Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft in Bern

Band: 15 (1957)

Vereinsnachrichten: Sitzungsberichte der Mathematischen Vereinigung in Bern aus dem Jahre 1956

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SITZUNGSBERICHTE

der Mathematischen Vereinigung in Bern aus dem Jahre 1956

199. Sitzung, Donnerstag, den 26. Januar 1956

Vortrag von Herrn **Prof. Dr. W. Nef**, Bern: **«Lineare Formen».** (Zum Inhalt vgl. W. NEF, Invariante Linearformen, Math. Nachr. *15*, 123—140, 1956, und W. NEF, Monotone Linearformen auf teilgeordneten Vektorräumen, Monatsh. Math. *60*, 190—197, 1956.

---

200. Sitzung, Donnerstag, den 9. Februar 1956

Vortrag von Herrn **Dr. H. Lehmann**, Bern: **«Funktionale Betrachtungen zu den trigonometrischen Funktionen».**

Ausgehend von den Additionstheoremen des Sinus und Cosinus wird gezeigt, wie die wesentlichen Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen, zum Beispiel die Periodizität, aus wenigen an ein Funktionspaar $f(x)$, $\overline{f}(x)$ gestellten Forderungen (die den Additionstheoremen und Normierungswerten entsprechen) gefolgert werden können. Damit wird ein dem Mittelschulunterricht gangbarer Weg aufgewiesen, der zugleich Einblicke in die Zusammenhänge zwischen den trigonometrischen Funktionen wie in die axiomatische Arbeitsweise vermittelt. *D.*

---

201. Sitzung, Freitag, den 4. Mai 1956

Gastvorlesung von Herrn **Prof. Dr. W. Blaschke**, Hamburg: **«Geometrie der Waben».** (Zum Inhalt vgl. W. BLASCHKE, «Geometrie der Waben», Basel 1955.)

---

202. Sitzung, Freitag, den 25. Mai 1956

gemeinsam mit der Naturforschenden Gesellschaft

1. Geschäftssitzung der Mathematischen Vereinigung: Es werden die statutarisch vorgeschriebenen Geschäfte erledigt. Im Vorstand sind keine Mutationen zu verzeichnen.

2. Vortrag von Herrn **Dr. A. Schoch**, Genf: **«Informationstheorie».**

---

203. Sitzung, Donnerstag, den 27. September 1956

Herr Wim Klein, Arithmetiker, demonstriert Proben seines phänomenalen Könnens im Kopfrechnen.

---

204. Sitzung, Donnerstag, den 1. November 1956

Vortrag von Herrn **Dr. A. Challand,** Bern: **«Mensch und Zahl — Ein Beitrag zur Biologie der mathematischen Tätigkeit».**

Da die mathematische Tätigkeit auf Begabung beruht, kann man sich fragen, wie diese Begabung sich auswirkte, bevor die Mathematik nennenswert entwickelt war. Diese Frage stellt sich auch heute, bei Leuten, die keine mathematische Erziehung genießen. Der Referent versucht hier, einige plausible Antworten zu geben. Er schildert dann mathematische Vorurteile im Alltagsleben, so zum Beispiel die populären Ideen der Unendlichkeit und der Wahrscheinlichkeit, und ihre Gefahren. Ebenso wird die Rolle einiger logikwidriger zahlenmäßiger Vorstellungen erwähnt.

Hauptsache bleibt aber die wissenschaftliche Mathematik. Sie vermittelt das Erlebnis des sauberen Denkens, eine Seltenheit in einer Welt, welche «Ideologie», d. h. wissentliche Irreführung, als Leitgedanken anerkennt. Die Schule selbst schlägt sich nicht ohne Vorbehalt auf die Seite des sauberen Denkens, was den Referenten veranlaßt, einiges im mathematischen Unterricht zu beanstanden. So sollten das Gebiet der Anschauung und das Gebiet der Logik konsequenter unterschieden und bei sonst gleichgearteten Problemen die logischen Anforderungen immer mit gleicher Elle gemessen werden; es sollte keine Frage nur deswegen als wichtiger gelten, weil der Lehrer sie besser kennt. Der Aberglaube, daß ein Problem pädagogisch um so wertvoller sei, je langweiliger es ist, muß verschwinden; dies ist keineswegs so, und man darf billigerweise nicht einem solchen Wahn huldigen und gleichzeitig klagen, der mathematische Unterricht scheitere an der Interesselosigkeit der Schüler. Mengenmäßig könnten die vermittelten Kenntnisse mehr darstellen als bisher und inhaltlich geeigneter sein, die Freude an Lernen und an Wissen anzuregen.

Die Erörterung des sauberen Denkens und seines Gegensatzes zum üblichen ideologischen Denken zwang den Referenten, die Logik erkenntnistheoretisch näher zu betrachten. Der logische Akt in seiner einfachsten Form ist eine Art Wahrnehmung, sozusagen eine innere Nötigung, die Implikationen einer klaren Vorstellung als verbindlich zu betrachten. Dieses Vermögen ist eine Eigenschaft der Intelligenz, nicht aber des Willens, der nur zu gern verzichtet, sich darum zu kümmern. Zwar handeln die meisten Menschen nicht *gegen* die Logik, wohl aber *außerhalb* derselben, als ob sie nicht bestünde. Was unter dem Namen der Logik *gelehrt* wird, ist allerdings etwas mehr: die Logik hat einen materiellen Inhalt erhalten in der Form von Operationsschemen, deren Gültigkeit früher überprüft wurde, so daß sie ohne Bedenken, je nach den Bedürfnissen der abstrakten Wissenschaften, weiter verwendet werden können. Entgegen oft gehörten Behauptungen ist der Erkenntnisinhalt der Mathematik weitergehend als derjenige einer bloßen Entfaltung logischer Prämissen. Unsere Wissenschaft verdeckt Tiefen, die der Freude des Forschens unbegrenzte Möglichkeiten erschließen. Unser Werk harrt keines Endes. (Selbstreferat)

---

205. Sitzung, Donnerstag, den 22. November 1956

Referate von Herrn Prof. Dr. W. Wegmüller und Herrn Dr. F. Steiger, Bern, über: «Wünschbarkeit und Möglichkeit des Statistikunterrichtes an der Mittelschule».

Die mathematische Statistik und eng damit verbunden auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung haben in jüngster Zeit eine ungeahnte Entwicklung erfahren. Es ist daher ganz natürlich, daß der künftigen Gestaltung des Statistikunterrichtes volle Aufmerksamkeit geschenkt wird. Sehen wir einmal nach, welche Sachgebiete sich etwa auf der Stufe der höheren Mittelschule eignen könnten. Im Hinblick auf die Fülle statistischer Methoden ist eine gewisse Auslese zu treffen, die mit Rücksicht auf das vorhandene Bildungsniveau und die Bedürfnisse der Praxis zu erfolgen hat.

Nach der herkömmlichen Auffassung besteht die Stastistik im Zählen und Messen erfaßbarer Dinge und Vorgänge. Noch vor wenigen Jahrzehnten existierte eigentlich nur die *beschreibende* Statistik. Heute ist der Begriff «Statistik» im erweiterten, verallgemeinerten Sinne auszulegen; er umfaßt sämtliche Stufen einer statistischen Erhebung: Planung — Erarbeitung — Auswertung. Immer mehr wird die Statistik zur *analysierenden* Wissenschaft. Parallel mit dieser Entwicklung geht naturgemäß eine Umgestaltung der Methoden und Verfahren einher (Streuungsanalyse, Schätz- und Prüfverfahren, Stichprobenverfahren, Beurteilung stochastischer Prozesse, Versuchsplanung usw.).

Wie verhält es sich nun mit der Grundausbildung in Statistik an der höhern Mittelschule? Bereits wird da und dort auf diese oder jene Weise Statistik getrieben. Könnte dies aber nicht allgemeiner, planmäßiger und in stärkerem Grade geschehen? Im Rahmen der Wünschbarkeit unterbreite ich einige konkrete Anregungen. Dem Schulfachmann obliegt es, darüber zu befinden, ob und in welchem Ausmaß die Verwirklichung tatsächlich möglich sein wird.

Grundsätzlich wird man sich auf die klassischen Standardverfahren beschränken müssen. Immerhin darf nach meinem Dafürhalten der Unterricht bereits auf die Bedürfnisse der modernen experimentellen Methodik ausgerichtet sein, was durch geeignete Auswahl der Beziehungen sowie bewußte Betonung spezieller Eigenschaften möglich ist.

1. Statistische Darstellung

Mit der Gliederung einer statistischen Gesamtheit beginnt das Problem der Darstellung. Die zutreffendste Ausdrucksform ist die *statistische Tabelle* (vgl. «Richtlinien auf dem Gebiete statistischer Darstellung», Verband Schweiz. Statistischer Ämter, 1947). *Graphiken* dienen ferner dazu, einen leicht faßlichen und einprägsamen Eindruck zu vermitteln (vgl. «Die Schweiz im Zahlenbild», Eidg. Statistisches Amt, 1952); neben der arithmetischen Skala dürfte wohl der logarithmischen Skala vermehrte Beachtung geschenkt werden.

2. Statistische Verhältniszahlen

Statistische Verhältniszahlen gestatten, Gegebenheiten klarer und übersichtlicher darzustellen sowie Vorgänge zu messen. Unterschieden werden: Gliederungszahlen (Prozent-, Promillezahlen), Beziehungszahlen (Geburten-, Sterbeziffer), Entsprechungszahlen (Bevölkerungs-, Fahrzeugdichte) und Meßzahlen (Indexziffern).

3. *Statistische Maßzahlen*

Zur Gruppe der Maßzahlen, welche die Wesenszüge von statistischen Gesamtheiten charakterisieren, gehören Mittelwerte, Streuungs- und Abhängigkeitsmaße.

a) Mittelwerte: Unter allen Mittelwerten — Durchschnitt, Zentralwert, Quartil, häufigster Wert, geometrisches Mittel, harmonisches Mittel — nimmt der Durchschnitt eine Vorrangstellung ein.

Die Ansätze für das *einfache arithmetische Mittel* lauten:

	Einzelwerte	Häufigkeitsreihe (Gruppenbildung)
Merkmal:	$x_i,\ i = 1, 2, \ldots, N$	$x_j,\ j = 1, 2, \ldots, m$ (Klassenmitte)
Häufigkeit:		
absolut	—	$N_j;\ \underset{j}{S}\, N_j = N$
relativ	—	$f_j = \frac{N_j}{N};\ \underset{j}{S}\, f_j = 1$
Durchschnitt:	$\bar{x} = \frac{1}{N} \underset{i}{S}\, x_i$ (1)	$\bar{x} = \frac{1}{N} S\, N_j x_j = \underset{j}{S}\, f_j x_j$ (2)

Für numerische Auswertungen bedient man sich vielfach der Variablentransformation $v_j = \frac{1}{k}(x_j - D)$ [Wahl eines provisorischen Durchschnittes D, Normierung durch die konstante Klassenbreite k], so daß jetzt (2) übergeht in

$$\bar{x} = D + \frac{k}{N} \underset{j}{S}\, N_j v_j. \tag{3}$$

An algebraischen Eigenschaften sind erwähnenswert:

$$\overline{x \pm a} = \bar{x} \pm a$$

$$\overline{ax} = a\bar{x}$$

$$\underset{j}{S}\, N_j (x_j - \bar{x}) = o$$

$$\underset{j}{S}\, N_j (x_j - \bar{x})^2 < \underset{j}{S}\, N_j (x_j - x_o)^2 \text{ , mit } x_o \lessgtr \bar{x}.$$

Das *gewogene artihmetische Mittel*

$$\bar{x}_g = \frac{1}{G} \underset{i}{S}\, g_i x_i \text{ , mit } G = \underset{i}{S}\, g_i \tag{4}$$

findet bei der Durchschnittsbildung von Relativzahlen, bei der Preis- und Indexberechnung, beim Rückschluß vom Teil aufs Ganze Verwendung.

b) Streuungsmaße: Die Veränderlichkeit der Merkmale ist ein weiteres Kennzeichen der statistischen Gesamtheiten. Zur Messung dieser Variabilität stehen verschiedene Ansätze zur Verfügung: Variationsbreite, mittlerer Quartilabstand, durchschnittliche Abweichung, mittlere quadratische Abweichung. Theoretischer Eigenschaften wegen gebührt der letztern der Vorzug.

Die *mittlere quadratische Abweichung* ist wie folgt definiert

Einzelwerte: $$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \underset{i}{S} (x_i - \bar{x})^2} \quad ; \tag{5}$$

Häufigkeitsreihe: $$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \underset{j}{S} N_j (x_j - \bar{x})^2} \quad . \tag{6}$$

Die Größe s^2 wird kurzweg die *Streuung* genannt.

Für die numerische Auswertung sind nachstehende Beziehungen geeignet (dargestellt für die Häufigkeitsreihe):

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\left[\underset{j}{S} N_j x_j^2 - \frac{1}{N}(\underset{j}{S} N_j x_j)^2\right] = \frac{1}{N(N-1)}\left[N \underset{j}{S} N_j x_j^2 - (\underset{j}{S} N_j x_j)^2\right], \tag{7}$$

oder bei Ausübung der Transformation $v_j = \frac{1}{k}(x_j - D)$

$$s^2 = \frac{k^2}{N(N-1)}\left[N \underset{j}{S} N_j v_j^2 - (\underset{j}{S} N_j v_j)^2\right]. \tag{8}$$

Beachtenswert sind folgende algebraische Eigenschaften:

$$s^2_{x \pm a} = s^2_x$$

$$s^2_{ax} = a^2 s^2_x$$

$$s^2_{ax \pm by} = a^2 s^2_x + b^2 s^2_y \pm 2ab s_{xy}, \quad \text{mit} \quad s_{xy} = \frac{1}{N-1} \underset{i}{S} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

c) Abhängigkeitsmaße: Die natürliche Erweiterung der bisherigen Betrachtungen besteht darin, daß eine statistische Gesamtheit zwei oder mehrere Veränderliche umfaßt, die nicht getrennt, sondern vereinigt auftreten. Jetzt entsteht die Aufgabe, die gegenseitige Abhängigkeit der verschiedenen Veränderlichen zu messen. Dies führt auf die Korrelationsrechnung, welche über Stärke und Qualität der wechselseitigen Verbundenheit zu befinden hat. Bereits der elementarste Fall — die einfache lineare Regression — bietet methodisch recht interessante Aspekte (Erläuterung der stochastischen Abhängigkeit, Methode der kleinsten Quadrate, Deutung des Regressionskoeffizienten, Bestimmtheitsmaßes und Korrelationskoeffizienten).

4. *Statistische Verteilungen*

Statistische Verteilungen bilden ein besonders dankbares Lehrgebiet. Hier kann die Querverbindung zwischen Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischer Statistik klar herausgearbeitet werden.

Als Ausgangslage dient die BERNOULLI-*Verteilung*

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \qquad p + q = 1, \quad o \leq x \leq n. \tag{9}$$

Hieraus ist vermöge der Transformation

$$z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$$

der Grenzübergang in die GAUSS/LAPLACE-Verteilung zu vollziehen, ein Grenzübergang, der sich mit relativ einfachen Hilfsmitteln der Analysis bewerkstelligen läßt.

$$g(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \; e^{-1/2\, z^2}, \; -\infty < z < \infty. \tag{10}$$

Aufschlußreich erscheint jetzt eine allgemeine Kurvendiskussion (Symmetrie, Maximum, Wendepunkte, Normierung). Sodann deute man die Kurve als Wahrscheinlichkeitsverteilung einer stetigen Variablen z; in diesem Zusammenhang drängt sich die Definition der Wahrscheinlichkeitsfunktion auf

$$P\left\{ |u| < z \right\} = 2 \int_0^z g(u)\, du; \tag{11}$$

$$P\left\{ |u| > z \right\} = P(z) = 2 \int_z^\infty g(u)\, du. \tag{12}$$

Für statistische Untersuchungen erweist sich Ansatz (12) als besonders wichtig. Bedeutungsvoll ist die wechselseitige Bindung zwischen Wahrscheinlichkeitswert P und Schranke z:

zu gegebener Schranke z ist $P(z)$ nach (12) bestimmt;
zu gegebener Wahrscheinlichkeit P ist z_P nach

$$P = 2 \int_{z_P}^\infty g(u)\, du \tag{13}$$

berechenbar.

z_P heißt *Sicherheitsgrenze* und P ist die dazu gehörige *Sicherheitsschwelle.* Damit ist die Brücke geschlagen zu den modernen statistischen Prüfverfahren (Tests). Die Sicherheitsgrenzen dienen als Kriterien dafür, ob eine zu prüfende Meßgröße als statistisch gesichert (signifikant) oder bloß als zufällig zu bezeichnen ist.

Die Wahl der Sicherheitsgrenzen ist willkürlich und hängt von der jeweils vorliegenden Problemstellung sowie von den experimentellen Bedingungen ab. Eingebürgert haben sich folgende Ansätze:

Sicherheitsschwelle	Sicherheitsgrenze
$P = 5\,\%$	$z_P = \pm 1{,}960$
$= 1\,\%$	$= \pm 2{,}576$
$= 1\,‰$	$= \pm 3{,}291.$

Ausgehend von der Normalverteilung lassen sich weitere *Prüfverteilungen,* die χ^2–, t– und F–Verteilung nach einem einheitlichen Prinzip analytisch ableiten.

5. *Statistische Prüfverfahren*

Es bedarf jetzt noch des Nachweises, wie die Theorie der statistischen Verteilungen, insbesondere wie die darauf beruhenden wahrscheinlichkeitstheoretischen Kriterien der statistichen Analyse nutzbar gemacht werden. Neben dem Aufsuchen statistischer Maßzahlen handelt es sich bei Versuchsergebnissen meist noch darum, zu entscheiden,

ob zwei Durchschnitte, zwei Streuungen oder zwei Häufigkeiten wesentlich oder nur zufällig voneinander abweichen. Die mathematische Begründung liefert die Theorie der Stichproben.

a) Prüfen von Durchschnitten: Um die Abweichung eines Durchschnittes $\bar{x}$ vom theoretischen Wert μ zu prüfen, bedient man sich des *z-Testes.*

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \sqrt{N}\text{, mit } \sigma^2 = \text{Streuung der Grundgesamtheit.} \tag{14}$$

Kriterium: $z \geqq z_P$ Unterschied in den Durchschnitten signifikant;
$z < z_P$ Unterschied in den Durchschnitten zufällig.

Bei jedem Signifikanztest müssen Trugschlüsse in Kauf genommen werden. So wird beispielsweise bei der Sicherheitsschwelle von 5 % in fünf auf hundert Fällen ein zufällig zustande gekommener Wert fälschlicher Weise als wesentlich beurteilt. Soll dieses Risiko herabgesetzt werden, so sind strengere Anforderungen an das Kriterium zu stellen. Beim Übergang auf die Sicherheitsschwelle von 1 % oder 1 ‰ ist ein Trugschluß nur noch in einem auf hundert bzw. in einem auf tausend Fällen zu gewärtigen.

Ist die Grundstreuung σ^2 unbekannt und wird diese durch die Stichprobenstreuung s^2 approximiert, so bedient man sich — vor allem bei kleinen Stichproben — des *t-Testes.*

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{N}, \text{ mit } n^* = N-1 \quad F.G. \tag{15}$$

$$\text{und } s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2.$$

Kriterium: $t \gtrless t_{P,\, n^*}$ ($t_{P,\, n^*}$ = Sicherheitsgrenze)

b) Prüfen von Streuungen: Verbindlich ist der *F-Test;* nicht der Unterschied zweier Streuungen, sondern die Größenordnung des Quotienten der beiden Streuungen wird geprüft.

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}\text{, mit } n_1^* = N_1 - 1 \text{ und } n_2^* = N_2 - 1 \; F.G. \tag{16}$$

Kriterium: $F \gtrless F_{P;\, n_1^*,\, n_2^*}$ ($F_{P;\, n_1^*,\, n_2^*}$ = Sicherheitspunkt)

Die Handhabung der Tests im Sinne der Rechenvorschrift ist einfach und elementar; mehr Schwierigkeiten dagegen dürften die damit verbundenen wahrscheinlichkeitstheoretischen Erwägungen bieten.

Die Wunschliste bezüglich eines allfälligen Lehrganges in mathematischer Statistik an der höhern Mittelschule ist zweifelsohne reichlich befrachtet ausgefallen. Vor allem war es mir daran gelegen, eine Übersicht über die statistischen Methoden zu vermitteln und die Bedeutung neuzeitlicher Verfahren darzutun. Im Einzelfall wird sorgfältig zu erwägen sein, welche der gemachten Anregungen herauszugreifen sind und sich tatsächlich verwirklichen lassen. Stets achte man darauf, daß der Unterricht auf das logische Denken, das exakte Beobachten, das klare Erfassen und das richtige Interpretieren ausgerichtet ist. — (Gekürzte Fassung des Vortrages.)

In einem Korreferat begründete Dr. F. Steiger, Gymnasiallehrer, das Für und Wider der gemachten Anregungen und legte dar, welche Schwierigkeiten damit verbunden und wo der Verwirklichung Grenzen gesetzt sind. Ohne Abbau am Bisherigen können keine neuen Sachgebiete in den Unterricht aufgenommen werden; diese Auffassung teilten in der anschließenden Diskussion verschiedene Fachvertreter aus der Praxis.

---

206. Sitzung, Donnerstag, den 6. Dezember 1956

Vortrag von Herrn **Dr. R. Stettler**, Aarau: **«Ideale Objektive».**

Ein Objektiv, das einen Dingraum R auf einen Bildraum R' frei von geometrisch-optischen (monochromatischen) Bildfehlern abbildet, heißt *ideal.* Die Räume R (und R') können dabei 3-, 2- oder 1-dimensional sein.

Für 2-dimensionale Räume läßt sich folgendes *Theorem* beweisen: Die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius $r_1 \geqq 1$ läßt sich ideal abbilden auf die Oberfläche einer konzentrischen Kugel mit dem Radius $r_2 \geqq 1$. Das Objektiv ist eine konzentrische Einheitskugel mit inhomogener kugelsymmetrischer Brechungszahl. Es existieren abzählbar unendlich viele derartige Einheitskugel-Objekte. Im Spezialfall $r_1 \to \infty$ erhält man die sogenannte LUNEBERG-Linse und Verallgemeinerungen hiervon.

Vgl. auch R. STETTLER, Über die optische Abbildung von Flächen und Räumen, Optik, Band 12, 1955. (Referat in H. P. A. 1955, S. 495.) (Selbstreferat)