Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft in Bern

Band: 11 (1954)

Artikel: Der Inhaltsbegriff, seine Begründung und Wandlung in älterer und neuerer Zeit

Autor: Hadwiger, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319463

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

H. HADWIGER

Der Inhaltsbegriff, seine Begründung und Wandlung in älterer und neuerer Zeit [1]

I. Zum allgemeinen Inhaltsproblem

1.

An die Spitze der in diesem ersten Teil vorgebrachten kritischen Erwägungen zum allgemeinen Inhaltsproblem stellen wir die Frage: *Was ist der Inhalt eines Körpers?* Unter Würdigung der wichtigsten Aspekte, welche die Entwicklungsgeschichte der Inhaltslehre bietet, lassen sich bei der Beantwortung dieser prinzipiellen Frage zwei verschiedene Grundhaltungen unterscheiden. Es handelt sich um den natürlichen und den formalen Standpunkt. Der natürliche Inhalt ist vorwiegend der klassische Inhalt, aber auch der Inhalt der Elementar- und Mittelschule; der formale Inhalt gehört der Neuzeit an und wird konsequent wohl erst an der Hochschule gelehrt. Der erste Inhaltsbegriff ist naiv-anschaulich, der zweite kritisch-streng und eher abstrakt.

Es sei versucht, die beiden einander gegenübergestellten Begriffe näher zu charakterisieren.

a) Der natürliche Inhalt eines Körpers ist Inhalt an sich, ist im direktesten Sinne die Raumbeanspruchung der Gesamtheit seiner Punkte, die nicht notwendigerweise durch eine reelle Zahl gemessen werden muß. Wenn Zahlen vorkommen, so drücken diese nur das Verhältnis aus, in welchem der Inhalt eines Körpers zu demjenigen eines andern steht. Der Rauminhalt ist hier eine geometrische Größe, eine unmittelbar unserer

[1] Vortrag, gehalten am Fortbildungskurs des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrer in Luzern (6. Oktober 1952).

Anschauung zugängliche und den physischen Wahrnehmungen und Erfahrungen vertraute, selbständige Quantität. Eine Definition ist in dieser grundsätzlichen Weise nicht möglich und überflüssig. Entsprechend sind die Haupteigenschaften des natürlichen Inhalts unmittelbar einleuchtende Wahrheiten und keines Beweises bedürftig.

Neben dem zu allen Zeiten wirkenden natürlichen Empfinden ist in erster Linie die gewaltige dogmatische Kraft der Werke EUKLIDS dafür verantwortlich, daß der natürliche Inhalt innerhalb der folgenden zweitausend Jahre vorherrschte.

Die im elften und zwölften Buch beständig verwendeten Grundeigenschaften des räumlichen Inhalts hat EUKLID bereits im ersten Buch als Größenaxiome niedergelegt. Sie lauten (nach HEIBERG):

1. Dinge, die demselben Ding gleich sind, sind unter sich gleich.
2. Wenn man zu gleichen Dingen gleiche Dinge hinzufügt, so erhält man gleiche Dinge.
3. Wenn man von gleichen Dingen gleiche Dinge wegnimmt, so bleiben gleiche Dinge.
4. Dinge, die zur Deckung gebracht werden können, sind gleich.
5. Das Ganze ist größer als einer seiner Teile und ihm nicht gleich.

Es kommt EUKLID bekanntlich vor allem darauf an, ausgehend vom System der einmal gefaßten und als gültig hingenommenen Postulate wissenschaftlich unanfechtbare Schlüsse zu ziehen. Auf die Frage, ob und warum die Anwendung seiner Größenaxiome auf den räumlichen Inhalt statthaft oder sinnvoll ist, geht er selbst nicht ein.

In diesem Sinn begründet EUKLID im elften Buch die Inhaltslehre der Parallelotope. Im zwölften Buch folgt die wunderbare Beweisführung für den Satz des EUDOXOS, nach welchem die Inhalte zweier Pyramiden mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe gleich sind. Allerdings kommt man hier nicht mit endlich vielen Schlüssen aus, und EUKLID muß ein EUDOXOS zugeschriebenes Beweisverfahren anwenden, welches darin besteht, daß man die gegenteilige Annahme, die Inhalte seien verschieden, auf einen Widerspruch führt. Der betreffende Schluß kann jedoch nur unter Berufung auf ein weiteres Größenaxiom (Axiom des EUDOXOS) streng geführt werden. Dieses besagt etwa folgendes: Wenn man von einer Größe die Hälfte oder mehr wegnimmt, vom Rest wieder die Hälfte oder mehr, und so fortfährt, so ist der Rest nach einer hinreichend großen Anzahl Wiederholungen kleiner als eine beliebig vorgegebene Größe derselben Art. (In dieser Form handelt es sich um einen Satz im

zehnten Buch, hergeleitet aus einer im fünften Buch formulierten Voraussetzung.)

Auf den nämlichen Grundannahmen über den natürlichen Inhalt beruhen auch die späteren Inhaltsbestimmungen von ARCHIMEDES und HERON, wobei der letztere erstmals auch zahlenmäßige Inhaltsberechnungen in die Wissenschaft einführte, während seine großen Lehrmeister die Inhalte als von der Zahl unabhängige, selbständige geometrische Größen nur verglichen.

Nach dem Neuerwachen der Mathematik in Europa ist den unklaren und verworrenen Anfängen wissenschaftlichen Denkens des Mittelalters entsprechend auch der natürliche Inhaltsbegriff zunächst primitiver. In feinerer Form lebt er wieder auf bei CAVALIERI. Nach dessen viel umstrittenen Thesen ist zum Beispiel der Rauminhalt eines Körpers bestimmt durch die Gesamtheit seiner Schnittflächen parallel zu einer Stützebene (Regula), d. h. durch die Summe seiner Indivisibilien. Die vielen umständlichen und zum größten Teil unklaren Versuche, diese Thesen zu verteidigen, sind in ihrem Untergrund getragen von der tief verwurzelten Idee, daß der Inhalt eines Körpers identisch mit der Raumbeanspruchung seiner Punkte ist.

Wesentlich bedeutsamer als die Thesen, die CAVALIERI seiner Theorie zugrunde legte und mit deren Hilfe er — allerdings vergeblich — einen strengen Nachweis seines nützlichen Vergleichsprinzips *(Prinzip von Cavalieri)* anstrebte, ist das Prinzip selbst. Dieses leistete durch die folgenden Jahrhunderte der Inhaltslehre hervorragende Dienste, und auch heute wird es da und dort in den Schulen als nützliches Arbeitsprinzip herangezogen. Allerdings wird es kaum in axiomatischer Form zum Aufbau der Inhaltstheorie gebraucht werden, wie dies zum Beispiel von HILBERT [2] andeutungsweise in Erwägung gezogen worden ist, sondern innerhalb einer bereits streng begründeten Inhaltslehre wird es als *Satz von Cavalieri* mit geeigneter Einschränkung bewiesen. Als beweisbarer Satz tritt es uns auch in den modernen Maßtheorien als sogenanntes *Fubini-Theorem* entgegen.

b) Der formale Inhalt eines Körpers ist eine reelle, nicht negative Zahl, die dem Körper formal zugeordnet wird. Sie heißt auch deutlicher Inhaltsmaßzahl. Die Zuordnung ist in gewissem Rahmen willkürlich, und sie ist auch in verschiedenen neuzeitlichen Inhaltssystemen individuell

---

[2] D. HILBERT, Grundlagen der Geometrie, 4. Auflage, Leipzig 1913, S. 63.

völlig verschieden. Die genaue Festsetzung der Vorschrift, durch welche einem Körper seine Inhaltsmaßzahl zugeordnet wird, ist die Definition des betreffenden Inhalts.

Die Zuordnung muß indessen sinnvoll sein, so daß die Inhaltsmaßzahl geeignet ist, ein Maß für die Raumerfüllung des Körpers darzustellen. So wird eine Inhaltsdefinition nur dann als zulässig anerkannt, wenn sich die Eigenschaften nachweisen lassen, die in den klassischen Grundannahmen — den Größenaxiomen EUKLIDS — zum Ausdruck kommen. Dies entspricht einer stillschweigend und allgemein anerkannten Konvention.

Diese verbindlichen Forderungen sind — in neuzeitlicher Form ausgedrückt — die folgenden: Der Inhalt muß

1. *bewegungsinvariant,*
2. *additiv,*
3. *normiert,*
4. *definit*

sein. Bezeichnet $X(A)$ den Inhalt einer Punktmenge A, so lassen sich die vier *Inhaltspostulate* wie folgt genauer formulieren:

1. $X(A) = X(B)$, falls $A \simeq B$ ist;
2. $X(A + B) = X(A) + X(B)$, falls $AB = 0$ ist;
3. $X(E) = 1$, falls E den Einheitswürfel bezeichnet;
4. $X(A) \geq 0$.

$A \simeq B$ bedeutet, daß A und B kongruent sind. $A + B$ ist die Vereinigungsmenge von A und B, und weiter bezeichnet 0 die leere Menge. Die Bedingung $AB = 0$ sagt also, daß der Durchschnitt AB leer ist, und dies ist gleichbedeutend damit, daß A und B disjunkt sind, d. h. keine gemeinsamen Punkte aufweisen.

Innerhalb der formalen Inhaltstheorie lassen sich zwei Entwicklungsarten unterscheiden, nämlich einmal eine konstruktive, wobei besondere Inhaltssysteme durch individuelle Inhaltsdefinitionen konstruiert werden, und dann eine axiomatische, wobei die vier oben genannten Postulate und eventuell noch weitere an die Spitze der Theorie gestellt werden und wobei sich die Untersuchungen auf die Gesamtheit aller Inhaltssysteme erstrecken, die den gestellten Forderungen genügen. Die individuellen Systeme der konstruktiven Theorie sind dann partikuläre Lösungen des Hauptproblems der axiomatischen Theorie.

2.

Ein weiteres Eindringen in das allgemeine Inhaltsproblem wird uns ermöglicht, indem wir zur Frage Stellung nehmen: *Was ist ein Körper?* Es ist für die Mathematik der vorkritischen Zeit geradezu charakteristisch, daß der genaueren Abgrenzung der Gültigkeit einer Theorie zu wenig Beachtung geschenkt wurde. So wird in älteren Abhandlungen häufig vom Inhalt eines Körpers gesprochen, es werden Lehrsätze und Formeln abgeleitet, ohne daß irgendwo gesagt ist, was denn ein Körper überhaupt ist.

Um einen an sich lehrreichen Gedankengang verfolgen zu können, wollen wir hier einige Körpertypen erwähnen, die in ganz ungefährer Weise für den Stand der Inhaltslehre größerer Epochen der Mathematik charakteristisch sind (Abb. 1):

A. ebenflächig begrenzte Körper, d. h. Polyeder (EUKLID);

B. krummflächig begrenzte Körper, elementares Baugesetz (ARCHIMEDES, HERON);

C. krummflächig begrenzte Körper, nicht elementares Baugesetz, aber hohe Symmetrie, zum Beispiel Rotationskörper (KEPLER, CAVALIERI);

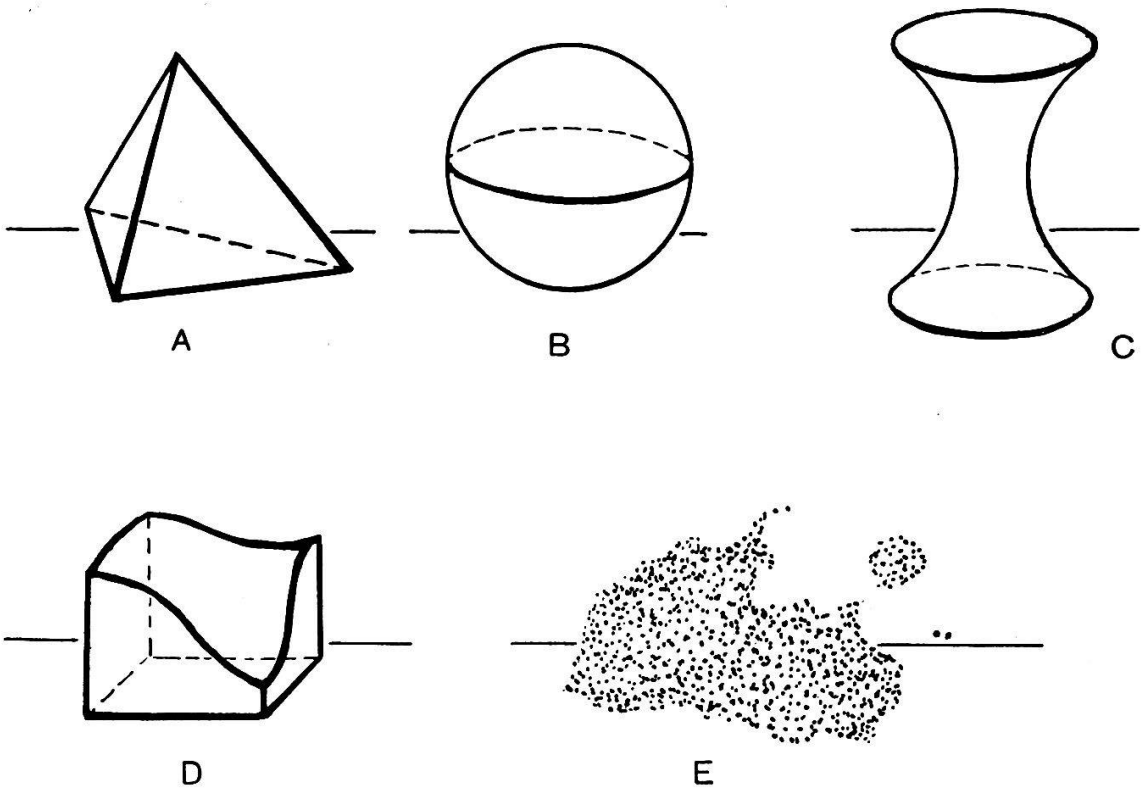

Abb. 1

D. krummflächig begrenzte Körper, nicht elementar und ohne Symmetrie (LEIBNIZ, BERNOULLI);

E. nicht flächig begrenzte Körper, Punktmengen (CANTOR, JORDAN, LEBESGUE).

Von A bis E zeigt sich eine fortschreitende Lockerung des mathematischen Gesetzes, das Bau und Form des Körpers beherrscht. Im letzten Stadium hat sich die Oberfläche im klassischen Sinn überhaupt aufgelöst, und ein Bau- oder Formgesetz im herkömmlichen Sinn braucht nicht mehr vorzuliegen. Die völlig beliebige Punktmenge — eine gewisse Paradoxie liegt in dieser Feststellung — ist der einfachste Körper, einfach deshalb, weil keine bindenden Formgesetze genannt werden müssen. Abgesehen von der Beschränktheit, die wir fordern wollen, braucht der Körper keine Eigenschaften zu haben.

Es ist klar, daß eine Inhaltslehre, welche diese allgemeinsten Körper, also beliebig beschränkte Punktmengen, erfaßt und sie alle auszumessen erlaubt, die einfachste und durchschlagendste Lösung des Inhaltsproblems darstellen würde.

3.

Mit der Bemerkung am Schluß des vorstehenden Abschnittes werden wir von selbst zu einer entscheidenden Fragestellung des allgemeinen Inhaltsproblems geführt, nämlich zur Frage: *Hat jeder Körper einen Inhalt?* Im Rahmen der formalen Inhaltstheorie müßte man sachgemäßer und genauer fragen: Kann man jeder beliebigen beschränkten Punktmenge des Raumes eine Inhaltsmaßzahl so zuordnen, daß die vier üblichen Inhaltspostulate erfüllt sind?

Zunächst wird man geneigt sein, eine bejahende Antwort auf diese Frage zu erwarten; dies ganz besonders dann, wenn unsere Einstellung hierzu noch stark von der Idee des natürlichen Inhalts beherrscht wird. Wer aber schon Gelegenheit hatte, sich vom Vorhandensein sehr merkwürdiger Punktmengen zu überzeugen, wird eher eine skeptische Haltung zu unserer Frage einnehmen.

Eine Punktmenge zum Beispiel, die gleichzeitig mit ihrer Komplementärmenge in einem gewissen Raumteil überall dicht liegt, wie etwa die im Einheitswürfel liegende Punktmenge $P = (0 \leq x, y, z \leq 1;\ x, y, z$ rational), ist, vom Standpunkt der neuzeitlichen Inhaltslehre aus betrachtet, noch völlig harmlos. Das Raum- oder Zahlkontinuum, das der heutigen Mathematik zugrunde liegt, zeigt in seiner Unendlichkeit nach innen hin

noch ganz andere Möglichkeiten. Die geübte Hand des Mathematikers der heutigen mengentheoretischen Epoche kann aus dieser Unendlichkeit im Kleinen in wieder unendlicher Vielfalt Punkte und Zahlen herausgreifen und damit Gebilde erstehen lassen, wo unsere natürliche Anschauung nicht nur nicht mehr zu folgen vermag, sondern verspottet zu werden scheint.

Über Ergebnisse dieser Art sei im nächsten Abschnitt ausführlich berichtet.

4.

Zwei Punktmengen P und Q des Raumes heißen *multikongruent* (endlich-gleich), wenn sie in paarweise kongruente disjunkte Teilmengen zerlegt werden können. Ausführlicher: P und Q sind multikongruent vom Grade n, geschrieben $P \sim Q$, wenn es zwei Zerlegungen

$$P = \sum_1^n P_i, \qquad Q = \sum_1^n Q_i$$

von P und Q in Teilmengen P_i und Q_i so gibt, daß $P_i P_j = Q_i Q_j = 0$ für für $i \neq j$ und $P_i \simeq Q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gilt. Die Kongruenz $P_i \simeq Q_i$ ist in dem Sinn scharf zu verstehen, daß die beiden Punktmengen Punkt für Punkt zur Deckung gebracht werden müssen. So sind beispielsweise die beiden Strecken $P = (0 \leq x \leq 1)$ und $Q = (0 \leq x < 1)$ nicht kongruent.

Wir illustrieren eine bestehende Multikongruenz für die beiden ebenen Punktmengen $P = (0 \leq x < a,\ 0 \leq y < b)$ und $Q = (0 \leq x,\ y < c)$, wobei $c^2 = ab$ ist (Abb. 2). Die Multikongruenz wird hier durch Teilmengen

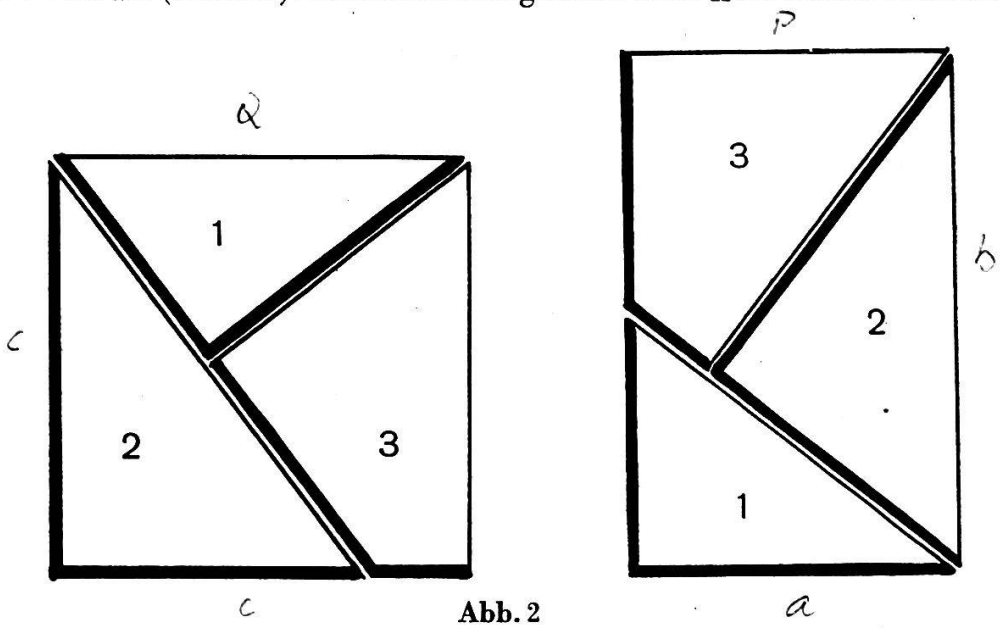

Abb. 2

realisiert, die selbst wieder polygonal sind. Unter Wahrung dieser Nebenbedingung sind zum Beispiel die entsprechenden abgeschlossenen bzw. auch die beiden offenen Rechtecke sicher nicht mehr multikongruent.[3]

Man verwechsle aber diese eingeschränkte Multikongruenz nicht mit der Zerlegungsgleichheit im Sinne der Elementargeometrie, wo bekanntlich auf die Zugehörigkeit der Randpunkte nicht geachtet werden muß.

Nun haben BANACH und TARSKI [4] einen Multikongruenzsatz bewiesen, der einen überraschenden Sachverhalt enthüllt. Es gilt nämlich: Zwei beliebige beschränkte Punktmengen A und B des Raumes, welche innere Punkte aufweisen, sind multikongruent, d. h. es gilt die Relation $A \sim B$.

Also läßt sich beispielsweise ein kleiner Körper von Erbsengröße in eine gewisse Anzahl disjunkter Teile zerlegen, mit denen man dann eine Kugel von der Größe der Erde wieder lückenlos zusammensetzen kann; die Teilmengen müssen hierbei nur geeignet gedreht und passend zusammengefügt werden! Allerdings hat man sich dabei nicht vorzustellen, daß sich die Teile mit dem Messer aus der Erbse herausschneiden ließen, sondern man denke sich diese etwa als kleine, nebelhafte Punktwölkchen mit einer außerordentlich komplizierten Feinstruktur.

Die Beweise sind im übrigen reine Existenzbeweise und liefern absolut keine Richtlinien, die zu einer effektiven Berechnung der einzelnen Teilmengen zur Realisierung der «paradoxen» Multikongruenz in einem individuellen Fall dienen könnten. Die Beweiskonstruktion setzt auch die Wohlordnung des Kontinuums voraus, welche sich nur unter Berufung auf das Auswahlaxiom der Mengenlehre exakt begründen läßt.

Man beachte, daß ausdrücklich das Vorhandensein innerer Punkte verlangt werden muß. Dies hängt damit zusammen, daß diese unglaubwürdigen Möglichkeiten nur aus der unendlichen Tiefe des Kontinuums herausgeholt werden können. Für nur abzählbare oder gar endliche Punktmengen ist der Satz natürlich falsch.

Der Grad n der Multikongruenz $A \sim B$ kann sogar — allerdings grob — abgeschätzt werden. Bringt man A und B in eine solche Lage, daß die beiden Mengen einen inneren Punkt P gemeinsam haben, so gibt es zwei konzentrische Kugeln K und K_0 mit den Radien R und R_0 und dem Mittelpunkt P, so daß einerseits $K_0 \sqsubset AB$ und andererseits $A + B \sqsubset K$ gilt.

---

[3] H. HADWIGER, Multikongruenz ebener Mengen und pythagoreischer Lehrsatz, Bull. Politechn. Gh. Asachi *2*, 98—105, 1947.

[4] ST. BANACH, A. TARSKI, Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes, Fund. math. *6*, 244—277, 1924.

Zur Realisierung einer Multikongruenz von A und B reicht dann ein n aus, für das [5]

$$n < 321^2 \, (R/R_0)^{12}$$

Betrachten wir beispielsweise den Fall: A = Einheitskugel, B = konzentrischer Einheitswürfel; $R = 1, R_0 = 1/2$, so ergibt sich die Schätzung

$$n < 4{,}23 \cdot 10^8.$$

In besonderen Fällen, wobei eine dem Fragenkreis speziell angepaßte hohe Symmetrie vorliegt, reduziert sich der Multikongruenzgrad n ganz erheblich.

Ein derartiger ausgezeichneter Fall ist durch die Kugelverdoppelung gegeben, wo A eine Kugel und B die Vereinigung zweier mit A kongruenter Kugeln ist.

Nach einer berühmten, von HAUSDORFF [6] angegebenen Kugelzerlegung läßt sich folgern, daß $n = 10$ bereits ausreicht. v. NEUMANN [7] hat weiter bemerkt, daß dies schon für $n = 9$ der Fall ist. Endlich konnte SIERPINSKI [8] die ausreichende Anzahl auf $n = 8$ bringen. Den Schlußstrich zog ROBINSON [9], indem er nachwies, daß $n = 5$ ausreicht und daß ein noch kleinerer Multikongruenzgrad nicht mehr in Betracht fällt. Dieses letzte und endgültige Ergebnis wollen wir symbolisch durch eine schematische Darstellung (Abb. 3) ergänzen, in der zum Ausdruck kommt, wie sich die fünf Teile der einen Kugel auf die beiden andern verteilen.

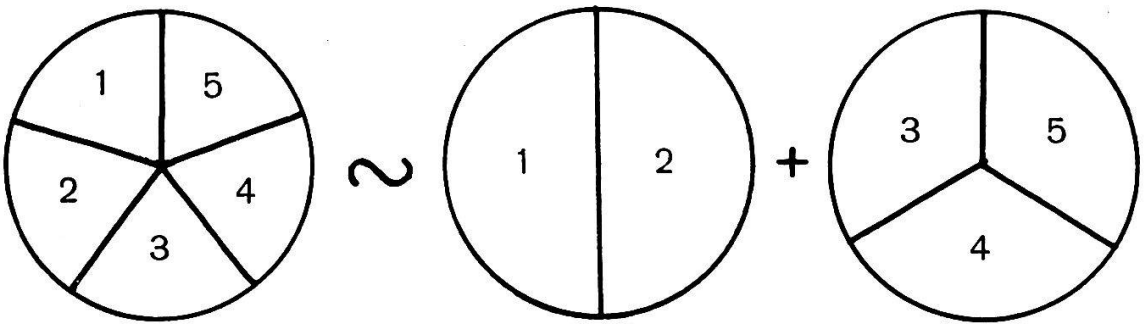

Abb. 3

[5] H. HADWIGER, Die Multikongruenz und der Satz von Banach und Tarski, Abh. Math. Seminar Hamburg *16*, 48—53, 1949.

[6] F. HAUSDORFF, Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen, Math. Ann. *75*, 428—433, 1914.

[7] J. v. NEUMANN, Zur allgemeinen Theorie des Maßes, Fund. math. *13*, 73—116, 1929.

[8] W. SIERPINSKI, Sur le paradoxe de MM. Banach et Tarski, Fund. math. *33*, 229—234, 1945; Sur le paradoxe de la sphère, ibid. *33*, 235—244, 1945. Derselbe Autor gibt weitere Hinweise und Literaturangaben zu diesen und verwandten Fragen in: Elemente der Math. *5*, 1—4, 1950.

[9] R. M. ROBINSON, On the decomposition of spheres, Fund. math. *34*, 246—260, 1947.

Abschließend soll noch erwähnt werden, daß paradoxe Multikongruenzen dieser Art im ein- und zweidimensionalen Raum nicht möglich sind. Verantwortlich hierfür ist die Struktur der Bewegungsgruppe, wie man nach den Resultaten sehr allgemeiner Untersuchungen von v. NEUMANN [10] weiß. Paradoxien sind dann unmöglich, wenn die wirkende Gruppe abelsch ist oder einen abelschen Normalteiler mit abelscher Faktorgruppe aufweist. Das erste trifft für die lineare, das zweite für die ebene Bewegungsgruppe zu.

5.

Wir ziehen nun aus den Feststellungen des vorigen Abschnitts einige wichtige Folgerungen.

Zunächst wird die Frage, ob jedem Körper ein Inhalt zukommen kann, unbedingt verneint werden müssen. In der Tat: Es sei $A = E$ und $B = E + E'$, wobei E und E' disjunkte Einheitswürfel sind. Nach dem Multikongruenzsatz von BANACH und TARSKI gilt aber $A \sim B$. Wäre nun X ein universeller Inhalt, so daß jeder beschränkten Punktmenge P ein Inhalt $X(P)$ zukäme und daß die vier Inhaltspostulate erfüllt wären, so würde sich zunächst im Hinblick auf die Definition der Multikongruenz und mit Beanspruchung der eben erwähnten Postulate $X(A) = X(B)$ und weiter also $X(E) = 2X(E)$ oder $X(E) = 0$ ergeben. Andererseits aber müßte $X(E) = 1$ sein. Der Widerspruch löst sich nur so, daß die für die Realisierung der Multikongruenz erforderlichen Teilmengen nicht alle einen Inhalt haben können.

Ausgestattet mit dieser neuen Sachkenntnis, kehren wir zur Lehre vom natürlichen Inhalt zurück und ziehen einige Konsequenzen.

Sollte der natürliche Inhalt mehr sein als nur eine historisch-vorwissenschaftliche oder heuristisch-didaktische und zweckmäßige Begriffsbildung, sollte er also einer absoluten mathematischen Wahrheit entsprechen, so müßten wohl alle Körper einen natürlichen Inhalt aufweisen. Eine künstliche Grenze zwischen solchen, die ihn haben, und solchen, die ihn nicht haben, verträgt sich kaum mit der Absolutheit des Begriffes. Der natürliche Inhalt müßte also universell sein. Nun haben wir aber soeben gesehen, daß es einen solchen nicht geben kann.

Der natürliche Inhalt hat sich demnach bei strenger und konsequenter Kritik als widerspruchsvoll erwiesen, und er kann nicht zusammen mit

---

[10] loc. cit. Anm. 7.

den axiomatisch als gültig erklärten Grundeigenschaften zum Aufbau einer exakten wissenschaftlichen Inhaltslehre dienen.

Endlich ziehen wir noch Konsequenzen für die formale Inhaltslehre.

In einem bewegungsinvariant aufgebauten Inhaltssystem können nie alle beschränkten Punktmengen meßbar sein, d. h. die feste Zuordnung einer den Inhaltspostulaten genügenden Inhaltsmaßzahl $X(A)$ ist immer nur für die Mengen A einer gewissen Mengenklasse möglich. Diese Mengenklasse *(Inhaltsfeld)* umfaßt die im betreffenden Inhaltssystem meßbaren Punktmengen. Die schwächsten Forderungen *(Feldpostulate)*, die man üblicherweise in jedem Inhaltssystem als erfüllt betrachtet, sind die folgenden: Das Inhaltsfeld soll

1. *bewegungsfrei,*
2. *additiv,*
3. *normal*

sein. Bezeichnet $\mathfrak{F}$ das Inhaltsfeld, so gilt also:

1. Aus $A \in \mathfrak{F}$ und $A \simeq B$ folgt $B \in \mathfrak{F}$;
2. Aus $A, B \in \mathfrak{F}$ und $AB = 0$ folgt $A + B \in \mathfrak{F}$;
3. Es gilt $E \in \mathfrak{F}$.

Inhaltsfeld $\mathfrak{F}$ und Inhaltsmaßzahl X bilden zusammen das *Inhaltssystem* $(\mathfrak{F}, X)$.

6.

Bevor wir nun im Rahmen der formalen Inhaltstheorie näher auf besondere Inhaltssysteme eintreten, also den natürlichen Inhalt zugunsten des formalen Inhalts endgültig verabschieden, sei noch eine Zwischenbemerkung pädagogischer Art eingeflochten.

Wie bereits im ersten Abschnitt erwähnt wurde, basiert die Inhaltslehre des Mittelschulunterrichts vornehmlich auf dem Begriff des natürlichen Inhalts. Obgleich nun die konsequente Weiterverfolgung dieses Begriffs im Sinne unserer früheren Ausführungen zu Widersprüchen führt, wäre es kaum angezeigt, die Ausmerzung des natürlichen Inhalts aus dem Elementar- und Mittelschulunterricht anstreben zu wollen.

Einmal ist diese Begriffsbildung eine historische Tatsache; eine in Stringenz und Form vollkommene Maßtheorie der Neuzeit hätte niemals am Anfang der historischen Entwicklung der Inhaltslehre stehen können. Sie kann aber auch nicht am Anfang der Lehrjahre eines jungen Mathematikers stehen, in dessen geistiger Entwicklung sich bekanntlich ähnliche Wandlungen vollziehen wie innerhalb der Genesis der Wissenschaft.

Weiter darf und muß sich der Mathematikunterricht mittlerer Stufe auf die natürliche Anschauung und auf die Anwendung des gesunden Menschenverstandes berufen. Es wäre verfehlt, dem Lernenden zu demonstrieren, daß in der Mathematik kein sicherer Verlaß auf den gesunden Menschenverstand ist, daß man seiner natürlichen Anschauung der Dinge mißtrauen soll, daß man alles und jedes mit umständlichen Schlüssen beweisen muß, auch dann, wenn wir unbedingt klar und unmittelbar zu sehen glauben.[11]

Was nun aber den Lehrer betrifft, so ist es klar, daß dieser aus didaktischen Gründen wohl gewisse Schwierigkeiten übergehen kann, sie selbst jedoch genau kennen sollte. Auch muß er in der Lage sein, nötigenfalls die vorkritische und heuristische Lehrform durch eine wissenschaftlich strenge Begründung zu ersetzen.

II. Der elementare Inhalt

1.

Ein abgeschlossener Körper, der sich im Sinne der Elementargeometrie in endlich viele abgeschlossene und eigentliche Tetraeder zerlegen läßt, heißt Polyeder. In gewissem Sinne sind die Polyeder die elementaren Punktmengen, und ihr Inhalt — der elementare Inhalt — ist für den konstruktiven weitern Aufbau der höheren Inhaltssysteme grundlegend. Die elementare Inhaltstheorie sollte aber entsprechend dem elementargeometrischen Charakter der Körper, von welchen sie handelt, mit möglichst einfachen Schlüssen durchführbar sein; insbesondere sind unendliche Zerlegungsprozesse nach Möglichkeit zu vermeiden.

In diesem ersten Abschnitt nehmen wir zu verschiedenen Versuchen, die Theorie des Polyederinhalts streng und doch möglichst elementar zu begründen, knapp skizzierend Stellung.

Viele indirekte Ansätze haben das Ziel, hierbei lediglich mit dem Begriff der Zerlegungs- oder Ergänzungsgleichheit im Sinne der Elementargeometrie auszukommen. Vorbild ist hier die von HILBERT [12] mit axiomatischer Schärfe begründete Theorie des Polygoninhalts in der Ebene.

---

[11] Vgl. F. ENRIQUES, Fragen der Elementargeometrie, deutsch von Thieme, I. Teil, Leipzig 1911, S. 200.

[12] loc. cit. Anm. 2, Kap. IV.

Zwei Polyeder P und Q heißen *zerlegungsgleich*, geschrieben $P \sim Q$, wenn sie sich in gleich viele Teilpolyeder P_i und Q_i zerlegen lassen, symbolisch durch $P = \sum_1^n P_i$ und $Q = \sum_1^n Q_i$ ausgedrückt, so daß diese paarweise kongruent sind, geschrieben $P_i \cong Q_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Die Teilpolyeder dürfen Randpunkte, aber keine inneren Punkte gemeinsam haben; dies deckt sich mit dem Begriff der Zerlegung, wie er in der Elementargeometrie angewendet wird.

Zwei Polyeder P und Q heißen *ergänzungsgleich*, wenn sie sich durch Hinzufügen von geeigneten zerlegungsgleichen Polyedern U und V in zerlegungsgleiche Polyeder überführen lassen, so daß also $U \sim V$ und $P + U \sim Q + V$ gilt. Erst vor wenigen Jahren ist der Beweis gelungen[13], daß ergänzungsgleiche Polyeder stets auch zerlegungsgleich sind. Diese Unterscheidung, die seit EUKLID stets beachtet werden mußte, fällt also heute weg.

Der erste und nächstliegende *indirekte* Ansatz zum Aufbau einer Theorie des Polyederinhalts besteht nun darin, die Inhaltsgleichheit zweier Polyeder P und Q durch die Zerlegungsgleichheit $P \sim Q$ zu definieren.

Nun hat aber bereits GAUSS[14] in Erwägung gezogen, HILBERT[15] bestimmt vermutet und schließlich DEHN[16] nachgewiesen, daß beispielsweise Tetraeder mit übereinstimmender Grundfläche und gleicher Höhe existieren, welche nicht zerlegungsgleich sind. Hieraus folgt, daß es auf der oben erwähnten Grundlage nicht möglich ist, die Inhaltsgleichheit zweier Tetraeder dieser Art nachzuweisen. Ein Vergleich der beiden Polyeder durch Zerlegen in kongruente Teilpolyeder fordert eine Zerschneidung in abzählbar unendlich viele Teile. Das Verfahren entspricht dann dem EUKLIDischen Beweis und ist als infinit aus methodischen Gründen abzulehnen.

DEHN[17] und ENRIQUES[18] haben vorgeschlagen, zwei Polyeder dann inhaltsgleich zu nennen, wenn keines von beiden mit einem echten Teil-

---

[13] J. P. SYDLER, Sur la décomposition des polyèdres, Comment. Math. Helv. *16*, 266—273, 1943/1944.

[14] Werke VIII, S. 241, 244.

[15] D. HILBERT, Mathematische Probleme, Gött. Nachr. 1900, 253—297, speziell S. 266.

[16] M. DEHN, Über den Rauminhalt, Math. Ann. *55*, 465—478, 1901. Vgl. auch H. HADWIGER, Zum Problem der Zerlegungsgleichheit der Polyeder, Archiv der Math. *2*, 441—444, 1949/1950.

[17] Vgl. den Artikel Elementargeometrie von M. ZACHARIAS, Enzykl. III AB 9, S. 946.

[18] loc. cit. Anm. 11, S. 202.

polyeder des andern zerlegungsgleich ist. Aber auch jetzt läßt sich nicht beweisen, daß die beim vorstehenden Versuch erwähnten Polyeder inhaltsgleich sind; es könnte doch das eine mit einem echten Teil des andern zerlegungsgleich sein. Wie soll man überhaupt auf dieser Grundlage schon nachweisen, daß nicht etwa jedes Polyeder mit einem echten Teil seiner selbst oder eines beliebigen andern zerlegungsgleich ist? Mit dem gesunden Menschenverstand will sich dies nicht so recht vertragen; aber wie das Gegenteil nachweisen? Der Unmöglichkeitsbeweis ist natürlich trivial mit Hilfe des Inhalts; aber über den verfügen wir hier gerade nicht; er soll ja auf diese Weise begründet werden.

Diese Schwierigkeit hat vor der Jahrhundertwende auch im ebenen Falle viel zu denken und zu disputieren gegeben. Man suchte vergeblich einen rein geometrischen Nachweis, daß eine solche paradoxe Zerlegungsgleichheit unmöglich ist, kam aber auch nicht ins klare darüber, ob man dies zu beweisen oder durch ein geeignetes Axiom — das DE-ZOLTsche Postulat — auszuschließen habe.

Einen Vorstoß in anderer Richtung machte, einer Anregung von HILBERT folgend, SÜSS [19]. Es gelang ihm, zu zeigen, daß zwei im klassischen Sinn inhaltsgleiche Polyeder stets Cavalieri-aequivalent sind, d. h. sich durch Hinzufügen Cavalieri-gleicher Tetraeder in Polyeder verwandeln lassen, die ihrerseits wieder in lauter Cavalieri-gleiche Tetraeder zerlegbar sind. Dabei sind Cavalieri-gleiche Tetraeder solche mit übereinstimmender Grundfläche und gleicher Höhe. Auf diese Weise ist gezeigt, daß sich die Inhaltsgleichheit als Cavalieri-Aequivalenz definieren ließe.

Direkte Ansätze verfolgen das Ziel, die einem Polyeder zugeordnete Inhaltsmaßzahl direkt zu definieren. Das nächstliegende Vorgehen besteht hier wohl darin, daß man als Inhaltsmaßzahl des Tetraeders den dritten Teil des Produktes aus Grundfläche und Höhe vorschreibt, zunächst zeigt, daß dieser Wert von der Wahl der Grundfläche unabhängig ist, und den Nachweis führt, daß bei einer Tetrangulierung eines Polyeders in Tetraeder die algebraische Summe der Inhaltsmaßzahlen der Teiltetraeder von der individuellen Zerlegung des Polyeders unabhängig wird. Diese Summe heißt dann Inhaltsmaßzahl des Polyeders. Dieses Programm wurde erstmals von SCHATUNOWSKI [20] und SÜSS [21] bewältigt.

---

[19] W. SÜSS, Begründung der Lehre vom Polyederinhalt, Math. Ann. *82*, 297—305, 1920.

[20] S. O. SCHATUNOWSKI, Über den Rauminhalt der Polyeder, Math. Ann. *57*, 496—508, 1903.

[21] W. SÜSS, Begründung der Inhaltslehre im Raum ohne Benutzung von Stetigkeitsaxiomen, Diss., Frankfurt a. M. 1920.

Vor allem der elementargeometrische Nachweis der Invarianz der Summe gestaltet sich recht mühsam. Nach ZACHARIAS [22] befriedigt das Vorgehen, obgleich es ganz ohne infinite Betrachtungen auskommt, abgesehen von den beträchtlichen Schwierigkeiten der Durchführung, doch nicht ganz, weil beim Ansatz eine unbegründete Willkür vorliegt.

2.

In diesem Abschnitt wollen wir nun einen Weg der Begründung des Polyederinhaltes kennen lernen, der wohl in der besonderen Durchführung neu ist, wobei aber die Konstruktion und damit der Existenznachweis des elementaren Inhalts an verschiedene ältere Ideen eng anschließt, die beispielsweise von SCHUR, RAUSENBERGER, LAZARRI, GERARD, HILBERT und andern [23] hauptsächlich im Falle der ebenen elementaren Inhaltslehre verwertet worden sind.

Zunächst wollen wir den axiomatischen Standpunkt noch etwas präzisieren:

Die Mannigfaltigkeit der beschränkten abgeschlossenen Polyeder bildet einen sogenannten *Mengenring*, d. h. mit zwei Polyedern A und B ist auch der Durchschnitt AB und die Vereinigung $A + B$ ein Polyeder. Diese Mannigfaltigkeit ist das Inhaltsfeld $\mathfrak{E}$ des elementaren Inhalts. Wie man ohne weiteres erkennen kann, sind die drei Feldpostulate erfüllt: das Feld ist bewegungsfrei, additiv und normal.

Unter einer elementaren Inhaltsmaßzahl $X(A)$ verstehen wir ein über dem Feld $\mathfrak{E}$ erklärtes reellwertiges Funktional $X(A)$, das jedem Polyeder A eine reelle Zahl $X(A)$ eindeutig zuordnet, so daß die vier folgenden Inhaltspostulate erfüllt sind:

1. $X(A) = X(B)$, falls $A \cong B$ ist;
2. $X(A + B) = X(A) + X(B)$, falls das Polyeder $A + B$ im Sinne der Elementargeometrie in die Teilpolyeder A und B zerlegt ist;
3. $X(E) = 1$, wobei E den abgeschlossenen Einheitswürfel bezeichnet;
4. $X(A) \geq 0$.

Ein elementarer Inhalt ist also ein bewegungsinvariantes, additives, normiertes und definites Polyederfunktional. Die Formulierung der Inhaltspostulate zeigt bei der Additivität eine kleine Abweichung gegenüber derjenigen im allgemeinen Inhaltsproblem, die dem in der Polyedergeome-

---

[22] loc. cit. Anm. 17, S. 950.

[23] Vgl. F. ENRIQUES, loc. cit. Anm. 11, S. 161/162.

trie wichtigen Begriff der Zerlegungsgleichheit im Sinne der Elementargeometrie angepaßt ist. Wir bemerken noch, daß aus den vier Inhaltspostulaten die Monotonie folgt, daß also

$$X(A) \leq X(B), \text{ falls } A \sqsubset B \text{ ist,}$$

gilt.

Nach dieser Festlegung muß man zunächst damit rechnen, daß eventuell verschiedene Funktionale $X(A)$ dieser Art als Lösungen des Problems existieren; es wird eine charakteristische und wichtige Besonderheit des von uns eingeschlagenen Weges sein, daß wir nicht nur zeigen, daß eine Lösung vorhanden ist, sondern daß auch nachgewiesen wird, daß *nur* eine Lösung in Betracht kommt, so daß der klassische elementare Inhalt $X(A) = I(A)$ der einzige elementare Inhalt im oben axiomatisch festgelegten Sinn ist.

Durch einen direkten Ansatz zeigen wir nachfolgend die Existenz einer Lösung. Wir setzen

$$X(A) = I(A) = \frac{1}{3} \sum F_\nu \, (\mathfrak{n}_\nu, \mathfrak{p}_\nu),$$

wobei F_ν den Flächeninhalt der ν-ten Seitenfläche des Polyeders A, $\mathfrak{n}_\nu$ den nach außen weisenden und auf der betreffenden Seitenfläche orthogonal stehenden Einheitsvektor (Normalenvektor) und schließlich $\mathfrak{p}_\nu$ den Ortsvektor eines beliebigen Punktes der nämlichen Seitenfläche bezüglich eines festen Ursprungs Z und die runde Klammer das Skalarprodukt bezeichnen (Abb. 4). Die Summation soll sich über alle Seitenflächen des Polyeders A erstrecken. Man bemerkt, daß die elementare Inhaltslehre in der Ebene hier vorausgesetzt ist. Damit ist auch angedeutet, daß sich die entsprechende Begründung des elementaren Inhalts im k-dimensionalen Raum auf rekursive Weise auf denjenigen im $(k-1)$-dimensionalen Raum stützt.[24]

Zunächst ergibt sich ohne weiteres, daß der Wert des Skalarproduktes $(\mathfrak{n}_\nu, \mathfrak{p}_\nu)$ von der speziellen Wahl des Punktes innerhalb der gleichen Seitenfläche unabhängig ist. Der Wert der Summe ist also eine dem Polyeder A eindeutig zugeordnete reelle Zahl $I(A)$.

Mühelos läßt sich nun erkennen, daß $I(A)$ additiv ist; die Beiträge an die Summen $I(A)$ und $I(B)$, die von inneren Zerlegungsflächen herrühren, löschen sich in $A + B$ gegenseitig aus, da die dort wirkenden Normalenvektoren entgegengesetzt gleich sind.

---

[24] H. Hadwiger, Zur Inhaltstheorie der Polyeder, Collectanea Math. *3* (1), 137—158, 1950.

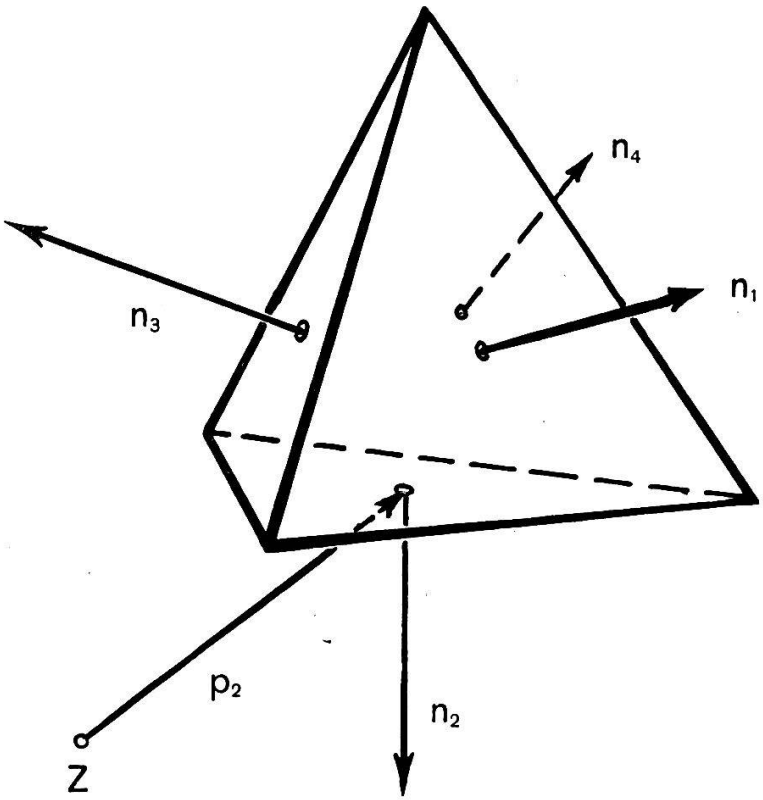

Abb. 4

Wegen der soeben verifizierten Additivität genügt es, das Funktional $I(A)$ und seine Eigenschaften weiterhin spezieller für Tetraeder $A = T$ zu verfolgen. So weisen wir zunächst nach, daß $I(T)$ translationsinvariant ist. Bezeichnet $\mathfrak{t}$ den Verschiebungsvektor einer Translation, durch welche T in T' übergeführt wird, so ergibt sich

$$X(T') - X(T) = \frac{1}{3} \sum F_\nu (\mathfrak{n}_\nu, \mathfrak{t}).$$

Nun läßt sich aber leicht auf elementare Weise zeigen, daß

$$\sum F_\nu \mathfrak{n}_\nu = 0$$

ist, d. h. die Summe der vier auf den Seitenflächen des Tetraeders orthogonal stehenden Vektoren, deren Längen gleich dem Flächeninhalt der betreffenden Seitenflächen sind, verschwindet. Den vektorgeometrischen Nachweis hierfür überlassen wir dem Leser, doch soll auf eine hübsche physikalische Plausibilitätsbetrachtung hingewiesen werden. Die Summe der vier Vektoren kann als entgegengesetzte Resultierende der vier Druckkräfte interpretiert werden, welche auf das Tetraeder einwirken, wenn sich dieses in einem Medium (Luft oder Wasser) befindet, das überall denselben Druck aufweist, den wir hier gleich der Einheit setzen. Wäre

nun der geometrische Satz falsch, so würde das Tetraeder in einer körperfesten Richtung einen ständigen Antrieb erfahren, was zu einem Widerstreit mit physikalischen Grundsätzen führen müßte.

Mit Anwendung dieses Satzes ergibt sich nun $I(T) = I(T')$, was zu beweisen war.

Zur Berechnung von $I(T)$ dürfen wir nach dieser Feststellung annehmen, daß eine Tetraederecke mit dem Ursprung Z zusammenfällt. In diesem Falle wird aber

$$I(T) = \frac{1}{3} Fh,$$

wobei nun F den Flächeninhalt derjenigen Seitenfläche von T bedeutet, die der Ecke Z gegenüberliegt, und h die entsprechende Höhe ist. Damit hat sich die klassische Formel für den Tetraederinhalt ergeben, welche der Lehre vom Polyederinhalt von alters her zugrunde liegt.

Dieser letzte Schritt erlaubt im Rahmen unserer Entwicklung zwei wichtige Schlüsse. Es ergeben sich nämlich gleichzeitig die Einsichten, daß $I(T)$ bewegungsinvariant und definit ist. Wegen der bereits nachgewiesenen Additivität übertragen sich diese Eigenschaften auf $I(A)$ für beliebige Polyeder A.

Indem man den Einheitswürfel E in eine solche Lage bringt, daß der Ursprung Z mit einer Ecke zusammenfällt, bestätigt man schließlich leicht, daß $I(E) = 1$ ist.

So haben wir für das mit unserm Ansatz eingeführte Polyederfunktional $I(A)$ die Gültigkeit der vier zuständigen Inhaltspostulate nachgewiesen und damit den Existenzbeweis für den *elementaren Inhalt* $I(A)$ vollendet.

Wir zeigen jetzt, daß die soeben konstruierte spezielle Lösung die einzige ist, genauer: Wenn $X(A)$ ein bewegungsinvariantes, additives, normiertes und definites Funktional über $\mathfrak{E}$ ist, so folgt $X(A) = I(A)$. Damit ist die Einzigkeit des elementaren Inhalts $I(A)$ sichergestellt.

In der Tat: Zunächst erzielt man das Ergebnis $X(W) = I(W)$ für einen beliebigen Würfel, indem man dies zuerst für Würfel mit ganzzahliger, dann für solche mit rationaler und schließlich beliebiger Kantenlänge folgert. Ist nun P ein Polyeder, das mit einem Würfel W zerlegungsgleich ist, also $P \sim W$, so schließt man mit der Bemerkung $X(P) = X(W)$ und $I(P) = I(W)$ auf $X(P) = I(P)$. Setzen wir jetzt

$$Y(A) = X(A) - I(A),$$

so haben wir ein neues Polyederfunktional erklärt, das noch bewegungs-

invariant und additiv, dagegen nicht mehr notwendig definit und normiert ist und das die weitere Eigenschaft aufweist, daß

$$Y(P) = 0 \text{ ist, falls } P \sim W \text{ gilt.}$$

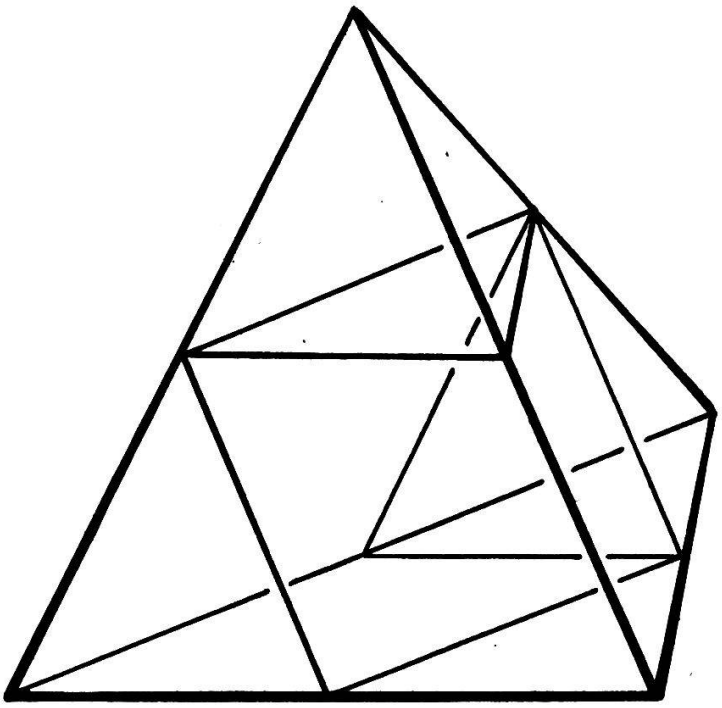

Abb. 5

Betrachten wir nun ein Tetraeder T, das wir in der euklidischen Weise (Abb. 5) in zwei halb so große ähnliche Tetraeder $\frac{1}{2}\ T$ und zwei Prismen zerlegen, so ergibt sich die Beziehung

$$2\,Y\left(\frac{1}{2}T\right) = Y(T),$$

da ja bekanntlich jedes Prisma mit einem Würfel zerlegungsgleich ist.[25] Durch Iteration dieses Halbierungsprozesses erreicht man

$$2^n\,Y\left(\frac{1}{2^n}\,T\right) = Y(T)$$

Beachtet man, daß dagegen

$$8^n\,I\left(\frac{1}{2^n}\,T\right) = I(T)$$

gilt, so erzielt man mit einiger Umrechnung aus dem obenstehenden Ansatz

[25] A. Emch, Endlichgleiche Zerschneidung von Parallelotopen in gewöhnlichen und höhern Euklidischen Räumen, Comment. Math. Helv. *18*, 224—231, 1946.

$$2^n X\left(\frac{1}{2^n} T\right) = Y(T) + \frac{1}{4^n} I(T).$$

Da die linke Seite nichtnegativ ist, der letzte Term aber bei geeigneter Wahl von n beliebig klein gemacht werden kann, folgert man — der Leser beachte den Grenzprozeß! —, daß $Y(T) \geq 0$ sein muß. Zieht man nun noch die schon erwähnte Additivität bei, so folgt für beliebige Polyeder A, daß $Y(A)$ definit und auch monoton ist. Dies erlaubt im Zusammenwirken mit dem Verschwinden des Funktionalwertes für Würfel die entscheidende Einsicht. Für jeden A umschließenden Würfel W gilt

$$0 \leq Y(A) \leq Y(W) = 0,$$

also ist $Y(A) = 0$, d. h. $X(A) = I(A)$. Damit ist der Einzigkeitsbeweis erbracht.

Rückblickend bemerken wir, daß eine vollständige Begründung des Polyederinhalts gegeben werden kann, ohne daß eine Grenzbetrachtung geometrischer Art, die nach dem Hilbert-Dehnschen Dilemma unvermeidlich ist, deutlich und unangenehm in Erscheinung tritt; die Grenzbetrachtung scheint vom geometrischen mehr in den arithmetischen Machtbereich verschoben und wird einzig an der Stelle, auf die wir den Leser hinwiesen, beansprucht.

III. Der Jordansche Inhalt

1.

Peano [26] und Jordan [27] haben auf verschiedene Weise ein und dasselbe Inhaltssystem begründet, welches als einfachstes nichtelementares System grundlegende Bedeutung erreicht hat.

Hinreichend vernünftig gebaute Körper — jedenfalls solche, welche stückweise von glatten Flächenstücken berandet sind — können innerhalb dieser Inhaltstheorie immer ausgemessen werden. Ohne auf die allgemeinen Zusammenhänge zwischen Inhalt und Integral einzugehen, sei hier nur angemerkt, daß die im Jordanschen Sinn meßbaren Punktmengen genau diejenigen sind, deren Inhalt sich auch mit Hilfe eines Riemannschen eigentlichen Integrals ermitteln lassen.

Hingegen ist bereits die früher als Beispiel zitierte Punktmenge $P = (0 \leq x, y, z \leq 1, x, y, z$ rational) nicht mehr meßbar.

---

[26] G. Peano, Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale, Torino 1887.

[27] C. Jordan, Remarques sur les intégrales définies, J. de Math. (4) *8*, 69—99, 1892.

Die klassische Inhaltskonstruktion von JORDAN basiert auf recht geläufigen Betrachtungen mit Würfelgittern. Wenn man sich auf den Standpunkt stellt, daß für die Begründung eines höheren Inhalts die Theorie des elementaren Inhalts der Polyeder bereits zur Verfügung steht — eine Aufassung, die wir uns zu eigen machen wollen —, so kann die Einführung des Jordanschen Inhalts auf eine einfachere Weise erfolgen. Der nächste Abschnitt bringt eine solche Definition des Jordanschen Inhalts.

Auch die auf der neuen Definition basierende Herleitung der Haupteigenschaften, die wir hier ohne Beweise kurz zusammenstellen, zeigt gegenüber derjenigen der klassischen Theorie einige Vorteile. So folgt zum Beispiel die Bewegungsinvarianz unmittelbar aus der Definition, während die Sicherstellung dieser Tatsache auf Grund der klassischen Definition einige Umstände bereitet.

2.

Es sei A eine beliebige beschränkte Punktmenge. Wir definieren:

$$\overline{J}(A) = \inf I(P) \; [A \sqsubset P]$$
$$\underline{J}(A) = \sup I(Q) \; [Q \sqsubset A],$$

wobei sich die vorgeschriebene Bildung der unteren Grenze «inf» bzw. der oberen Grenze «sup» über alle elementaren Inhaltsmaßzahlen $I(P)$ bzw. $I(Q)$ von Polyedern bezieht, welche A überdecken $(A \sqsubset P)$ bzw. von A überdeckt werden $(Q \sqsubset A)$.

Die Existenz der beiden der Punktmenge A zugeordneten Zahlwerte und das Bestehen der Ungleichung

$$\underline{J}(A) \leq \overline{J}(A)$$

lassen sich leicht nachweisen. $\overline{J}(A)$ und $\underline{J}(A)$ nennt man *äußeren* und *inneren Jordanschen Inhalt* von A.

Sind nun die beiden einseitigen Inhalte einander gleich, so heißt A im Jordanschen Sinn meßbar, und den gemeinsamen Wert

$$\underline{J}(A) = \overline{J}(A) = J(A)$$

nennt man den *Jordanschen Inhalt* von A.

Es läßt sich zeigen, daß das Jordansche Inhaltsfeld $\mathfrak{J}$, also das System der im angegebenen Sinn meßbaren Mengen, den Feldpostulaten genügt. Weiter ist $\mathfrak{J}$ ein sogenannter *Mengenkörper*, d. h. sind zwei Punktmengen A und B im Jordanschen Sinn meßbar, so sind es auch die Vereinigung $A + B$, der Durchschnitt AB und die Differenz $A - AB$.

Der Jordansche Inhalt $J(A)$ genügt auch den Inhaltspostulaten, insbesondere ist er endlich-additiv, so daß

$$J\left(\sum_1^n A_\nu\right) = \sum_1^n J(A_\nu),$$

wobei die meßbaren Punktmengen A_ν paarweise disjunkt vorausgesetzt sind.

IV. Das Lebesguesche Maß

1.

Eine auch höheren Ansprüchen genügende Lösung des Inhaltsproblems ist durch das von LEBESGUE [28] eingeführte Maß gegeben, das auf viele Gebiete der höheren Mathematik einen entscheidenden fördernden Einfluß ausübte. So hat erst die auf diesem Maßbegriff aufgebaute Theorie des Lebesgueschen Integrals, das eine weitreichende Verfeinerung des gewöhnlichen Riemannschen Integrals darstellt, verschiedenen Disziplinen der höheren Analysis einen theoretisch vollendeten Abschluß gebracht.

Innerhalb des Lebesgueschen Maßsystems können nun bereits recht komplizierte Punktmengen ausgemessen werden. Beispielsweise ist die im vorigen Teil erwähnte Punktmenge $P = (0 \leq x, y, z \leq 1, x, y, z$ rational) nun meßbar und hat wie jede abzählbare Punktmenge das Maß Null. Bemerkenswert ist, daß alle abgeschlossenen und auch alle offenen Punktmengen meßbar werden, während dies beim Jordanschen System nicht der Fall ist.

Auch hier wollen wir nicht die klassische Definition des Lebesgueschen Maßes wiedergeben, sondern eine mit ihr gleichwertige, welche kürzer und einprägsamer ist, wobei indessen die Theorie des Jordanschen Inhaltes bereits als bekannt angenommen wird, eine Voraussetzung also, die als natürlich bezeichnet werden darf.

Im folgenden Abschnitt geben wir diese Definition des Lebesgueschen Maßes; sie ist verwandt mit einer von YOUNG [29] vorgeschlagenen Einführung. Die Haupteigenschaften werden ohne Beweis nur kurz gestreift.

---

[28] H. LEBESGUE, Intégrale, longueur, aire, Annali di Mat. (3) 7, 231—359, 1902; Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Paris 1904.

[29] W. H. YOUNG, Open sets and the theory of content, Proc. London Math. Soc. (2) 2, 16—51, 1904.

2.

Es sei A eine beschränkte Punktmenge. Wir definieren:

$$\overline{L}(A) = \inf \underline{J}(U) \qquad [A \sqsubset U, U \text{ offen}]$$
$$\underline{L}(A) = \sup \overline{J}(V) \qquad [V \sqsubset A, V \text{ abgeschlossen}],$$

wobei sich die Bildung der unteren Grenze «inf» bzw. der oberen Grenze «sup» über alle inneren Jordanschen Inhalte $\underline{J}(U)$ bzw. alle äußeren Jordanschen Inhalte $\overline{J}(V)$ von offenen A überdeckenden Punktmengen U bzw. abgeschlossenen, von A überdeckten Punktmengen V erstrecken soll.

Die Existenz der beiden der Punktmenge A zugeordneten Zahlwerte und auch das Bestehen der Ungleichung

$$\underline{L}(A) \leq \overline{L}(A)$$

lassen sich leicht nachweisen. Wir nennen $\overline{L}(A)$ das *äußere*, $\underline{L}(A)$ das *innere Lebesguesche Maß* von A.

Sind diese beiden einseitigen Maße einander gleich, so heißt A im Lebesgueschen Sinn meßbar, und den gemeinsamen Wert

$$\underline{L}(A) = \overline{L}(A) = L(A)$$

nennt man das *Lebesguesche Maß* von A. Es läßt sich auch hier leicht zeigen, daß das Lebesguesche Maßfeld $\mathfrak{L}$ den Feldpostulaten genügt. Weiter ist $\mathfrak{L}$ ein sogenannter Sigma-Mengenkörper, d. h. ein Mengenkörper mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß auch die Vereinigung von abzählbar unendlich vielen meßbaren Punktmengen wieder meßbar ist, falls diese beschränkt ausfällt. Auch der Durchschnitt von abzählbar unendlich vielen meßbaren Punktmengen ist dann stets meßbar.

Das eben eingeführte Lebesguesche Maß $L(A)$ genügt den Inhaltspostulaten; insbesondere ist es total-additiv, so daß

$$L\left(\sum_{1}^{\infty} A_\nu\right) = \sum_{1}^{\infty} L(A_\nu)$$

gilt, wobei die abzählbar unendlich vielen Punktmengen A_ν paarweise disjunkt und die Vereinigungsmenge beschränkt vorausgesetzt ist. Diese totale Additivität ist die für das Maß charakteristische höhere Qualität, auf welche die durch die Maßtheorie erzielten wesentlichen Fortschritte gegenüber der gewöhnlichen Inhaltstheorie mit ihrer endlichen Additivität zurückzuführen sind.

V. Der Tarskische Inhalt

1.

Die drei vorstehend kurz skizzierten Inhaltssysteme sind die wichtigsten der heutigen Mathematik. Daneben sind im Laufe der letzten Dezennien noch zahlreiche spezielle Inhalts- und Maßsysteme entwickelt worden. Abschließend wollen wir noch eine solche neue Inhaltskonstruktion erwähnen, welche auf eine Idee von TARSKI [30] zurückgeht, der bei Beschränkung auf lineare Punktmengen den Begriff des absoluten Inhalts aufgestellt und die sich ergebende Theorie entwickelt hat.

Es zeigt sich, daß entgegen der ausdrücklichen gegenteiligen Bemerkung des Autors die Theorie des absoluten Inhalts auch auf räumliche Punktmengen ausgedehnt werden kann, falls man in der Konstruktion eine geringfügige, aber doch entscheidende Modifikation vornimmt, welche darin besteht, daß man die bei der Inhaltsdefinition beanspruchte gewöhnliche Multikongruenz durch die translative Multikongruenz ersetzt. Es stellt sich heraus, daß trotz dem Eingriff der absolute Tarskische Inhalt bewegungsinvariant ausfällt und im übrigen alle wesentlichen Eigenschaften, die von TARSKI im linearen Fall gefunden worden sind, beibehält.[31]

Von diesem Inhalt und seinen Haupteigenschaften sei im folgenden Abschnitt kurz zusammengefaßt die Rede.

Zunächst definieren wir: Zwei Punktmengen P und Q des Raumes heißen *translativ multikongruent* (translativ endlich-gleich), wenn sie in paarweise translationsgleiche disjunkte Teilmengen zerlegt werden können. Ausführlicher: P und Q sind translativ multikongruent vom Grade n, geschrieben $P \approx Q$, wenn es Zerlegungen

$$P = \sum_1^n P_i, \quad Q = \sum_1^n Q_i$$

von P und Q in die Teilmengen P_i und Q_i so gibt, daß $P_i P_j = Q_i Q_j = 0$ für $i \neq j$ und $P_i \cong Q_i$ $(i = 1, 2, .., n)$.

---

[30] A. TARSKI, Über das absolute Maß linearer Punktmengen, Fund. math. *30*, 218—234, 1938.

[31] H. HADWIGER, Absolut meßbare Punktmengen im euklidischen Raum, erscheint demnächst in Comment. Math. Helv.

Die translative Kongruenz oder Translationsgleichheit $P \underline{\approx} Q$ ist so zu verstehen, daß die beiden Mengen Punkt für Punkt durch eine Translation zur Deckung gebracht werden können.

2.

Es sei A eine beschränkte Punktmenge. Wir definieren:

$$\overline{T}(A) = \inf I(W) \qquad [A \approx A' \sqsubset W]$$
$$\underline{T}(A) = \sup I(W) \qquad [W \approx W' \sqsubset A],$$

wobei sich die vorgeschriebene Bildung der unteren Grenze «inf» über alle elementaren Inhalte $I(W)$ von Würfeln W erstreckt, für welche es noch Teilmengen A' gibt, die mit A translativ multikongruent sind. Die Bildung der oberen Grenze «sup» erstreckt sich über die elementaren Inhalte $I(W)$ von Würfeln, für welche es noch Teilmengen W' von A gibt, die mit W translativ multikongruent sind.

Die Existenz der beiden der Punktmenge A zugeordneten Zahlwerte ergibt sich hier allerdings nicht so einfach wie bei den beiden vorhergehenden klassischen Inhaltskonstruktionen. Die Existenz von $\overline{T}(A)$ ist an sich zwar trivial, der Wert könnte aber für alle Punktmengen A gleich Null sein. Dagegen ist nicht ohne weiteres klar, daß $\underline{T}(A)$ existiert. Um dies tatsächlich zu beweisen und weitergehend auch zu zeigen, daß sogar stets

$$\underline{T}(A) \leq \overline{T}(A)$$

gilt, ist es erforderlich, die Nichtexistenz paradoxer Verhältnisse im Sinne des Satzes von Banach und Tarski im Bereiche der translativen Multikongruenz sicherzustellen. Der Unmöglichkeitsbeweis kann tatsächlich erbracht werden, auf ähnliche Weise, wie ihn Sierpinski [32] im Falle linearer Punktmengen führte. Wesentlich ist hier, daß die Translationsgruppe im Raum im Gegensatz zur Bewegungsgruppe abelsch ist.

Es ist angebracht, darauf hinzuweisen, daß die obenstehenden Definitionen trotz den verschiedenen höheren Begriffen, auf die sie sich stützen, einen anschaulichen Gehalt aufweisen; es sei erlaubt, dies durch eine trivialisierende anschauliche Interpretation zu verdeutlichen. Der Wert $\overline{T}(A)$ gibt zum Beispiel an, wie groß der Inhalt einer würfelförmigen

[32] W. Sierpinski, Sur la non-existence des décompositions paradoxales d'ensembles linéaires, Actas Acad. Ci. Lima 9, 113—117, 1946.

«Kiste» mindestens sein muß, damit es möglich wird, die Menge A darin zu «verpacken», d. h. in Teile zu zerlegen, welche dann verschoben und in der «Kiste» eingelagert werden sollen (Abb. 6).

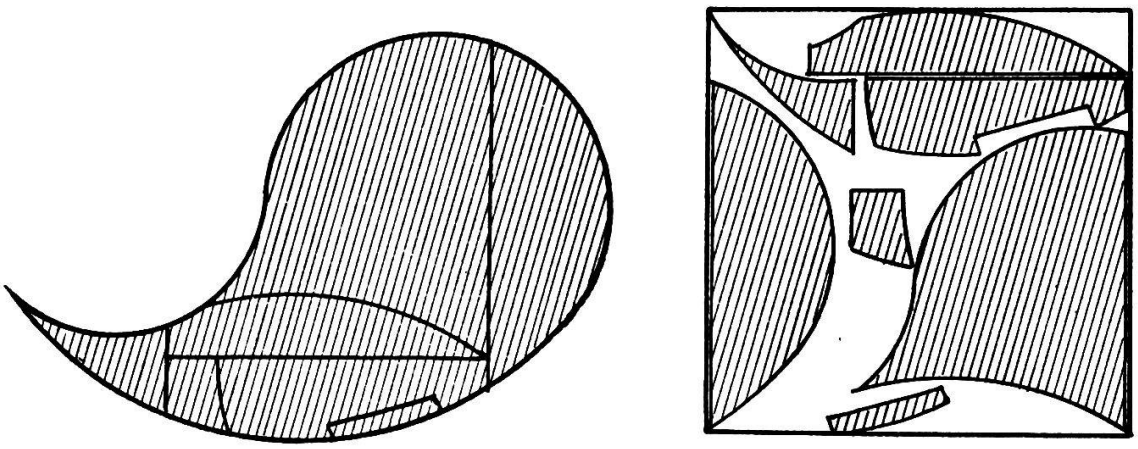

Abb. 6

Die Werte $\overline{T}(A)$ und $\underline{T}(A)$ wollen wir den *äußern* und den *innern Tarskischen Inhalt* von A nennen. Sind die beiden einseitigen Inhalte einander gleich, so heißt die Punktmenge A im Tarskischen Sinn meßbar, und den gemeinsamen Wert

$$\underline{T}(A) = \overline{T}(A) = T(A)$$

nennen wir den *Tarskischen Inhalt* von A.

Beim Nachweis der Tatsachen, daß das Tarskische Inhaltsfeld $\mathfrak{T}$ den Feldpostulaten und der Inhalt $T(A)$ den Inhaltspostulaten genügt, insbesondere der Aussagen, die sich auf die Bewegungsfreiheit und die Bewegungsinvarianz beziehen, stützt man sich mit Vorteil auf einen erst kürzlich bewiesenen Satz, wonach zwei kongruente Würfel in beliebiger relativer Drehlage im Sinne der Elementargeometrie translativ zerlegungsgleich sind.

Genauer sagt dieser Satz Folgendes aus [33]: Zwei kongruente Würfel W und W' gestatten immer Zerlegungen im Sinne der Elementargeometrie

$$W = \sum_1^n P_i \quad , \quad W' = \sum_1^n P_i'$$

in konvexe Teilpolyeder P_i bzw. P_i', so daß $P_i \approx P_i'$ ausfällt, d. h. daß die sich entsprechenden Teilpolyeder translationsgleich sind.

---

[33] H. Hadwiger, Translative Zerlegungsgleichheit k-dimensionaler Parallelotope, Collectanea Math. *3* (2), 11—23, 1950.

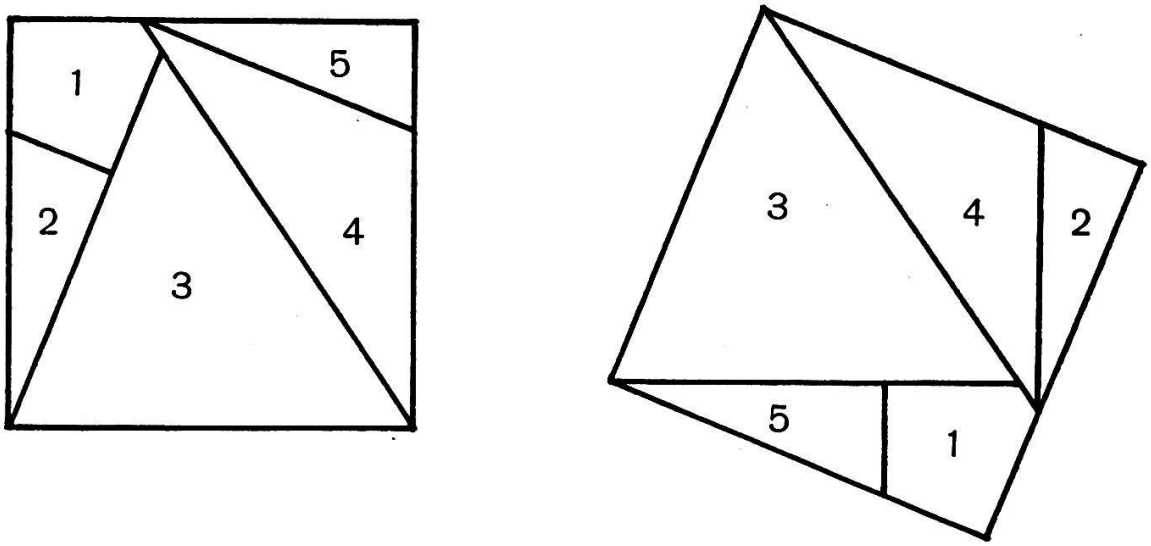

Abb. 7

Es läßt sich übrigens zeigen, daß hierfür stets ein $n \leq 125$ ausreicht.[34] Den entsprechenden Sachverhalt in der Ebene illustriert Abb. 7.

Das Tarskische Feld $\mathfrak{T}$ ist translativ zerlegungsfrei, d. h. $\mathfrak{T}$ enthält mit jeder Punktmenge A auch jede mit A translativ multikongruente Punktmenge B, also alle $B \approx A$. Damit haben wir die Aufmerksamkeit auf eine Eigenschaft gelenkt, welche die klassischen Inhaltssysteme nicht aufzuweisen haben, wohl aber gewisse neuzeitliche. Dagegen ist $\mathfrak{T}$ kein Mengenkörper, ja nicht einmal ein Mengenring. Der Tarskische Inhalt ist (gleich wie der Jordansche) endlich-additiv, nicht aber total-additiv; es handelt sich also nicht um ein Maß.

Die besondere Bedeutung des Tarskischen Inhaltssystems innerhalb der allgemeinen axiomatischen Inhaltstheorie dürfte aus folgenden Tatsachen hervorgehen:

Ist $(\mathfrak{F}, X)$ ein beliebiges Inhaltssystem, dessen Inhaltsfeld $\mathfrak{F}$ ein Mengenkörper ist, so gilt für jede beschränkte Punktmenge $A \in \mathfrak{F}$ die Ungleichung

$$\underline{T}(A) \leq X(A) \leq \overline{T}(A),$$

und umgekehrt gibt es zu jeder reellen Zahl ω des durch den inneren und den äußeren Tarskischen Inhalt $\overline{T}(A)$ und $\underline{T}(A)$ bezeichneten Intervalls noch ein Inhaltssystem $(\mathfrak{F}, X)$ der oben bezeichneten Art, so daß $X(A) = \omega$ ausfällt.

---

[34] H. Debrunner, Translative Zerlegungsgleichheit von Würfeln, Archiv der Math. 3, 479-480, 1952.

Ist also A insbesondere im Tarskischen Sinn meßbar, so folgt

$$X(A) = T(A),$$

woraus erhellt, daß das Tarskische Feld $\mathfrak{T}$ genau diejenigen Punktmengen umfaßt, für welche eine, aber nur eine Inhaltsmaßzahl in Frage kommt. Für eine im Tarskischen Sinn meßbare Menge ist der Inhalt durch die Axiome der Inhaltstheorie eindeutig vorbestimmt. Es ist sinnvoll, in diesem Zusammenhang von *absolut meßbaren* Punktmengen und vom *absoluten Inhalt* zu sprechen.

Wäre nun jede Punktmenge absolut meßbar — wie oben erwähnt, ist dies nicht der Fall —, so könnte man den absoluten Inhalt auch mit dem natürlichen Inhalt identifizieren, und diese an sich hocherfreuliche Sachlage würde die Berechtigung der mehrtausendjährigen Vorstellung vom natürlichen Inhalt belegen.

VI. Schlußbemerkung

Am Ende des vorausgehenden Teils sind wir wieder zur Problematik des natürlichen Inhalts zurückgekehrt. Wie ausführlich dargelegt worden ist, muß die Idee des natürlichen Inhalts als widerspruchsvoll zurückgewiesen werden.

Und doch! In manchem von uns steckt ein leise sich regender Keim des Mißtrauens gegenüber den Schlußmethoden der heutigen mengentheoretischen Epoche, die mit paradox anmutenden Ergebnissen, welche in der Tiefe des unendlichen Kontinuums jeder Anschauung und auch jeder Kontrolle durch effektive Konstruktion entrückt sind, die in unserer natürlichen Empfindung verwurzelte Idee des natürlichen Inhalts zu Fall brachten.

Dürfen wir in diesen Fragen über jeden Zweifel erhaben sein? Sollen wir die Erkenntnisse, die heute gewonnen werden, als die letzten und unabdingbar richtigen preisen?

Bedenken wir doch eines! Unsere Schlüsse basieren auf dem als gültig hingenommenen mathematischen Kontinuum. Seine Konstruktion, die in wissenschaftlich einwandfreier Form erst einige Dezennien alt ist, enthält ohne Zweifel eine gewisse Willkür, die etwa durch das Stichwort «Cantor-Dedekindsches Axiom» angedeutet ist. Sind wir nun dessen ganz gewiß, daß hier das letzte Wort gesprochen wurde? Dies ist wohl kaum der Fall.

Längst haben wir gelernt, daß zum Beispiel unsere euklidische Geometrie nur noch eine Möglichkeit einer Raumstruktur darstellt und nicht notwendig mit der wirklichen identisch ist. Besonders deutlich wurde dies offenbar, als RIEMANN im Jahre 1854 in seiner berühmten Habilitationsschrift «Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen» der euklidischen Geometrie, welche zum Beispiel von KANT sogar als a priori gültig hingestellt worden ist, andere gekrümmte Geometrien als gleichberechtigt zur Beschreibung der physikalischen Wirklichkeit kühn zur Seite stellte. Dies bedeutete bekanntlich eine große Erschütterung für das gesamte mathematisch-naturwissenschaftliche Weltbild, und RIEMANN wurde zum Wegbereiter der allgemeinen Relativitätstheorie EINSTEINS.

Men bedenke nun Folgendes: Alle die neuartigen Weltmodelle halten in dieser oder jener Form noch am Raum-Zeit- oder Zahlenkontinuum fest. Die Unendlichkeit oder Stetigkeit dieser Formen nach innen hin gibt der Infinitesimalrechnung unserer Jahrhunderte die Existenz- und Wirkungsmöglichkeit. Aber trotz der Verfeinerung und Ausgestaltung der heutigen mathematischen Methoden will es bekanntlich nicht restlos gelingen, die Erscheinungen der Natur, insbesondere aber im Mikrokosmos, befriedigend zu beschreiben und zu erklären.

Es könnte nun wohl sein — und dahin geht heute die Meinung vieler Mathematiker und Physiker —, daß das unserer mathematischen Wissenschaft zugrunde gelegte Kontinuum wohl eine sinnreiche Konstruktion des menschlichen Geistes ist, aber der realen, wirklichen Welt nicht adäquat ist. Das Kontinuum könnte wohl eine Simplifikation, eine vereinfachende Interpolation eines in ihrem Urgrund versteckten Diskontinuums sein. Die Diskrepanz müßte dann um so deutlicher in Erscheinung treten, je tiefer die Naturforschung in den Bereich des Mikrokosmos eindringt. Eventuell ergeben sich auch wieder Abweichungen im Makrokosmos.

Vielleicht ist der natürliche Inhalt eines Körpers der wirklichen (diskontinuierlichen) Welt nur noch eine natürliche Zahl!

Wie dem auch sei — jedenfalls warten heute viele Fachleute auf die große, neue Erschütterung.

Warten wir auf einen neuen Bernhard Riemann!