Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 3 (1908)

Artikel: A. de Moivres Abhandlung über Leibrenten

Autor: Böschenstein, Karl

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967413

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

B. Wissenschaftliche Mitteilungen.

(Separatabdruck aus der „Zeitschrift für schweiz. Statistik", 44. Jahrg., 1908.)

A. de Moivres Abhandlung über Leibrenten.

Von Dr. **Karl Böschenstein,** Bern.

Unter diesem Titel veröffentlicht Emanuel Czuber, Professor an der technischen Hochschule in Wien eine Übersetzung [1]) der von Moivre verfassten Abhandlung über Leibrenten. Vor mir liegt ein Originalbändchen dieser Abhandlung, das mir Herr Professor Dr. Moser in Bern in freundlicher Weise zur Verfügung gestellt hat. Der Titel desselben lautet:

ANNUITIES
ON
LIVES
WITH
Several TABLES, exhibiting at one View
the Values of Lives, for different
Rates of Interest.
FOURTH EDITION,
In which are added,
TABLES for Three and Three and a Half per Cent.
By A. DE MOIVRE,
Fellow of the Royal Societies of London and Berlin.
London:
Printed for A. Millar, over-against Catherinestreet,
in the Strand. MDCCLII.

[1]) A. de Moivres Abhandlung über Leibrenten. Nach der dritten Auflage von 1756 ins Deutsche übertragen und mit Anmerkungen versehen von Emanuel Czuber, o. ö. Professor an der technischen Hochschule in Wien. Sonderheft der „Versicherungswissenschaftlichen Mitteilungen". Wien 1906. Verlag des österreichisch-ungarischen Verbandes der Privat-Versicherungsgesellschaften. Für den Buchhandel bei Franz Deuticke in Leipzig und Wien.

Moivre starb im Jahre 1754, also zwei Jahre nach Veröffentlichung der vierten Auflage seiner Rentenrechnung. Professor Czuber hat nun seiner Übersetzung die dritte Auflage aus dem Jahre 1756 zu Grunde gelegt, und er bemerkt in seiner Einleitung auf pag. V:

„Das in England damals schon vielverbreitete Rentenwesen, dem es bis dahin an einer theoretischen Grundlage gefehlt hatte, bot Moivre ein ebenso wichtiges als wegen seiner Neuheit schwieriges Anwendungsgebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung, deren tiefe, weit über die Glücksspiele hinausgehende Bedeutung er richtig erkannt hatte. Gewissermassen als Fortsetzung der Doctrine of Chances erschien 1724 die Abhandlung « Evaluation of Annuities on Lives », die dann 1742 zum zweitenmal als selbständige Schrift aufgelegt wurde. In dritter Auflage ist sie mit der Doctrine zu einem Werke vereinigt. Diese dritte Auflage von 1756, die der vorliegenden deutschen Ausgabe zugrunde liegt, stammt nicht mehr von des Autors eigener Hand, sie wurde von einem Freunde Moivres besorgt, mit dem dieser ein Jahr vor seinem Tode den Plan besprochen und dem er sein mit Randnoten versehenes Handexemplar der frühern Auflage übergeben hatte.“

Aus diesem Zitat ist deutlich ersichtlich, dass Professor Czuber nur drei Auflagen bekannt sind; es besteht jedoch, wie aus dem oben gegebenen Titelblatt hervorgeht, noch eine vierte Auflage, die merkwürdigerweise vier Jahre früher datiert ist als die der Übersetzung zugrunde liegende dritte Auflage aus dem Jahre 1756. Die Abweichungen zwischen der Czuberschen Übersetzung und der vierten Auflage Moivres sind unbedeutend; sie seien hier gleich mitgeteilt. Abgesehen von einer irrtümlichen Numerierung der Probleme in

der vierten Auflage fehlen in derselben gegenüber der Übersetzung von Czuber:

1. Czuber, von pag. 26, Zeile 15, bis pag. 27, Zeile 14.

2. Czuber, von pag. 48, letztes Alinea, bis pag. 49, Schluss.

3. Czuber, von pag. 64, Kap. IX, bis ans Ende (pag. 79).

Die widersprechenden Jahrzahlen 1752 (vierte Auflage) und 1756 (dritte Auflage) lassen darauf schliessen, dass die Exemplare der frühern Auflagen äusserst selten geworden sind, und es ist Herrn Professor Czuber als Verdienst anzurechnen, dass er eine Neuauflage, gleichsam zur 150. Jahresfeier der von ihm benutzten dritten Auflage, der Moivreschen Rentenrechnung herbeigeführt hat. Die Studierenden deutscher Zunge der Versicherungswissenschaften werden ihm besonders dankbar sein, dass er mit der Herausgabe einer neuen Auflage gleichzeitig eine Übersetzung verbunden und dieselbe mit Anmerkungen versehen hat. Hierdurch wird es weiten Kreisen ermöglicht, Moivres Rentenrechnung aus seiner eigenen Schrift so kennen zu lernen, wie sie es, ganz abgesehen vom historischen Interesse, ihrem Inhalte nach verdient. Professor Czuber sagt in seiner Einleitung: „Der Reichtum der Probleme und der Scharfsinn, der auf ihre Lösung verwendet ist, verdienen Bewunderung.“

Die Abhandlung Moivres zerfällt in zwei Teile. Im ersten Teil stellt Moivre 33 Probleme, gibt dazu die Lösung (Formel) und erläutert dieselbe an einigen Beispielen; der erste Teil schliesst mit den Rententafeln. Im zweiten Teile gibt Moivre die Ableitungen der im ersten Teile aufgestellten Formeln.

Die nachfolgenden Betrachtungen sind einer im Sommer 1904 dem mathematisch-versicherungswissenschaftlichen Seminar der Universität Bern eingereichten Arbeit entnommen und befassen sich mit einigen Problemen Moivres. Die Zitate beziehen sich nun auf die Übersetzung von Professor Czuber, die im Buchhandel erhältlich ist.

I.

Das erste Problem handelt von der Leibrente[1]:

„*Problem I.*

„Unter der Annahme, dass die Lebenswahrscheinlichkeit in arithmetischer Progression abnimmt, den Wert der Leibrente für ein gegebenes Alter zu finden.

„*Lösung:* Es sei der Rentenbetrag $= 1$, die Zinsrate $= r$, die Lebensergänzung $= n$, der Wert einer durch n Jahre währenden Zeitrente $= P$; dann wird der Wert der Leibrente $\frac{1 - \frac{r}{n} P}{r - 1}$ sein, was ausführlich in Worten ausgedrückt so heisst:

„Nimm den Wert einer Zeitrente für so viele Jahre, als durch die Lebensergänzung angezeigt wird; multipliziere diesen Wert mit der Zinsrate, dividiere das Produkt durch die Lebensergänzung und subtrahiere den Quotienten von der Einheit, den Rest dividiere durch den Zins von 1 £; dann drückt der letzte Quotient den Wert der Leibrente für das gegebene Alter aus."

Es sei bemerkt, dass Moivre als höchstes Alter 86, das in Rechnung zu ziehen sei, annahm. Die Ergänzung eines Alters bis 86, nannte er das Lebenscomplement n, so dass, wenn x das Alter bezeichnet, $x + n = 86$ ist.

---

[1]) Czuber, pag. 5.

Moivre bemerkt in der Vorrede zu seiner zweiten Auflage[1]) (diese Vorrede befindet sich auch in der vierten Auflage), dass er in seiner Annahme, 86 als höchstes Alter zu setzen, noch durch die im Anfang des XVIII. Jahrhunderts in der Schweiz erstellten Beobachtungstafeln bestärkt wurde. Leider gelang es mir nicht, in Erfahrung zu bringen, welche Beobachtungen gemeint sind. Bekannt ist die Denkschrift über den Stand der Bevölkerung im Waadtland von Pfarrer Joh. Ludwig Muret (1715—1796)[2]). Diese Arbeit erschien 1766 als Preisarbeit einer 1764 von der Ökonomischen Gesellschaft in Bern ausgeschriebenen Konkurrenzschrift: „Über den Stand der Bevölkerung des ganzen Kantons oder eines Distriktes". Muret, der schon als Jüngling Proben seiner mathematischen Talente gab, wird jedenfalls schon vor 1764 sich mit der Bevölkerungsstatistik beschäftigt haben. Aber wenn man anderseits erfährt, dass Muret 1740 zum Geistlichen geweiht wurde, zuerst einige Jahre als Hülfsgeistlicher an der französischen Kirche in Bern, dann als Pfarrer in Orbe, Grandson und Corsier wirkte und erst 1747 seinen Wohnsitz bleibend in Vevey bezog, so ist kaum anzunehmen, dass Moivre schon 1742 die Beobachtungen Murets gemeint hat. — Die Formel Moivres sei hier bewiesen; die Rente ist postnumerando zahlbar.

Gehen wir von x-jährigen Personen aus, so leben im Alter x noch n Personen, im nächsten Jahre $(n-1)$ Personen, im folgenden Jahre noch $(n-2)$ Personen u. s. f., da die Absterbeordnung eine arithmetische Reihe

---

[1]) Czuber, pag. 2 u. 3.

[2]) Man vergl.: Dissertation von Aug. Lauterburg: Joh. Ludwig Muret, ein schweiz. Nationalökonom und Statistiker des XVIII. Jahrhunderts. Bern 1893.

bildet. Der Barwert pro Person bei einer Rente von 1 wird daher:

$$a_x = \frac{1}{n}\Big[v\,(n-1) + v^2\,(n-2) + v^3\,(n-3) + \ldots + v^n\,(n-n)\Big]$$

$$= v + v^2 + v^3 + \ldots + v^n - \frac{1}{n}\,(v + 2\,v^2 + 3\,v^3 + \ldots + nv^n).$$

Der erste Teil stellt eine n Jahre feste postnumerando Rente dar

$$v\,\frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{i} = R; \qquad (1)$$

Den Klammerausdruck bezeichnen wir mit A:

$$A = v + 2\,v^2 + 3\,v^3 + \ldots + nv^n,$$

$$\frac{A}{v} = 1 + 2\,v + 3\,v^2 + \ldots + nv^{n-1}.$$

Durch Subtraktion folgt

$$A\left(\frac{1}{v} - 1\right) = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} - nv^n;$$

da $\frac{1}{v} - 1 = i$, so ist

$$Ai = \frac{R}{v} - nv^n,$$

$$A = \frac{R}{vi} - \frac{nv^n}{i}. \qquad (2)$$

Setzen wir die Werte von (1) und (2) ein, so wird

$$a_x = R - \frac{R}{nvi} + \frac{v^n}{i}$$

$$= \frac{Ri - \frac{R}{nv} + v^n}{i}.$$

Aus (1) folgt: $Ri = 1 - v^n$.

$$a_x = \frac{1 - \frac{R}{nv}}{i} \qquad (3)$$

und dies ist die Moivresche Rentenformel; denn $\frac{1}{v} = 1 + i = r$; $R = P$ und man erhält

$$a_x = \frac{1 - \frac{r}{n} P}{r - 1}.$$

Nach dieser Formel hat Moivre seine Rententafeln à 3, 3½, 4, 5 und 6% berechnet. Die Tabelle à 3% lautet:

Age	Value	Age	Value	Age	Value
1	15. 05	14	19. 33	27	17. 33
2	16. 62	15	19. 19	28	17. 16
3	17. 83	16	19. 05	29	16. 98
4	18. 46	17	18. 90	30	16. 80
5	18. 90	18	18. 76	31	16. 62
6	19. 33	19	18. 61	32	16. 44
7	19. 60	20	18. 46	33	16. 25
8	19. 74	21	18. 30	34	16. 06
9	19. 87	22	18. 15	35	15. 86
10	19. 87	23	17. 99	36	15. 67
11	19. 74	24	17. 83	37	15. 46
12	19. 60	25	17. 66	38	15. 26
13	19. 47	26	17. 50	39	15. 05

u. s. f.

Nun stimmen diese Werte erst vom Alter 10 mit der Formel überein; bei sämtlichen fünf Tafeln sehen wir, dass folgende Barwerte übereinstimmen:

$a_9 = a_{10}$ $\quad a_6 = a_{14}$ $\quad a_3 = a_{24}$

$a_8 = a_{11}$ $\quad a_5 = a_{17}$ $\quad a_2 = a_{31}$

$a_7 = a_{12}$ $\quad a_4 = a_{20}$ $\quad a_1 = a_{39}$

Moivre sagt hierzu[1]: „Es ist nicht nötig, zu bemerken, dass von der Geburt bis zum Alter von 12 Jahren die Lebenswahrscheinlichkeit zunimmt, nachher etwas abnimmt, worin ein Grund der auffälligen Unregelmässigkeit der Tafeln an ihrem Anfang zu erblicken ist.“

Es scheint, dass Moivre die Rentenbarwerte für das jugendliche Alter willkürlich wählte; denn in allen Tafeln ist der Altersunterschied zweier Personen mit gleichen Rentenbarwerten derselbe.

Rekonstruiert man ferner die Überlebensordnung aus den Rentenbarwerten, indem man

$$l_x \cdot a_x = vl_{x+1} + vl_{x+1} \cdot a_{x+1}$$

setzt, woraus

$$l_x = \frac{vl_{x+1}(1 + a_{x+1})}{a_x}$$

folgt, so liefern die fünf verschiedenen Tafeln auch verschiedene Werte:

Alter	Zahl der Lebenden				
	3 %	3½ %	4 %	5 %	6 %
9	77. 50	77. 45	77. 45	77. 40	77. 28
8	79. 55	79. 40	79. 26	79. 08	78. 89
7	81. 73	81. 44	81. 48	80. 83	80. 56
6	84. 56	84. 11	83. 76	83. 05	82. 68
5	88. 31	87. 60	86. 95	85. 93	85. 26
4	91. 54	91. 42	90. 55	89. 08	88. 02
3	97. 89	96. 49	95. 30	93. 23	91. 79
2	107. 70	105. 41	103. 55	100. 30	97. 94
1	122. 39	118. 90	115. 81	110. 86	100. 95

[1]) Czuber, pag. 2.

Zum Schlusse dieses Abschnittes möchte ich es nicht unterlassen, das I. Problem des Anhanges[1]) der dritten Auflage, der in der vierten Auflage fehlt, zu erwähnen, das eine Anwendung der Differentialrechnung bringt und, wie auch Professor Czuber bemerkt, die erstmalige Integration der allgemeinen Exponentialfunktionen enthält. Das Problem lautet:

„Den Wert einer derart festgesetzten Rente zu finden, dass sie zu einem Leben gegebenen Alters gehören soll; und dass nach dem Aufhören dieses Lebens ein solcher Teil der Rente an die Erben des verstorbenen Rentenbesitzers gezahlt werden soll, als es der zwischen der letzten Zahlung und dem wirklichen Augenblick des Lebensablaufs eingeschlossenen Zeit entspricht."

Moivre löste diese Aufgabe folgenderweise: Der gesuchte Rentenbarwert sei Q; es bezeichne ferner z einen unbestimmten Teil der Lebensergänzung n. Die Wahrscheinlichkeit, den Zeitraum z zu erleben, ist, da wir von n Personen ausgehen, $\frac{n-z}{n}$ und die Wahrscheinlichkeit, um im nächsten Moment zu sterben, wird

$$\frac{(n-z)-(n-z-dz)}{n-z} = \frac{dz}{n-z}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person die Zeit z erlebe und nachher sofort sterbe, wird daher

$$\frac{n-z}{n} \cdot \frac{dz}{n-z} = \frac{dz}{n}.$$

Der Wert einer sichern Rente für die Zeit z wird nach Gleichung (1), da $v = \frac{1}{r}$

$$R = \frac{1-\frac{1}{r^z}}{i} = \frac{1}{i} - \frac{1}{ir^z}.$$

[1]) Czuber, pag. 69 u. ff.

Die Erwartung eines Lebens für das Intervall dz wird

$$\frac{dz}{ni} - \frac{dz}{ni\,r^z}.$$

Um den verlangten Wert des Lebens zu erhalten, integriert man diesen Ausdruck. Moivre sagt hierüber:

„Nun ist es klar, dass die Fluente [1]) des ersten Teils $\frac{z}{p}$ [2]) ist; da aber die Fluente des zweiten Teils nicht so leicht zu finden ist, wird es nicht unangemessen sein, an dieser Stelle zu zeigen, durch welchen Kunstgriff ich sie gefunden habe; denn mir ist nicht bekannt, ob ein anderer von derselben Methode Gebrauch gemacht hat; alles, was ich sagen kann, ist, dass ich sie nie gebraucht haben würde, wenn nicht unter den besondern Umständen dieses Problems.“

Er setzt dann:

$$r^z = x,$$

$$z \log r = \log x,$$

$$\log r dz = \frac{dx}{x},$$

$$dz = \frac{dx}{x \log r},$$

$$\frac{dz}{r^z} = \frac{dx}{x^2 \log r},$$

$$\int \frac{dz}{r^z} = \int \frac{dx}{x^2 \log r} = -\frac{1}{x \log r}$$

und daher $$\int -\frac{dz}{nir^z} = \frac{1}{nir^z \log r}.$$

---

[1]) Integral.

[2]) $p = ni$.

Die Summe der beiden Integrale ist

$$\frac{z}{ni} + \frac{1}{nir^z \log r}.$$

Das ganze Integral sei

$$S = \frac{z}{ni} + \frac{1}{nir^z \log r} + q,$$

wo q das ganze Integral zu 0 machen soll für den Fall $z = 0$.

Ist $z = 0$, so wird

$$\frac{1}{ni \log r} + q = 0 \text{ und } q = -\frac{1}{ni \log r}.$$

$$S = \frac{z}{ni} - \frac{1}{ni \log r} + \frac{1}{nir^z \log r}$$

$$= \frac{z}{ni} - \frac{1}{ni \log r}\left[1 - \frac{1}{r^z}\right]. \qquad (4)$$

Es war aber $R = \frac{1}{i} - \frac{1}{ir^z}$,

$$Ri = 1 - \frac{1}{r^z}.$$

Dies in Gleichung (4) eingesetzt:

$$S = \frac{z}{ni} - \frac{1}{n \log r} \cdot R.$$

Setzt man $z = n$, so erhält man den gesuchten Wert

$$Q = \frac{1}{i} - \frac{R}{n \log r}. \qquad (5)$$

II.

Das zweite Problem handelt von der Verbindungsrente zweier Personen.

„*Problem II.*[1])

„Wenn die Werte zweier einzelner Leben gegeben sind, den Wert einer für die Dauer ihres Zusammenbestehens zugesicherten Rente zu finden.

Lösung: Es sei M der Wert des einen Lebens, P der Wert des andern, r die Zinsrate; dann ist der Wert einer Rente für die zwei verbundenen Leben

$$\frac{MP}{M + P - (r - 1)\, MP}."$$

Ich erlaube mir, gleich anfangs zu bemerken, dass diese Formel nur angenäherte Resultate gibt, und ich will zunächst dartun, wie Moivre zu dieser Formel gelangte. Derselben sei dann nachher die genaue Lösung gegenübergestellt.

Moivre ging von einem fiktiven Leben aus[2]), bei dem die Anzahl der Chancen für die Fortdauer von Jahr zu Jahr a und die Chance für das Aufhören stets gleich b ist. Setzt man $a + b = s$, so wird die Wahrscheinlichkeit, 1, 2, 3, . . . Jahre zu leben, sein

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{a^2}{s^2} \cdot \frac{a^3}{s^3} \cdot \ldots$$

Der Barwert einer Rente auf ein solches Leben wird daher gegeben durch

$$M = \frac{a}{sr} + \left(\frac{a}{sr}\right)^2 + \left(\frac{a}{sr}\right)^3 + \ldots$$

$$= \frac{a}{sr - a}, \quad \text{wo } r = 1 + i.$$

Hieraus folgt $\frac{a}{s} = \frac{Mr}{M + 1}$.

---

[1]) Czuber, pag. 6.

[2]) Czuber, pag. 52.

Nun nimmt Moivre an, dass die Kombination zweier oder mehrerer wirklicher Leben sehr nahe sei der Kombination zweier oder mehrerer fiktiver Leben und daher auch ihre Verbindungsrenten nahe denselben Wert besitzen müssen. Ist nun die Wahrscheinlichkeit des Fortbestehens von Jahr zu Jahr für das eine Leben x, für das andere Leben y, so wird die Wahrscheinlichkeit des gemeinsamen Fortbestehens

$$xy,\ x^2 y^2,\ x^3 y^3 \ldots .$$

und der Barwert der Verbindungsrente wird

$$\frac{xy}{r} + \left(\frac{xy}{r}\right)^2 + \left(\frac{xy}{r}\right)^3 + \ldots .$$

$$= \frac{xy}{r - xy}.$$

Da aber $x = \frac{Mr}{M+1}$; $y = \frac{Pr}{P+1}$,

so wird der Rentenbarwert

$$\frac{\frac{MPr^2}{(M+1)(P+1)}}{r - \frac{MPr^2}{(M+1)(P+1)}} = \frac{MPr}{(M+1)(P+1) - MPr}$$

$$= \frac{MPr}{M + P + 1 - (r-1)\,MP.} \qquad (6)$$

Diese Formel findet sich auch in der ersten Auflage Moivres und hieraus leitete er als Näherungswert ab

$$\frac{MP}{M + P - (r-1)\,MP}\ ^{1)}. \qquad (7)$$

Gehen wir nun zu einer Kombination zweier Leben über, von denen nach Problem I jedes einzeln der arithmetischen Reihe folgt. Die Personen seien im Alter

[1]) Man vergleiche die Anmerkung 34 von Czuber.

x und y; ihre Lebenskomplemente betragen m und n, so dass $x + m = 86$; $y + n = 86$.

Es sei ferner $x < y$, also $m > n$.

Gehen wir von mn Paaren aus, so wird die Verbindungsrente

$$a_{xy} = \frac{1}{mn}\Big[v(m-1)(n-1)(+v^2(m-2)(n-2)+\ldots$$
$$+ v^n(m-n)(n-n)\Big]$$
$$= \frac{1}{mn}\Big[mn(v+v^2+\ldots+v^n)-(m-n)$$
$$(v+2v^2+\ldots+nv^n)+(v+4v^2+\ldots+n^2v^n)\Big]$$
$$= R - \frac{m+n}{mn}A + B\cdot$$

Wir setzen

$$B = v + 4v^2 + 9v^3 + \ldots + n^2 v^n$$
$$\frac{B}{v} = 1 + 4v + 9v^2 + \ldots + n^2 v^{n-1}$$
$$\frac{B}{v} + (n+1)^2 v^n - 1 = v + 9v^2 + \ldots + n^2 v^{n-1}$$
$$+ (n+1)^2 v^n = C$$
$$C - A - \left[\frac{A}{v} + (n+1)v^n - 1\right] = B$$
$$B = \frac{(n+1)^2 v^n - (n+1)v^n - A(2+i)}{1-\frac{1}{v}}$$
$$= \frac{A(2+i) - nv^n(n+1)}{i}.$$

Setzt man für A nach Gleichung (2) den Wert ein, so wird

$$B = \frac{R(2+i) - nv^{n+1}(2+2i+ni)}{vi^2}.$$

$$a_{xy} = R - \frac{m+n}{mn} \cdot \frac{R - nv^{n+1}}{vi}$$

$$+ \frac{R(2+i) - nv^{n+1}(2+2i+ni)}{mnvi^2},$$

$$R = \frac{1-v^n}{i}$$

$$= \frac{1}{i} - \frac{R(mi+ni-i-2) + 2nv^{n+1}(1+i)}{mnvi^2}$$

$$= \frac{1}{i} - \frac{R\left[i(m+n-1)-2\right] + 2nv^n}{mnvi^2}$$

$$= \frac{1}{i} - \frac{R\left[i(m+n-1)-2\right] - 2n(1-v^n) + 2n}{mnvi^2}$$

$$1 - v^n = Ri$$

$$= \frac{1}{i} - \frac{R\left[i(m-n-1)-2\right] + 2n}{mnvi^2}. \qquad (8)$$

Baily hat in seiner „Theorie der Lebensrenten“ [1]) das neunte Kapitel der Hypothese des gleichförmigen Absterbens von Moivre gewidmet. Er leitet auch die Verbindungsrente für zwei und drei Leben ab und gibt den Barwert der erstern durch die Formel

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1+\varrho}{a\varrho}\left[\frac{y}{b}\left(a-b-1-\frac{2}{\varrho}\right)+\frac{2}{\varrho}\right],$$

welche mit der Gleichung (6) übereinstimmt; es ist

$$\varrho = i;\ y = R;\ a = m;\ b = n.$$

Sind die beiden Personen gleichen Alters, so reduzieren sich die Barwerte ihrer Verbindungsrenten.

---

[1]) Francis Baily: Die Theorie der Lebensrenten. Deutsch bearbeitet von Dr. C. H. Schnuse. Weimar 1839.

In den Gleichungen (6) und (7) wird $M = P$ und die Barwerte lauten:

$$\frac{P^2 r}{1 + \left[2 - (r - 1) P\right] P} \qquad (6a)$$

und

$$\frac{P}{2 - (r - 1) P}. \qquad (7a)$$

In Gleichung (8) wird $m = n$ und ihr Wert wird

$$\frac{1}{i} - \frac{2\,n - R\,(2 + i)}{(ni)^2 \cdot v}. \qquad (8a)$$

Die nachfolgende Tabelle gibt einige Barwerte von Verbindungsrenten unter Annahme von 3 %.

Alter der beiden Personen	Barwerte nach		
	Gleichung 6 und 6*a*	Gleichung 7 und 7*a*	Gleichung 8 und 8*a*
10 und 70	5.5689	5.6478	6.7332
30 „ 50	9.2991	9.4428	10.1815
40 „ 45	8.9457	9.0718	10.2846
10 „ 10	14.0738	14.1534	15.2055
40 „ 40	9.4225	9.5447	10.7765
70 „ 70	3.3431	3.5276	4.2707

Aus dieser Tabelle ist ersichtlich, dass die Moivresche Formel nur angenäherte Werte ergibt.

III.

Das dritte Problem lautet[1]):

„*Problem III.*

„Wenn die Werte dreier einzelnen Leben gegeben sind, den Wert einer für die Dauer ihres Zusammenbestehens festgesetzten Rente zu finden.

[1]) Czuber, pag. 7.

„*Lösung:* Sind M, P, Q die bezüglichen Werte der einzelnen Leben, so ist der Wert der drei verbundenen Leben $\frac{MPQ}{MP + MQ + PQ - 2dMPQ}$, wenn d den Zins von 1 £ bedeutet.“

Es ist ohne weiteres anzunehmen, dass Moivre auch hier von drei fiktiven Leben ausging und so zu dieser einfachen Lösung gelangte. Viel komplizierter gestaltet sich die Ableitung, wenn jedes Leben einzeln der arithmetischen Reihe nach Problem I folgt.

Die drei Personen seien im Alter x, y und z; die Lebenscomplemente betragen m, n und p.

$$x + m = 86 \qquad y + n = 86 \qquad z + p = 86;$$

ferner sei $m > n$; $p > n$.

Die Anzahl der Verbindungen sei mnp.

$$\begin{aligned} a_{xyz} &= \frac{1}{mnp}\Big[v\,(m-1)\,(n-1)\,(p-1) + v^2\,(m-2)\,(n-2)\,(p-2) + \ldots + v^n\,(m-n)\,(n-n)\,(p-n)\Big] \\ &= \frac{1}{mnp}\Big[mnp\,(v + v^2 + v^3 + \ldots + v^n) - (mp + np + mn)\,(v + 2v^2 + 3v^3 + \ldots + nv^n) \\ &\quad + (m + n + p)\,(v + 4v^2 + 9v^3 + \ldots + n^2 v^n) - (v + 8v^2 + 27v^3 + \ldots + n^3 v^n)\Big] \\ &= \frac{1}{mnp}\Big[mnp\,R - (mn + mp + np)\,\frac{R - nv^{n+1}}{vi} + (m + n + p)\,\frac{R(2+i) - nv^{n+1}(2 + 2i + ni)}{vi^2} - D\Big] \text{ [1]} \end{aligned}$$

[1]) Man vergleiche Problem I und II.

$$D = v + 8\,v^2 + 27\,v^3 + \ldots + n^3\,v^n$$

$$\frac{D}{v} = 1 + 8\,v + 27\,v^2 + \ldots + n^3\,v^{n-1}$$

$$\frac{D}{v} + (n+1)^3\,v^n - 1 = 8\,v + 27\,v^2 + \ldots + n^3\,v^{n-1}$$
$$+ (n+1)\,v^n = E$$

$$E - 2\,B - \left[\frac{B}{v} + (n+1)^2\,v^n - 1\right] - A = D.$$

$$D - \frac{D}{v} = -2\,B - \left[\frac{B}{v} + (n+1)^2\,v^n - 1\right]$$
$$- A + (n+1)^3\,v^n - 1$$

$$D\left[1 - \frac{1}{v}\right] = -Di$$

$$D = \frac{B\left(2 + \frac{1}{v}\right) + A - nv^n\,(n^2 + 2\,n + 1)}{i}$$

$$v = \frac{1}{1+i}$$

$$2 + \frac{1}{v} = 3 + i$$

Setzt man ferner für B und A die früher gefundenen Werte ein, so erhält man

$$D = \frac{R\,[i^2 + 6\,i + 6] - nv^{n+1}\,(n^2 i^2 + 3\,ni^2 + 3\,i^2 + 3\,ni + 9\,i + 6)}{vi^3}.$$

$$a_{xyz} = R - \frac{1}{mnpvi^3}\Big\{(mn + mp + np)\,(R - nv^{n+1})\,i^2$$
$$- (m + n + p)\Big[R\,(2 + i) - nv^{n+1}\,(2 + 2i$$
$$+ ni)\Big]\,i + R\,(i^2 + 6\,i + 6) - nv^{n+1}\,(n^2\,i^2$$
$$+ 3\,ni^2 + 3\,i^2 + 3\,ni + 9\,i + 6)\Big\}$$

$$= \frac{1}{i} - \frac{1}{mnpvi^3} \Big\{ R \Big[i^2 (mn + mp + np - m - n - p + 1) - 2i \left(m + n + p - 3 - \frac{3}{i}\right) \Big] + nv^n \Big[2mi + 2pi - ni - 3i - 6 \Big] \Big\} \qquad (9)$$

Baily [1]) gibt die Verbindungsrente für drei Leben nach Moivre durch:

$$a_{xyz} = \frac{1}{i} - \frac{1}{mpvi} \Big[\frac{1}{i} \left(2m + 2p - n - 3 - \frac{6}{i}\right) - \frac{2R}{ni} \left(m + p - 2n - 3 - \frac{3}{i}\right) + \frac{R}{n} (m - n - 1)(p - n - 1) \Big]. \qquad (10)$$

Den Übergang von Gleichung (9) zu Gleichung (10) findet man wie folgt:

Es ist

$$mn + mp + np - m - n - p + 1 = (m - n - 1)(p - n - 1) + 2mn + 2np - 3n - n^2;$$

dann wird Gleichung (9):

$$a_{xyz} = \frac{1}{i} - \frac{1}{mpvi} \Big[\frac{v^n}{i} \left(2m + 2p - n - 3 - \frac{6}{i}\right) + \frac{R}{n} (m - n - 1)(p - n - 1) + R (2m + 2p - 3 - n) - \frac{2R}{ni} \left(m + n + p - 3 - \frac{3}{i}\right) \Big].$$

Ersetzt man in der grossen Klammer im dritten Gliede R durch $\frac{1 - v^n}{i}$ und addiert zum dritten Gliede $-\frac{6R}{i}$ und zum vierten Gliede $+\frac{6R}{i}$, so erhält man

[1]) Baily: Die Theorie der Lebensrenten.

$$a_{xyz} = \frac{1}{i} - \frac{1}{mpvi}\left[\frac{1}{i}\left(2m + 2p - n - 3 - \frac{6}{i}\right)\right.$$
$$+ \frac{R}{n}(m - n - 1)(p - n - 1) - \frac{2R}{ni}\left(m - 2n\right.$$
$$\left.\left. + p - 3 - \frac{3}{i}\right)\right].$$

Dies ist die Formel von Baily.

Sind alle drei Personen gleichen Alters, so wird in der Formel Moivres $M = P = Q$, und die Formel reduziert sich auf

$$\frac{M}{3 - 2dM}.$$

Ist $x = y = z$, so dass in Gleichung (10) $m = n = p$ wird, so erhält man

$$a_{xxx} = \frac{1}{i} - \frac{1}{m^2vi}\left[\frac{1}{i}\left(3m - 3 - \frac{6}{i}\right) + \frac{R}{m} + \frac{2R}{mi}\left(3 + \frac{3}{i}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{i} - \frac{1}{(mi)^2v}\left[3\left(m - 1 - \frac{2}{i}\right) + \frac{R}{mi}(6 + 6i + i^2)\right]. \quad (10a)$$

Beispiele:

Verzinsung 3 %.

Alter der drei Personen	Verbindungsrente	
	nach Moivre	nach Gleichung (9) oder (10)
30 : 40 : 50	6.803	8.164
10 : 40 : 70	4.663	5.276
46 : 46 : 46	6.158	7.542

Zu diesen Beispielen ist noch zu bemerken:

Während Moivre in den Problemen I und II unter M und P stets den Barwert der Leibrente für das

betreffende Alter versteht und diese Werte in den Beispielen auch in Rechnung setzt, löst er nun im Problem III ein Beispiel, wo er für M, P und Q die Zahl der „Ankaufsjahre“ einsetzt, obschon er eingangs der Lösung sagt, dass M, P und Q die Werte der einzelnen Leben bedeuten.

In den vorausgegangenen Abschnitten kommt der Ausdruck „Ankaufsjahre“ (Years Purchase) nicht vor. Man könnte erwarten, dass unter „Ankaufsjahre“ die Anzahl der Jahre zu verstehen seien, für die eine sichere Rente von 1 den gleichen Barwert wie die Leibrente für das betreffende Alter aufweise. Allein schon das erste Beispiel liefert ein ungünstiges Resultat. Nach den Tabellen Moivres ist der Barwert der Leibrente für einen 30jährigen $16._{80}$, was dem Barwert einer sichern Rente für $23._{7}$ Jahre entspricht. Für einen 40jährigen ist der Barwert $14._{84} = 19._{9}$ Jahre, für einen 50jährigen $12._{51} = 15._{9}$ Jahre.

Setzt man diese Zahlen ein, so ergibt sich für die Verbindung 30 : 40 : 50 ein Barwert von $10._{489}$.

Beispiel 2 ergibt für 10 : 40 : 70 den Wert $6._{18}$ und Beispiel 3 für 46 : 46 : 46 den Wert $9._{05}$.

Dies alles unter Annahme von 3 % Verzinsung.

IV.

Die Probleme IV und V geben zu keinen besondern Bemerkungen Anlass. Sie seien hier noch der Vollständigkeit wegen angeführt. Das IV. Problem lautet:

[1]) „Wenn die Werte zweier einzelnen Leben gegeben sind, den Wert einer Rente auf das längste von ihnen, das ist, einer Rente zu finden, welche so lange währt, als eines der Leben besteht.

---

[1]) Czuber, pag. 9.

„*Lösung:* Es sei M der Wert eines Lebens, P der Wert eines andern, $\overline{MP}$ der Wert der zwei verbundenen Leben, dann ist der Wert des längsten der zwei Leben $M + P - \overline{MP}$. In Worten also: Von der Summe der Werte der einzelnen Leben subtrahiere man den Wert der verbundenen Leben, und der Rest ist der Wert des längsten.“

Wir haben es hier mit einer Verbindungsrente bis zum zweiten Tode zu tun; ihr Barwert ist bekanntlich

$$a_{\overline{xy}} = a_x + a_y - a_{xy}$$

Dieser Ausdruck entspricht genau der Moivreschen Form.

Sind die Leben gleichen Alters, so gibt Moivre den Barwert durch

$$2\,M' - M'',$$

wo M' eine Leibrente, M'' eine Verbindungsrente für zwei Personen gleichen Alters, M''' für drei gleichaltrige Personen bedeutet.

V.

[1]) „Wenn die Werte dreier einzelnen Leben gegeben sind, den Wert der Rente auf das längste von ihnen zu finden.

„*Lösung:* Es seien M, P, Q die Werte der einzelnen Leben, $\overline{MP}$, $\overline{MQ}$, $\overline{PQ}$ die Werte aller Lebensverbindungen zu zweien, $\overline{MPQ}$ der Wert der drei verbundenen Leben, dann ist der Wert einer Rente auf das längste von ihnen

$$M + P + Q - \overline{MP} - \overline{MQ} - \overline{PQ} + \overline{MPQ},$$

in Worten also:

---

[1]) Czuber, pag. 9.

„Man bilde die Summe der drei Leben, subtrahiere von dieser Summe die Summe aller Lebensverbindungen zu zweien, addiere zu dem Rest den Wert der drei verbundenen Leben, so ist das Resultat der Wert des längsten der drei Leben.“

Sind alle Personen gleichaltrig, so wird der Barwert der Rente

$$3\,M' - 3\,M'' + M'''.$$

* * *

Mit diesem Problem schliesst das erste Kapitel, welches die Regeln enthält. Die folgenden Kapitel des ersten Teiles sind überschrieben „Von den Anwartschaften“, „Von aufeinanderfolgenden Leben“, „Von den Überlebenswahrscheinlichkeiten“ und „Von den Lebenserwartungen“.

Wenn auch die heutige Versicherungsmathematik neue Wege geschaffen hat, so darf nicht vergessen werden, dass die Moivresche Hypothese, von der ihr Schöpfer wohl bewusst war, dass sie nicht in aller Strenge zu Recht bestehe, doch brauchbare Näherungswerte liefert, sobald die Termine nicht zu weit gehalten werden. Ich schliesse mit den Worten Bailys[1]:

„Price und Morgan haben in der letzten Zeit über diese Hypothese viel geredet und besonders der zweite hat sich bei seinen Bemerkungen über ihre Anwendbarkeit sehr streng gezeigt. Es ist wahr, dass man sich nach neuern Beobachtungen nicht immer auf sie verlassen kann, und die bedeutenden, von diesen beiden Männern zur Bestimmung der Werte der Leibrenten

[1]) Baily, die Theorie der Lebensrenten.

nach genauern Beobachtungen ausgeführten Arbeiten, um dadurch die Anwendung von Hypothesen überflüssig zu machen, können die stolzen und geringschätzenden Bemerkungen derselben über die Moivresche Hypothese einigermassen entschuldigen.

„Aber nichtsdestoweniger wird diese Hypothese in der Theorie der Leibrenten noch häufig gebraucht und *sie wird immer ein Denkmal des Genies ihres berühmten Erfinders bleiben.*“