Eine lineare Integralgleichung auf dem Gebiete der Lebensversicherungsrechnung

Eine lineare Integralgleichung auf dem Gebiete der Lebensversicherungsrechnung.

Von Dr. **O. Schenker**, Bern.

Die vorliegende kleine Arbeit knüpft an eine solche im elften Heft der „Mitteilungen" an, kann also als deren Fortsetzung betrachtet werden. Es handelt sich um die Auflösung der linearen Integralgleichung:

$$\int_0^t F(a-x)\,dx + \int_t^a f(x)\,F(a-x)\cdot dx = 1 \qquad (1)$$

$F(a-x)$ ist gegebene Funktion von $a-x$, $f(x)$ ist gesuchte Funktion von x; a kann man jeden beliebigen Wert beilegen, t ist eine verfügbare Konstante. Wir werfen nun die Frage auf: welche Funktionen F gestatten eine exakte Auflösung der Gleichung (1)? Wir haben bereits im elften Heft der „Mitteilungen" gesehen, dass man eine exakte Auflösung erreicht, wenn $F(a-x)$ eine algebraische Funktion ist. Es gibt aber noch andere solcher Funktionen, z. B. die Funktion:

$$F(x) = a\cdot E^x + b\cdot E^{2x},$$

wo a, b und E verfügbare Konstanten sind. Wir wollen diese Funktion gleichzeitig dazu benützen, um die Überlebenswahrscheinlichkeiten eines Ehepaars, sagen wir vom Alter 31/26, näherungsweise darzustellen. Wir setzen zu diesem Ende:

$$
\begin{aligned}
{}_{0}p_{31} \cdot {}_{0}p_{26} &= a\,E^{0} + b\,E^{0} = F(0)\\
{}_{30}p_{31} \cdot {}_{30}p_{26} &= a\,E^{30} + b\,E^{60} = F(30)\\
{}_{60}p_{31} \cdot {}_{60}p_{26} &= a\,E^{60} + b\,E^{120} = F(60),
\end{aligned}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
1 &= a + b\\
0{,}65\,953 &= a\,E^{30} + b \cdot E^{60}\\
0{,}19\,638 &= a\,E^{60} + b \cdot E^{120},
\end{aligned}
$$

wenn für F Zahlenwerte gesetzt werden.

Setzt man abkürzend $E^{30} = \mathrm{E}$, so resultieren die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= 1 = a + b\\
y_1 &= 0{,}65\,953 = a\,\mathrm{E} + b \cdot \mathrm{E}^2\\
y_2 &= 0{,}19\,638 = a\,\mathrm{E}^2 + b \cdot \mathrm{E}^4;
\end{aligned}
$$

Rechnet man aus den beiden ersten Gleichungen a und b aus und substituiert die erhaltenen Werte in der dritten, so bekommen wir die Gleichung:

$$
y_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{E} & \mathrm{E}^2 \end{vmatrix} = \mathrm{E}^2 \begin{vmatrix} y_0 & 1 \\ y_1 & \mathrm{E}^2 \end{vmatrix} + \mathrm{E}^4 \begin{vmatrix} 1 & y_0 \\ \mathrm{E} & y_1 \end{vmatrix},
$$

oder

$$
y_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{E} \end{vmatrix} = \mathrm{E} \begin{vmatrix} y_0 & 1 \\ y_1 & \mathrm{E}^2 \end{vmatrix} + \mathrm{E}^3 \begin{vmatrix} 1 & y_0 \\ \mathrm{E} & y_1 \end{vmatrix},
$$

oder

$$
y_2\,(\mathrm{E} - 1) = \mathrm{E}\,(y_0\,\mathrm{E}^2 - y_1) + \mathrm{E}^3\,(y_1 - y_0\,\mathrm{E}),
$$

oder

$$
y_0\,\mathrm{E}^4 - (y_0 + y_1)\,\mathrm{E}^3 + (y_1 + y_2)\,\mathrm{E} - y_2 = 0;
$$

Diese Gleichung ist für $\mathrm{E} = 1$ erfüllt; das Gleichungspolynom linker Hand ist daher ohne Rest durch $\mathrm{E} - 1$ teilbar. In der Tat ist:

$$
\begin{aligned}
y_0\,\mathrm{E}^4 - (y_0 + y_1)\,\mathrm{E}^3 + (y_1 + y_2)\,\mathrm{E} - y_2 : \mathrm{E} - 1 &=\\
= y_0\,\mathrm{E}^3 - y_1\,\mathrm{E}^2 - y_1\,\mathrm{E} + y_2;
\end{aligned}
$$

E wird darum aus der Gleichung bestimmt:

$$E^3 - 0{,}65\,953\ E^2 - 0{,}65\,953\ E + 0{,}19\,638 = 0$$

Wir wollen bloss denjenigen Wert von E festhalten, welcher zwischen 0 und 1 liegt. Die Anwendung des Sturmschen Satzes bestätigt das Vorhandensein einer solchen Wurzel, welche sich nach der Newtonschen (von Fourier verbesserten) Näherungsmethode berechnet zu $E = 0{,}257\,3529$; die entsprechenden Werte von a und b sind $a = 3{,}104\,282$; $b = -2{,}104\,282$, ferner hat $E = \mathrm{E}^{\frac{1}{30}}$ den Wert $0{,}955\,7647$; darum ist nun

$$F(x) = 3{,}104\,282 \cdot 0{,}955\,7647^x - 2{,}104\,282 \cdot 0{,}955\,7647^{2x};$$

Da $F(x)$ von der Form $a\,E^x + b\,E^{2x}$ ist, so lautet nunmehr die Gleichung (1):

$$\int_0^t \left[a\,E^{a-x} + b\,E^{2(a-x)}\right] dx + \int_t^a f(x) \left[a\,E^{a-x} + b\,E^{2(a-x)}\right] dx = 1 \qquad (1^a);$$

Durch Differenzieren nach a erhält man hieraus die Gleichungen:

$$\log E \int_0^t \left[a\,E^{a-x} + 2\,b\,E^{2(a-x)}\right] dx + f(a)\,(a+b) + \log \mathrm{E} \int_t^a f(x) \left[a\,E^{a-x} + 2\,b\,E^{2(a-x)}\right] dx = 0 \qquad (1^b)$$

$$(\log E)^2 \int_0^t \left[a\,E^{a-x} + 4\,b\,E^{2(a-x)}\right] dx + f'(a)\,(a+b) + \log E \cdot f(a)\,(a + 2\,b) + (\log E)^2 \int_t^a f(x) \left[a\,E^{a-x} + 4\,b\,E^{2(a-x)}\right] \cdot dx = 0; \qquad (1^c)$$

Aus diesen drei Gleichungen, nämlich:

$$\int_0^t [a E^{a-x} + b E^{2(a-x)}] \, dx + \int_t^a f(x) \, [a \cdot E^{a-x} + b \cdot$$

$$\cdot E^{2(a-x)}] \cdot dx = 1$$

$$\int_0^t [a E^{a-x} + 2 b E^{2(a-x)}] \, dx +$$

$$+ \int_t^a f(x) \, [a E^{a-x} + 2 b E^{2(a-x)}] \, dx + \frac{f(a)\,(a+b)}{\log E} = 0$$

$$\int_0^t [a E^{a-x} + 4 b E^{2(a-x)}] \, dx + \int_t^a f(x) \, [a E^{a-x} +$$

$$+ 4 b \cdot E^{2(a-x)}] \, dx + \frac{f'(a)\,(a+b)}{(\log E)^2} + \frac{f(a)\,(a+2b)}{\log E} = 0$$

können wir eine gewöhnliche Differentialgleichung zur Bestimmung von $f(a)$ herleiten, indem wir die erste Gleichung mit 1 und die beiden andern mit den verfügbaren Konstanten k_1 bzw. k_2 multiplizieren und die so erhaltenen Gleichungen addieren; man erhält so die Gleichung:

$$\int_0^t [a\,(1 + k_1 + k_2)\,E^{a-x} + b\,(1 + 2k_1 + 4k_2)\,E^{2(a-x)}] \, dx +$$

$$+ k_1 \cdot \frac{f(a) \cdot (a+b)}{\log E} + k_2 \cdot \frac{f(a)\,(a+2b)}{\log E} + k_2 \cdot$$

$$\cdot \frac{f'(a)(a+b)}{(\log E)^2} = 1;$$

Setzt man $1+k_1+k_2=0$ und $1+2k_1+4k_2=0$, also $k_1=-\frac{3}{2}$ und $k_2=\frac{1}{2}$, so verbleibt die Differentialgleichung:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{(\log E)^2}\cdot f'(a)+\frac{1}{2\cdot\log E}(a+2b-3a-3b)\cdot$$
$$\cdot f(a)=1,$$

oder

$$\frac{1}{2}\frac{a+b}{(\log E)^2}\cdot f'(a)-\frac{1}{2\log E}(2a+b)\cdot f(a)=1 \quad (2)$$

Durch Differentiation nach a erhält man hieraus die weitere Gleichung:

$$(a+b)\cdot f''(a)-\log E\,(2a+b)\cdot f'(a)=0; \quad (2^a)$$

$f(a)$ hat somit die Form: $f(a)=C_1+C_2\cdot e^{Aa}$, wo C_1, C_2 und A zu bestimmende Konstanten sind. A bekommt man durch Substitution von $f(a)=C_1+C_2\cdot\cdot e^{Aa}$ in die Gleichung (2^a); man erhält:

$$(a+b)\cdot A^2\cdot e^{Aa}-\log E\,(2a+b)\cdot A\cdot e^{Aa}=0,$$

oder

$$A\,[(a+b)\cdot A-\log E\,(2a+b)]\cdot e^{Aa}=0;$$

Diese Gleichung ist bloss erfüllt, wenn

$$A=A_1=0 \text{ oder } A=A_2=\frac{2a+b}{a+b}\cdot\log E;$$

die partikulären Integrale der Gleichung (2^a) sind also von der Form $f(a)=C_1$ und

$$f(a)=C_2\cdot e^{\frac{2a+b}{a+b}\cdot\log E\cdot a};$$

das vollständige Integral von (2^a) lautet demnach:

$$f(a)=C_1+C_2\cdot e^{\frac{2a+b}{a+b}\cdot\log E\cdot a}; \quad (3)$$

C_1 wird ermittelt, indem man diesen Wert von $f(a)$ in der Gleichung (2) substituiert:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{(\log E)^2} \cdot C_2 \cdot \frac{2a+b}{a+b} \cdot \log E \cdot e^{\frac{2a+b}{a+b} \cdot \log E \cdot a} -$$

$$- \frac{1}{2 \log E}(2a+b)\left(C_1 + C_2 \cdot e^{\frac{2a+b}{a+b} \cdot \log E \cdot a}\right) = 1$$

also:
$$C_1 = -\frac{2 \log E}{2a+b}; \tag{4}$$

Substituiert man die Werte von $f(a)$ und C_1 gemäss den Gleichungen (3), bzw. (4) in der Gleichung (1^a), so erhält man:

$$\int_0^t \left[a E^{a-x} + b E^{2(a-x)}\right] dx + \int_t^a \left[\frac{-2 \log E}{2a+b} + \right.$$

$$\left. + C_2 E^{\frac{2a+b}{a+b} \cdot x}\right] \left[a E^{a-x} + b E^{2(a-x)}\right] dx = 1,$$

oder

$$\int_0^t \left[a E^{a-x} + b E^{2(a-x)}\right] dx - \frac{2a \cdot \log E}{2a+b} \int_t^a E^{a-x} \cdot dx -$$

$$- \frac{2b \cdot \log E}{2a+b} \int_t^a E^{2(a-x)} dx + a \cdot C_2 \int_t^a E^{a + \frac{a}{a+b} \cdot x} \cdot dx +$$

$$+ b \cdot C_2 \int_t^a E^{2a - \frac{b}{a+b} \cdot x} \cdot dx = 1,$$

oder

$$-\frac{a}{\log E}\Big|_0^t E^{a-x}-\frac{b}{2\log E}\Big|_0^t E^{2(a-x)}+$$

$$+\frac{2a}{2a+b}\Big|_t^a E^{a-x}+\frac{b}{2a+b}\Big|_t^a E^{2(a-x)}+$$

$$\frac{(a+b)\cdot C_2}{\log E}\Big|_t^a E^{a+\frac{a}{a+b}\cdot x}-\frac{(a+b)\cdot C_2}{\log E}\Big|_t^a E^{2a-\frac{b}{a+b}\cdot x}=1,$$

oder

$$-\frac{a}{\log E}(E^{a-t}-E^a)-\frac{b}{2\log E}[E^{2(a-t)}-E^{2a}]+$$

$$+\frac{2a}{2a+b}(1-E^{a-t})+\frac{b}{2a+b}[1-E^{2(a-t)}]+$$

$$+\frac{(a+b)\,C_2}{\log E}\left[E^{\frac{2a+b}{a+b}\cdot a}-E^{a+\frac{a}{a+b}\cdot t}\right]-$$

$$-\frac{(a+b)\cdot C_2}{\log E}\left[E^{\frac{2a+b}{a+b}\cdot a}-E^{2a-\frac{b}{a+b}\cdot t}\right]=1,$$

oder

$$E^a\left[\frac{-a}{\log E\cdot E^t}+\frac{a}{\log E}-\frac{2a}{(2a+b)\,E^t}-\frac{(a+b)\cdot C_2}{\log E}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\, E^{\frac{a}{a+b}\cdot t}\right]+E^{2a}\left[\frac{-b}{2\log E\cdot E^{2t}}+\frac{b}{2\log E}-\right.$$

$$\left.-\frac{b}{(2a+b)\,E^{2t}}+\frac{(a+b)\cdot C_2}{\log E}\cdot\frac{E^{\frac{a}{a+b}\cdot t}}{E^t}\right]=0;$$

Da diese Gleichung für jeden Wert von a bestehen muss, so müssen die Koeffizienten von E^{a} und E^{2a} einzeln Null sein, also:

$$-\frac{-a}{\log E \cdot E^{t}}+\frac{a}{\log E}-\frac{2a}{(2a+b)E^{t}}-\frac{(a+b)C_2}{\log E}\cdot$$

$$\cdot\; E^{\frac{a}{a+b}\cdot t}=0 \qquad (5)$$

$$-\frac{b}{2\log E\cdot E^{2t}}+\frac{b}{2\log E}-\frac{b}{(2a+b)E^{2t}}+\frac{(a+b)C_2}{\log E}\cdot$$

$$\cdot\;\frac{E^{\frac{a}{a+b}\cdot t}}{E^{t}}=0 \qquad (6);$$

Multipliziert man Gleichung (6) mit E^{t} und addiert das Produkt zur Gleichung (5), so bekommt man:

$$-\frac{2a+b}{2\log E\cdot E^{t}}+\frac{2a+b\cdot E^{t}}{2\log E}-\frac{1}{E^{t}}=0,$$

oder

$$bE^{2t}+2a\cdot E^{t}-(2a+b+2\log E)=0,$$

somit

$$E^{t}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+b(2a+b+2\log E)}}{b}=$$

$$=\frac{-a\pm\sqrt{(a+b)^2+2b\log E}}{b}; \qquad (7)$$

Diese Gleichung dient zur Bestimmung von t.

Zur Bestimmung von C_2 multiplizieren wir die Gleichung (5) mit b, (6) mit $-2a \cdot E^t$ und addieren die Produkte, so resultiert die Gleichung:

$$\frac{a \cdot b - a \cdot b \cdot E^t}{\log E} - C_2 \frac{\cdot E^{\frac{a}{a+b} \cdot t}}{\log E} (b + 2a)(a + b) = 0,$$

woraus

$$C_2 = a\, b\,(1 - E^t) : (a + b)(2a + b)\, E^{\frac{a}{a+b} \cdot t} \qquad (8)$$

Zur Kontrolle kann man C_2 aus (5) berechnen; man bekommt:

$$C_2 = \frac{-a(2a + b) + a(2a + b) \cdot E^t - 2a \cdot \log E}{E^t (2a + b)(a + b)\, E^{\frac{a}{a+b} \cdot t}};$$

Diese beiden Werte von C_2 müssen einander gleich sein; in der Tat ergibt die Gleichsetzung:

$$a \cdot b\,(1 - E^t) \cdot E^t = -a(2a + b) + a(2a + b) E^t - \\ - 2a \cdot \log E, \text{ oder}$$

$$b \cdot E^{2t} + 2a \cdot E^t - (2a + b + 2 \log E) = 0 \text{ und}$$

$$E^t = \frac{-a \pm \sqrt{(a + b)^2 + 2b \log E}}{b},$$

wie es auch nach Gleichung (7) sein soll.

Zur Überprüfung der Rechnung lohnt es sich, C_2 mittelst Gleichung (1^b) zu berechnen, indem man hier $f(a)$ und C_1 gemäss den Gleichungen (3) und (4) substituiert; in der Tat erhält man:

$$0 = \int_0^t [a\,E^{a-x} + 2\,b\,E^{2(a-x)}]\,dx +$$

$$+ \int_t^a \left[\frac{-2\log E}{2\,a + b} + C_2 \cdot E^{\frac{2a+b}{a+b}\cdot x}\right][a \cdot E^{a-x} + 2b\,E^{2(a-x)}] \cdot$$

$$\cdot\, dx + \frac{a+b}{\log E}\left(\frac{-2\log E}{2\,a+b} + C_2 \cdot E^{\frac{2a+b}{a+b}\cdot a}\right),$$

oder

$$0 = -\frac{a}{\log E}(E^{a-t} - E^a) - \frac{b}{\log E}[E^{2(a-t)} - E^{2a}] +$$

$$+ \frac{2\,a}{2\,a+b}(1 - E^{a-t}) + \frac{2\,b}{2\,a+b}[1 - E^{2(a-t)}] +$$

$$+ C_2 \int_t^a a \cdot E^{a+\frac{a}{a+b}\cdot x} + C_2 \int_t^a 2\,b \cdot E^{2a-\frac{b}{a+b}\cdot x} \cdot dx +$$

$$+ \frac{a+b}{\log E}\left(\frac{-2\log E}{2\,a+b} + C_2 \cdot E^{\frac{2a+b}{a+b}\cdot a}\right),$$

oder

$$0 = -\frac{a}{\log E}(E^{a-t} - E^a) - \frac{b}{\log E}[E^{2(a-t)} - E^{2a}] +$$

$$+ \frac{2\,a}{2\,a+b}(1 - E^{a-t}) + \frac{2\,b}{2\,a+b}[1 - E^{2(a-t)}] +$$

$$+ C_2 \frac{(a+b)}{\log E}\left[E^{\frac{a(2a+b)}{a+b}} - E^{a+\frac{a}{a+b}\cdot t}\right] -$$

$$- \frac{2\,C_2\,(a+b)}{\log E}\left[E^{\frac{a(2a+b)}{a+b}} - E^{2a-\frac{b}{a+b}\cdot t}\right] +$$

$$+ \frac{a+b}{\log E}\left(\frac{-2\log E}{2\,a+b} + C_2 \cdot E^{\frac{2a+b}{a+b}\cdot a}\right)$$

oder nach Reduktion:

$$\frac{-a}{\log E}(E^{a-t} - E^{a}) - \frac{b}{\log E}[E^{2(a-t)} - E^{2a}] - \frac{2a}{2a+b} \cdot$$

$$\cdot E^{a-t} - \frac{2b}{2a+b} E^{2(a-t)} - C_2 \cdot \frac{a+b}{\log E} E^{a+\frac{a}{a+b}\cdot t} +$$

$$+ 2\, C_2 \frac{a+b}{\log E} E^{2a-\frac{b}{a+b}\cdot t} = 0,$$

oder

$$E^{a}\left[\frac{-a}{\log E \cdot E^{t}} + \frac{a}{\log E} - \frac{2a}{(2a+b)\,E^{t}} - \frac{(a+b)\,C_2}{\log E} \cdot E^{\frac{a}{a+b}\cdot t}\right] +$$

$$+ E^{2a}\left[\frac{-b}{\log E \cdot E^{2t}} + \frac{b}{\log E} - \frac{2b}{(2a+b)\,E^{2t}} + \frac{2(a+b)\,C_2}{\log E} \cdot \frac{E^{\frac{a}{a+b}\cdot t}}{E^{t}}\right] = 0;$$

Indem man die Koeffizienten von E^{a} und E^{2a} Null setzt, erhält man wiederum die Gleichungen (5) und (6). Aber auch Gleichung (1^{e}) muss die Gleichungen (5) und (6) ergeben; in der Tat, führt man in ihr die Werte von $f(a)$ und C_1 entsprechend den Gleichungen (3) und (4) ein, so werden wir auf die Gleichung geführt:

$$0 = \frac{-a}{\log E}(E^{a-t} - E^{a}) - \frac{2b}{\log E}[E^{2(a-x)} - E^{2a}] +$$

$$+ \frac{2a}{2a+b}(1 - E^{a-t}) + \frac{4b}{2a+b}[1 - E^{2(a-t)}] +$$

$$+ \frac{C_2\,(a+b)}{\log E}\left[\cdot E^{a\frac{2a+b}{a+b}} - E^{a+\frac{at}{a+b}}\right] -$$

$$- \frac{4\,C_2\,(a+b)}{\log E}\left[E^{a\frac{2a+b}{a+b}} - E^{2a-\frac{bt}{a+b}}\right] + \frac{C_2\,(2a+b)}{\log E} \cdot$$

$$\cdot E^{a\frac{2a+b}{a+b}} + \left[-\frac{2}{2a+b} + \frac{C_2 E^{a\frac{2a+b}{a+b}}}{\log E}\right](a+2b) = 0,$$

oder

$$0 = -\frac{a}{\log E}(E^{a-t} - E^{a}) - \frac{2b}{\log E}[E^{2(a-t)} - E^{2a}] -$$

$$-\frac{2a}{2a+b} \cdot E^{a-t} - \frac{4b}{2a+b} \cdot E^{2(a-t)} - \frac{C_2(a+b)}{\log E} \cdot$$

$$\cdot E^{a+\frac{a \cdot t}{a+b}} + \frac{4 \cdot C_2(a+b)}{\log E} \cdot E^{2a-\frac{b \cdot t}{a+b}},$$

oder

$$0 = E^{a}\left[-\frac{a}{\log E \cdot E^{t}} + \frac{a}{\log E} - \frac{2a}{(2a+b)E^{t}} - \right.$$

$$\left. - \frac{(a+b) \cdot C_2}{\log E} \cdot E^{\frac{a}{a+b} \cdot t}\right] + 2E^{2a}\left[-\frac{b}{\log E \cdot E^{2t}} + \right.$$

$$\left. + \frac{b}{\log E} - \frac{2b}{(2a+b)E^{2t}} + \frac{2(a+b) \cdot C_2}{\log E} \cdot \frac{E^{\frac{a}{a+b} \cdot t}}{E^{t}}\right];$$

Diese Gleichung kann unabhängig von a bloss bestehen, wenn die Koeffizienten von E^{a} und E^{2a} einzeln Null sind, d. h. wenn die Gleichungen (5) und (6) bestehen.

Die gesuchte Funktion $f(x)$ hat also nun die Gestalt:

$$f(x) = -\frac{2\log E}{2a+b} + \frac{a \cdot b(1 - E^{t})}{(a+b)(2a+b)E^{\frac{a}{a+b} \cdot t}} \cdot E^{\frac{2a+b}{a+b} \cdot x},$$

wo t mittelst der Gleichung:

$$E^{t_{1,2}} = \frac{-a \pm \sqrt{(a+b)^2 + 2b\log E}}{b}$$

bestimmt wird.

Für unser zahlenmässiges Beispiel ist:

$a = 3{,}104\,282$; $\quad b = -2{,}104\,282$

$E = 0{,}955\,7647$; $\quad \log E = -0{,}019\,6490$

$C_1 = 0{,}009\,575$; $\quad E^{\frac{2a+b}{a+b}} = 0{,}830\,5294$

$E^{t_1} = 0{,}980\,742$; $\quad t_1 = 0{,}429\,803$

$E^{t_2} = 1{,}969\,701$; $\quad t_2 = -14{,}982\,951$;

Zu t_1 gehört: $C_2 = -0{,}032\,5578$;

Zu t_2 gehört: $C_2 = 0{,}188\,1765$;

Je nachdem man also t_1 oder t_2 wählt, bekommt man für $f(x)$ die beiden Werte:

für t_1: $f(x) = 0{,}009\,575 - 0{,}032\,5578 \cdot (0{,}830\,5294)^x$

für t_2: $f(x) = 0{,}009\,575 + 0{,}188\,1765 \cdot (0{,}830\,5294)^x$.

$f(x)$ nähert sich daher mit wachsendem x asymptotisch dem Werte 0,009 575.