und des Produktes; insbesondere wird $(I, C) = u$ gesetzt, falls $C(u) = 0$ mit $u \in I \in \Omega$. Es stellt sich heraus, dass die Paare γ selber wieder einen archimedisch geordneten kommutativen Körper Ω' bilden. Einem Paar $\gamma = (I, C)$ wird dann durch die Bildung

$$C(\gamma) = \gamma^\mu + c_1 \cdot \gamma^{\mu-1} + \dots + c_\mu$$

ein neues Paar (Φ, F) zugeordnet: $C(\gamma) = (\Phi, F)$, worauf die Schlussfolgerung $(\Phi, F) = 0$ und damit formal schliesslich $C(\gamma) = 0$ gelingt.

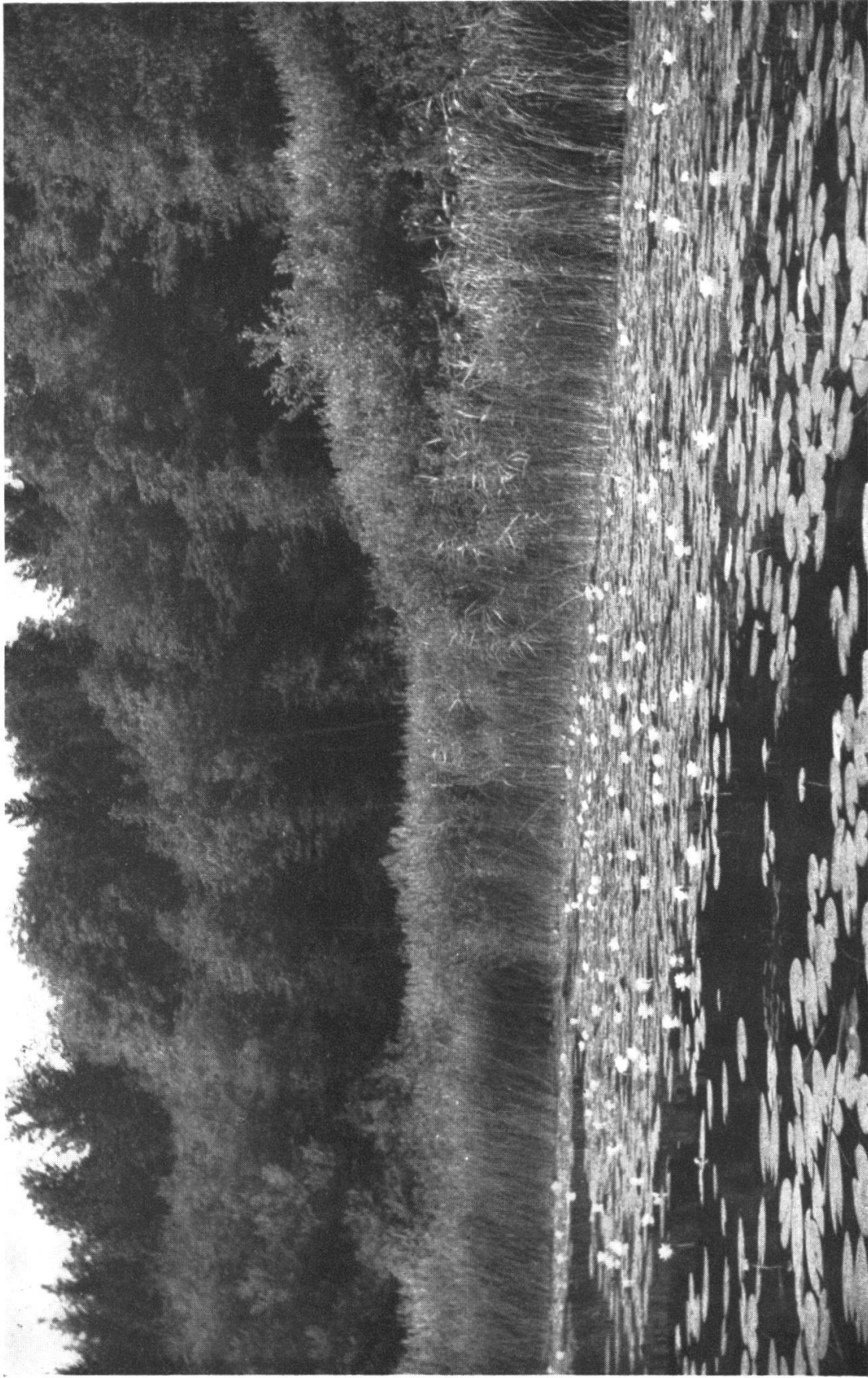
Zusammenfassend handelt es sich hier also um ein Verfahren, das in endlichvielen Schritten die Auflösung des Polynoms im Körper Ω' gestattet.



Swissair-Photo AG. Zürich

Burgäschisee

Aufnahme vor 1927



Aufnahme von Fr. Gyax

Burgäschisee, südöstliches Ufer vor der Absenkung

Sommer 1938