Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 13 (1918)

Artikel: Beiträge zur mathematischen Theorie der biometrischen Funktionen

Autor: Poznanski, Tadeusz

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-550866

Beiträge zur mathematischen Theorie der biometrischen Funktionen.

Von Dr. **Tadeusz Poznański**, Bern.

§ 1.

Unter einer biometrischen Funktion versteht man in der Versicherungslehre und in der formalen Bevölkerungstheorie gewöhnlich eine Grösse, die über den Sterblichkeitsverlauf Aufschluss zu erteilen geeignet ist [1]). Als unabhängige Variable (Argument) werden wir bei diesen Funktionen das Alter des Individuums betrachten.

Zu den biometrischen Funktionen gehört in erster Linie die sogenannte *Überlebensordnung;* sie gibt die Anzahl der Personen an, die in einer geschlossenen Gemeinschaft einen bestimmten Zeitpunkt erleben. Die Zahl der x-jährigen, die wir mit l_x oder $l(x)$ bezeichnen wollen [2]), ist ihrer Bedeutung nach eine nicht zunehmende, diskontinuierliche Funktion des Alters x; sie soll gleich Null sein für $x \geqq \omega$, wo ω die Maximaldauer des Menschenlebens bedeutet. Um die mathematische Analysis auf diese Funktion anwenden zu können, insbesondere die fruchtbaren Methoden der

1) Lœwy im Versicherungslexikon von Manes, p. 12.

2) In der vorliegenden Arbeit werden wir die in der Versicherungswissenschaft übliche internationale Bezeichnungsweise derartabändern, dass wir die Argumente nicht als Indices, sondern in Klammern setzen, wie es in den mathematischen Disziplinen üblich ist.

Differental- und Integralrechnung, wollen wir ihr die Eigenschaft der Differenzierbarkeit zuschreiben; sie wird dann stetig und integrierbar und auch monoton sein. Jede analytische Funktion muss aber identisch Null werden, wenn sie für ein endliches oder — wie in diesem Falle — unendlich grosses (von ω bis ∞) Intervall des Argumentes verschwindet. Um aber die Überlebensordnung durch eine stetige, analytische Funktion darstellen zu können, nehmen wir folgendes an: der Wert $l(x)$ für $x \overline{\geqq} \omega$ wird so klein, aber von Null verschieden, dass er praktisch zu vernachlässigen ist, und er verschwindet erst im Unendlichen (also für $x = \infty$), d. h. die Funktionskurve $l(x)$ ist zur positiven x-Achse, — der Altersachse asymtotisch.

Die übrigen hier betrachteten Funktionen lassen sich leicht durch die Überlebensordnung definieren; wir werden uns dabei hauptsächlich auf die mathematische Definition mit Hülfe von Gleichungen beschränken.

Die Zahl $d(x)$ der im Altersintervalle x bis $\overline{x+1}$ Gestorbenen ist

(1) $$d(x) = l(x) - l(x+1).$$

Die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit ist

(2a) $$p(x) = \frac{l(x+1)}{l(x)}$$

und die n-jährige

(2b) $$_n p(x) = \frac{l(x+n)}{l(x)}$$

Die einjährige resp. die n-jährige Sterbenswahrscheinlichkeit ist

(3a) $$q(x) = \frac{d(x)}{l(x)} = 1 - p(x)$$

resp.

$$(3b) \qquad {}_n q(x) = \frac{l(x) - l(x+n)}{l(x)} = 1 - {}_n p(x).$$

Nimmt man $l(x)$ als differentierbare Funktion des Argumentes x an, so wird durch die Gleichung

$$(4) \qquad \mu(x) = -\frac{1}{l(x)} \cdot \frac{dl(x)}{dx}$$

die von Gompertz[1]) im Jahre 1825 eingeführte *Sterblichkeitsintensität* definiert. Da nach der Annahme $l(x)$ eine monoton abnehmende Funktion des Argumentes ist, so ist der Differentialquotient $\frac{dl(x)}{dx}$ stets negativ, somit $\mu(x)$ stets positiv; für $x > \omega$ wird, wie erwähnt, $l(x)$ der Null zustreben und daher $\mu(x)$ ins Unendliche wachsen.

$\frac{dl}{dx}$ aber auch!

aus unstetigem Fall bekannt, also Bedg. für $l(x)$!

Der Ausdruck

$$(5) \qquad \mu(x)\,dx = -\frac{dl(x)}{l(x)}$$

drückt die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit aus, dass ein x-jähriger im nächsten Momente stirbt, d. h. im unendlich kleinen Altersintervalle von x bis $x + dx$.

In seiner „Théorie analytique des probabilités" führt Laplace eine Funktion $\varphi(x)$ ein, die so gedacht ist, dass das Produkt $\varphi(x)dx$ die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, dass der *Neugeborene* im unendlich kleinen Altersintervalle von x bis $x + dx$ stirbt. Zwischen $\varphi(x)$ und $\mu(x)$ besteht, wie unsere Gleichung (10b) zeigt, die Beziehung

$$\varphi(x) = \mu(x)\, e^{-\int_0^x \mu(\tau)d\tau}$$

[1]) Philosophical Transactions of the Royal Society of London 1825.

$\mu(x)$ stimmt also nur für $x = 0$ mit $\varphi(x)$ überein. Die Funktion $\varphi(x)$ wurde von Czuber in seinem Berichte „Über die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen“ (Leipzig 1899) unrichtig als Sterblichkeitsintensität bezeichnet[1]).

Der reziproke Wert $\frac{1}{\mu(x)}$ wird die *Lebenskraft* genannt und ist in jedem Punkte dargestellt durch die Subtangente der Kurve, welche der Funktion $l(x)$ entspricht.

Um die einjährige Lebens- und Sterblichkeitswahrscheinlichkeit durch die Sterblichkeitsintensität auszudrücken, multipliziert man die Definitionsgleichung

$$\mu(y) = -\frac{1}{l(y)} \cdot \frac{dl(y)}{dy} = -\frac{d \operatorname{Log} l(y)}{dy},$$

wo Log durchweg den natürlichen Logarithmus bedeutet, mit $-dy$ und integriert dann die so erhaltene Relation

$$d \operatorname{Log} l(y) = -\mu(y)\, dy \tag{6}$$

von $y = x$ bis $y = \overline{x+1}$. Man erhält dann:

$$\Big| \operatorname{Log} l(y) \Big|_{y=x}^{y=x+1} = \operatorname{Log} l(x+1) - \operatorname{Log} l(x) =$$

$$= \operatorname{Log} \frac{l(x+1)}{l(x)} = -\int_x^{x+1} \mu(y)\, dy.$$

Hieraus ergibt sich durch Potenzierung die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit des x-jährigen, ausgedrückt durch die Sterblichkeitsintensität:

$$\frac{l(x+1)}{l(x)} = p(x) = e^{-\int_x^{x+1} \mu(y) dy}. \tag{7a}$$

---

[1]) Siehe weiter unten die Bemerkung zur Seite 102.

Vermittels der Substitution $y = x + \tau$, wo τ die neue Integrationsvariable bedeutet, geht (7a) über in

(7b) $$p(x) = e^{-\int\limits_0^1 \mu(x+\tau)d\tau}.$$

Integriert man die frühere Relation (6) von x bis $\overline{x+n}$, wo n eine beliebige positive Zahl bedeutet, so erhält man durch nachherige Potenzierung einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, dass ein x-jähriger nach n Jahren noch am Leben ist. Es wird

(8a) $$\frac{l(x+n)}{l(x)} = {}_n p(x) = e^{-\int\limits_x^{x+n} \mu(y)dy}.$$

Durch die angewendete Substitution $y = x + \tau$, geht der Ausdruck (8a) über in

(8b) $${}_n p(x) = e^{-\int\limits_0^n \mu(x+\tau)d\tau}.$$

Für ganzzahlige n kann man diesen Ausdruck für ${}_n p(x)$ auch aus demjenigen für $p(x)$ erhalten unter Anwendung des Satzes über zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Nach diesem Satze ist:

$${}_n p(x) = p(x) \cdot p(x+1) \cdot p(x+2) \cdot p(x+3) \cdots \cdots p(x+n-1).$$

Setzt man für $p(x+t)$ die entsprechenden Werte nach (7a) ein, so erhält man durch Umformung:

$${}_n p(x) = e^{-\int\limits_x^{x+1} \mu(y)dy} \cdot e^{-\int\limits_{x+1}^{x+2} \mu(y)dy} \cdots e^{-\int\limits_{x+n-2}^{x+n-1} \mu(y)dy} \cdot e^{-\int\limits_{x+n-1}^{x+n} \mu(y)dy} =$$

$$= e^{-\left\{\int\limits_x^{x+1} \mu(y)dy + \int\limits_{x+1}^{x+2} \mu(y)dy + \cdots + \int\limits_{x+n-1}^{x+n} \mu(y)\,dy\right\}} = e^{-\int\limits_x^{x+n} \mu(y)\,dy} =$$

$$= e^{-\int\limits_0^n \mu(x+\tau)d\tau},$$

wie früher (8a) und (8b).

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein x-jähriger das Alter c erreicht, also mindestens noch $c-x$ Jahre lebt, ist:

$$(9) \qquad {}_{c-x}p(x) = e^{-\int_0^{c-x} \mu(x+\tau)d\tau}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein x-jähriger im unendlich kleinen Zeitintervalle $x+t$ bis $x+t+dt$ stirbt, ist eine zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit; nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung also gleich dem Produkte

$${}_tp(x) \cdot \mu(x+t)\,dt.$$

Ersetzt man hier ${}_tp(x)$ nach (8b) durch $e^{-\int_0^t \mu(x+\tau)dt}$ so geht der obige Ausdruck über in

$$(10a) \qquad \mu(x+t)\, e^{-\int_0^t \mu(x+\tau)d\tau}\, dt.$$

Wird in (10a) $x=0$ gesetzt, so gibt dieser Ausdruck die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Neugeborener nach t Jahren im Altersintervalle von t bis $t+dt$ stirbt; es wird

$$(10b) \qquad \varphi(t)\,dt = \mu(t)\, e^{-\int_0^t \mu(\tau)d\tau}\, dt.$$

wo $\varphi(t)$ die erwähnte Laplacesche Funktion ist.

Integriert man die Grösse (10a) von $t=0$ bis $t=n$, so erhält man die Wahrscheinlichkeit, dass ein x-jähriger innerhalb n Jahren stirbt. Der Ausdruck dafür ist:

$$(10c) \qquad {}_nq(x) = \int_0^n \mu(x+t)\, e^{-\int_0^t \mu(x+\tau)d\tau}\, dt.$$

Der Integrand dieser Formel $\mu(x+t)\, e^{-\int_0^t \mu(x+\tau)d\tau}$ ist nichts anderes als der absolute Wert des Differentialquotienten nach t genommen vom Ausdrucke

$$ {}_t p(x) = e^{-\int_0^t \mu(x+\tau)d\tau} $$

Es ist nämlich:

$$ \frac{d}{dt} e^{-\int_0^t \mu(x+\tau)d\tau} = -\mu(x+t)\, e^{-\int_0^t \mu(x+\tau)d\tau}. $$

Somit wird:

$$ {}_n q(x) = \int_0^n \mu(x+t)\, e^{-\int_0^t \mu(x+\tau)d\tau} dt = -\int_0^n d\left(e^{-\int_0^t \mu(x+\tau)d\tau}\right) = $$

$$ = -\left| e^{-\int_0^t \mu(x+\tau)d\tau} \right|_{t=0}^{t=n} = 1 - e^{-\int_0^n \mu(x+\tau)d\tau}, $$

was die bekannte Relation

(11) $$ {}_n q(x) = 1 - {}_n p(x) $$

ergibt.

§ 2.

In unsern weitern Betrachtungen werden wir als fundamentale biometrische Funktion die Sterblichkeitsintensität annehmen, und die andern als von ihr abhängig, ansehen.

Die Kurve der Sterblichkeitsintensität (als Funktion des Alters betrachtet) verläuft *im allgemeinen* wie folgt: Sie nimmt bis zu einem gewissen Alter, das wir ε nennen wollen, ab, um dann beständig zuzunehmen; so dass $\mu(\varepsilon)$ das einzige Extremum (Minimum) ist[1]).

[1]) Es gibt aber auch Mortalitätstafeln, deren Sterblichkeitsintensität mehrere Extrema aufweisen, immer aber eine ungerade Anzahl. So haben z. B. die ausgeglichenen Tafeln A. F., R. F., M. & W. und andere je drei Extrema: zwei Minima und ein Maximum. Selbstverständlich können unausgeglichene Mortalitätstafeln mehrere Extrema aufweisen.

Zur Darstellung des Sterblichkeitsverlaufes während der ganzen Lebensdauer durch eine einzige analytische Funktion des Alters kann man sich der Lazarusschen Formel bedienen [1]). Nach dieser wurde von Laudi und Lazarus die Mortalitätstafel L. L. der k. k. priv. Assicurazioni Generali in Triest ausgeglichen auf Grund der Beobachtungen der 17 englischen Gesellschaften.

Die Lazarussche Formel lautet für die Absterbeordnung wie folgt:

$$(12a) \qquad l(x) = k \cdot s^x g^{c^x} f^{h^x},$$

wo alle 6 Konstanten k, s, g, c, f und h positiv sein müssen. Diese Funktion kann man in der Form

$$(12b) \qquad l(x) = e^{K + Sx + Gc^x + Fh^x}$$

schreiben, wo $K = \operatorname{Log} k$, $S = \operatorname{Log} s$, $G = \operatorname{Log} g$ und $F = \operatorname{Log} f$ bedeutet. Die Sterblichkeitsintensität lautet sodann

$$(13) \quad \mu(x) = -\frac{1}{l(x)} \cdot \frac{dl(x)}{dx} = -S - G\,C\,c^x - F\,H\,h^x,$$

wo $C = \operatorname{Log} c$ und $H = \operatorname{Log} h$ ist.

Setzt man in der Lazarusschen Formel

$$f = 1 \text{ also } F = 0$$

so erhält man die Makehamsche Funktion:

$$l(x) = k\,s^x g^{c^x} \text{ und } \mu(x) = -S - G\,C\,c^x$$

Das Glied $-FHh^x$ im Ausdrucke (13) soll das Absterben im Kindesalter charakterisieren.

Die Lazarussche Formel ist, wie die Makehamsche (deren Verallgemeinerung sie darstellt), ein Spezialfall

[1]) Vgl. Wilhelm Lazarus: „Über Mortalitätsverhältnisse und ihre Ursachen." Hamburg 1867, auch abgedruckt im I. I. A.

der allgemeinen Quiquetschen Funktion[1]); sie stellt ein „Überlebensgesetz“ zweiter Ordnung dar, während die Makehamsche ein „Gesetz“ erster Ordnung darstellt. Ein Spezialfall der Lazarusschen Formel ist für $s = 1$ die Funktion

$$l(x) = k\, g^{c^x} f^{h^x}$$

die schon Gauss (Werke Bd. 8, Seite 155) zur Ausgleichung „der Erfahrungen über die Tontinen“ gebraucht hat. Sie ist aber nicht ein Spezialfall der Makehamschen[2]).

Der Wert der Sterblichkeitsintensität ist bei der Annahme der Lazarusschen Formel abhängig von den Parametern c, g, s, f und h.

Mit zunehmenden Parametern g, s und h nimmt der Wert der Funktion $\mu(x)$ ab; er nimmt dagegen zu mit wachsendem c und f, was leicht durch Differentiation nachzuweisen ist[3]).

Man kann sich den Lazarusschen Ausdruck für die Sterblichkeitsintensität, als aus drei Summanden bestehend, denken: Einer positiven Konstanten $A = -S$ und zwei positiven Exponentialfunktionen:

---

[1]) Vgl. Quiquet, Représentation algébrique de tables de survie. Bulletin de l'Institut des Actuaires Français, Tome IV.

[2]) Vgl. die Behauptung von Bohlmann in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. 1, S. 870, Anm. 47, und die Widerlegung bei Lœwy in der Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, 6. Bd. (1906), S. 517.

[3]) Der freundlichen brieflichen Mitteilung des Herrn N. R. Jörgensen-Kopenhagen verdanke ich die Bemerkung, dass es eine unbeweisbare Erfahrungstatsache sei, dass eine grosse Sterblichkeit in den mittlern und jungen Altersklassen auf einen hohen Wert von $A = -S$ deutet und die Konstante c nur Bedeutung für grosse Werte von x bekommt. In diesem Sinne ist auch der Passus auf Seite 71 des Jörgensenschen Werkes „Grundzüge einer Theorie der Lebensversicherung“ (Jena 1913) zu verstehen.

$$f_1(x) = -FHh^x = Mh^x \text{ und } f_2(x) = -GCc^x = Nc^x$$

Die positive Konstante $A = -S$ soll eine allen Altersjahren gemeinsame und gleich stark wirkende Ursache des Todes zum Ausdruck bringen. Die Funktion $f_1(x) = Mh^x$ soll, wie gesagt, die Sterblichkeit im Kindesalter zum Ausdruck bringen; ihr Wert wird also mit wachsendem x abnehmen, d. h. der Differentialquotient nach x genommen, wird negativ.

$$\frac{d f_1(x)}{dx} = -FH^2 h^x < 0$$

Es muss also $F > 0$ sein, und hieraus $f = e^F > 1$. Da $F > 0$ und die Funktion $f_1(x) = -FHh^x$ positiv ist, so muss H negativ sein, d. h. $h = e^H < 1$. Die zweite Funktion $f_2(x) = -GCc^x$ soll die Sterblichkeit des Erwachsenen darstellen; ihr Wert muss also mit steigendem Alter zunehmen, d. h. ihr Differentialquotient nach x genommen, wird positiv:

$$\frac{d f_2(x)}{dx} = -GC^2 c^x > 0$$

also $G < 0$ und daher $g = e^G < 1$. Da $f_2(x) = -GCc^x$ positiv ist, so muss C positiv und $c = e^C > 1$ sein. Somit haben die Konstanten der Lazarusschen Formel und ihre natürlichen Logarithmen folgende Grenzen:

$$\begin{array}{rl} 0 < s < 1 & S < 0 \\ 0 < g < 1 & G < 0 \\ c > 1 & C > 0 \\ f > 1 & F > 0 \\ 0 < h < 1 & H < 0 \end{array}$$

So hat z. B. die erwähnte Tafel der Assicurazioni Generali folgende Konstanten:

$$s = 0{,}9929949 \qquad S = -0{,}0070298$$
$$g = 0{,}9991717 \qquad G = -0{,}0008287$$
$$c = 1{,}0987718 \qquad C = +0{,}0941930$$
$$f = 1{,}2912919 \qquad F = +0{,}2555867$$
$$h = 0{,}4 \qquad H = -0{,}9162907$$

Die Sterblichkeitsintensität hat den Wert:

$$\mu(x) = 0{,}0070298 + 0{,}234192\,(0{,}4)^x + \\ + 0{,}0000780578\,(1{,}0987718)^x$$

Für die Konstanten h und f der Funktion $f_1(x) = -FHh^x$ wählt man solche Werte, dass der Ausdruck $f_1(x)$ für $x > \varepsilon$ verschwindend klein wird, im Vergleiche mit dem Ausdruck $f_2(x)$; sodann kann man die Funktion $f_1(x)$ für $x > \varepsilon$ vernachlässigen. So ist z. B. bei den obigen Konstanten:

$$f_1(10) = 0{,}000024568 \cdot\cdot \qquad f_2(10) = 0{,}00020021 \cdot\cdot$$
$$f_1(15) = 0{,}0000003466 \cdot\cdot \qquad f_2(15) = 0{,}00032065 \cdot\cdot$$
$$f_1(20) = 0{,}0000000035493 \cdot\cdot \qquad f_2(20) = 0{,}00051353 \cdot\cdot$$

usw.

Geometrisch kann man sich den Verlauf der Lazarusschen Formel für die Sterblichkeitsintensität wie folgt vorstellen. Es seien zwei Exponentialkurven gegeben:

$$f_1(x) = Mh^x \text{ und } f_2(x) = Nc^x,$$
$$\text{wo } M = -FH > 0 \text{ und } N = -GC > 0.$$

Da $h < 1$ ist, so fällt die Kurve $f_1(x)$ stets und ist der positiven x-Achse asymptotisch. $f_2(x) = Nc^x$ dagegen ist, weil $c > 1$ eine steigende Kurve und der negativen x-Achse asymptotisch.

Der Wert der Sterblichkeitsintensität wird erhalten, wenn man zu der Summe $f_1(x) + f_2(x)$ noch die positive Konstante $-S = A$ addiert. Die zwei Kurven f_1 und f_2 schneiden sich in einem Punkte, dessen Abszisse ξ die Gleichung

$$M h^{\xi} = N c^{\xi}$$

erfüllt. Hieraus ergibt sich

$$\left(\frac{c}{h}\right)^{\xi} = \frac{M}{N}$$

und

$$\xi = \frac{\log M - \log N}{\log c - \log h} \tag{14}$$

Da $h < 1$ und $c > 1$ ist, so wird die Differenz $\log c - \log h$ positiv; wird dabei $\log M > \log N$ sein, also $M > N$ d. h. $(-G)\ C < (-H)\ F$, so wird die Abszisse ξ des Schnittpunkes positiv. In der Tafel der Assicurazioni Generali ist $\xi = 7{,}92$ Jahre.

Um das Alter ε zu ermitteln, bei dem das Minimum der Sterblichkeitsintensität vorkommt, differenzieren wir $\mu(x)$ nach x und setzen den so erhaltenen Differentialquotienten gleich Null:

$$\left|\frac{d\,\mu(x)}{dx}\right|_{x=\varepsilon} = -G\,C^2\,c^{\varepsilon} - F\,H^2 h^{\varepsilon} = N\,C\,c^{\varepsilon} + M\,H\,h^{\varepsilon} = 0$$

und hieraus

$$\left(\frac{c}{h}\right)^{\varepsilon} = \frac{-M \cdot H}{N\,C} = \frac{M H'}{N\,C}$$

wo $H' = -H > 0$ ist.

ε wird also:

$$\varepsilon = \frac{\log M - \log N + \log H' - \log C}{\log c - \log h} = \tag{15}$$

$$= \frac{\log M - \log N}{\log c - \log h} + \frac{\log H' - \log C}{\log c - \log h}$$

Nach (14) ist der erste Bruch gleich der Abszisse des Schnittpunktes ξ der beiden Kurven f_1 und f_2. Man kann also setzen:

$$\varepsilon = \xi + \frac{\log H' - \log C}{\log c - \log h}$$

Ist die Differenz $\log H' - \log C$ positiv, also $H' > C$, so ist die Abszisse des Alters ε, bei welchem das Minimum der Sterblichkeitsintensität stattfindet, grösser als die Abszisse des Schnittpunktes der beiden Exponentialkurven f_1 und f_2.

Da in (15) ε eine positive Grösse sein muss und die Differenz $\log c - \log h > 0$ ist, so muss auch der Ausdruck

$$\log M - \log N + \log H' - \log C$$

positiv sein; setzt man hier für M und N die entsprechenden Werte, so muss

$$\log F + 2 \log H' - 2 \log C - \log G'$$

positiv sein, also

$$\frac{F H'^2}{C^2 G'} > 1 \text{ oder } \frac{F}{G'} > \frac{C^2}{H^2}$$

wo $G' = -G > 0$ ist.

Diese Bedingung muss bestehen, wenn die Lazarussche Formel während der ganzen Lebensdauer gültig sein soll.

In der genannten Tafel der Assicurazioni Generali ist

$$\varepsilon = 10{,}17 \text{ Jahre}$$

Da der Wert des zweiten Differentialquotienten

$$\frac{d^2 \mu(x)}{dx^2} = -G C^3 c^x - F H^3 h^x = N C^2 c^x + M H^2 h^x$$

für jedes x positiv ist, so ist die Kurve $\mu(x)$ zur x-Achse stets ~~konkav~~. konvex.

Ist die Absterbeordnung $l(x)$ nicht analytisch gegeben, so kann man die Sterblichkeitsintensität aus der Definitionsgleichung

$$\mu(x) = -\frac{1}{l(x)} \cdot \frac{dl(x)}{dx}$$

mittels numerischer Differentiation nur approximativ berechnen.

Aus den bekannten Interpolationsformeln von Newton, Bessel und Stirling leitet man[1]) folgende Formeln für die numerische Differentiation ab:

$$\text{(N)} \quad h \cdot \frac{df(a)}{da} = \left(\pm\frac{1}{2}, 1\right) \mp \frac{1}{2}(\pm 1,2) \pm \frac{1}{3}\left(\pm\frac{3}{2}, 3\right) \mp$$

$$\mp \frac{1}{4}(\pm 2,4) \pm \frac{1}{5}\left(\pm\frac{5}{2}, 5\right) \mp \cdots$$

$$\text{(B)} \quad h \cdot \frac{df(a)}{da} = \left(\frac{1}{2}, 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}, 2\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}, 3\right) +$$

$$+ \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}, 4\right) - \frac{1}{120}\left(\frac{1}{2}, 5\right) + \cdots$$

$$\text{(S)} \quad h \frac{df(a)}{da} = (0,1) - \frac{1}{6}(0,3) + \frac{1}{30}(0,5) - \cdots$$

Vernachlässigt man in den obigen Formeln die Differenzen fünfter und höherer Ordnung, und drückt

[1]) Vgl. z. B. H. Bruns, Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens (Leipzig 1903). Die dort gebrauchte Gauss-Enckesche Bezeichnung der Differenzen wurde von Prof. Dr. Mauderli-Bern in obiger einer Erklärung wohl nicht erforderlichen Weise vereinfacht.

die Differenzen rekkursiv durch solche niedrigerer Ordnung und endlich durch die Funktionswerte selbst aus, so erhält man für die Sterblichkeitsintensität folgende Näherungsformeln:

$$(\mathrm{B}) \quad \mu(x) = -\frac{1}{l(x)} \cdot \frac{dl(x)}{l(x)} = -\frac{1}{24\, l(x)} \Big\{ l(x+3) - $$
$$- 7\, l(x+2) + 26\, l(x+1) - 10\, l(x) - 11\, l(x-1) + l(x-2) \Big\}$$

$$(\mathrm{N}) \quad \mu(x) = \frac{1}{12\, l(x)} \cdot \Big\{ 3\, l(x+4) - 16\, l(x+3) + $$
$$+ 36\, l(x+2) - 48\, l(x+1) + 25\, l(x) \Big\}$$

$$(\mathrm{S}) \quad \mu(x) = \frac{1}{12\, l(x)} \Big\{ 8\, [l(x-1) - l(x+1)] - $$
$$- [l(x-2) - l(x+2)] \Big\}$$

Beachtet man die vernachlässigten Glieder, so bemerkt man, dass die Koeffizienten der Differenzen fünfter Ordnung bei der Besselschen Formel am kleinsten, und bei der Newtonschen am grössten sind. Somit ist die Berechnung nach der Formel (B) die genaueste, nach der (S) dagegen die bequemste[1]; die Newtonsche findet ihre Anwendung am Anfang, und entsprechend umgeformt, am Ende der Tafel. Praktisch geben aber alle 3 Formeln im allgemeinen dieselben Werte; für eine Parabel vierter oder niedrigerer Ordnung stimmen sie auch genau überein.

---

[1]) Vgl. die Ableitung der Formel (S) für eine C_4 bei Dr. Bohren. Ztschr. für Schweiz. Statistik (1903) und im Text-Book.

In der Tafel L. L. geben die Formeln B, N und S für $\mu(20)$ entsprechend folgende Werte:

(B) $\mu(20) = 0.007542$

(N) $\mu(20) = 0.007544$

(S) $\mu(20) = 0.007543$

Der Wert $\mu(20)$ berechnet nach der Formel

$$\mu(x) = 0.0070298 + (0.234192)(0.4)^x + \\ + 0.0000780578\,(1.0987718)^x$$

ergibt den Wert

$$\mu(20) = 0.007543$$

Die approximativ berechneten Werte stimmen also in der fünften Dezimalstelle mit dem exakten Werte überein; dies ist aber in diesem Falle eine vollständig genügende Annäherung.

§ 3.

Bei Annahme einer analytischen Funktion ist die Überlebensordnung $l(x)$ einer geschlossenen Gemeinschaft eine monoton abnehmende Funktion des Alters x. Die Grösse $-dl(x)$ stellt die Zahl der Gestorbenen im Zeitintervalle dx dar. Nimmt man $l(x)$ als differentierbare Funktion an, so wird

$$T(x) = -\frac{dl(x)}{dx}$$

eine bestimmte positive Grösse darstellen; sie gibt die Zahl der Sterbefälle im Zeitpunkte x an, bezogen auf die Zeiteinheit. Wir wollen diese Funktion als die *absolute Häufigkeit* der Todesfälle bezeichnen.

Diese biometrische Funktion steht in sehr nahem Zusammenhang mit der Laplaceschen Funktion $\varphi(x)$. Es ist nämlich

$$T(x) = l(0)\,\varphi(x)$$

wo $l(0)$ die Radix der Überlebensordnung ist, d. h. die Anzahl der Neugeborenen angibt.

Man kann deshalb auch die Laplacesche Funktion als relative Häufigkeit der Todesfälle bezeichnen.

Die Funktion $T(x)$ ist bei Annahme der Moivreschen Hypothese des gleichförmigen Absterbens konstant. In diesem Falle besteht für jedes x die Beziehung

$$\frac{d^2\,l(x)}{dx^2} = 0.$$

Bei Annahme einer andern Formel für die Überlebensordnung wird die Zahl der Sterbenden und somit auch die Häufigkeit der Todesfälle nicht konstant; sie wird vielmehr in gewissen Abschnitten der Lebensdauer zunehmen, in andern abnehmen. Zunehmen wird sie, wenn

$-\dfrac{d^2\,l(x)}{dx^2}$ positiv ist, also $\dfrac{d^2\,l(x)}{dx^2} < 0$; abnehmen wird sie, wenn $\dfrac{d^2\,l(x)}{dx^2} > 0$ ist.

Die Extrema der Häufigkeit der Todesfälle finden in denjenigen Altersjahren statt, welche die Gleichung

$$\frac{d^2\,l(x)}{dx^2} = 0$$

erfüllen. Ein Maximum besteht dort, wo

$$\frac{-d^3 l(x)}{dx^3} < 0 \text{ ist,}$$

und ein Minimum dort, wo

$$\frac{-d^3 l(x)}{dx^3} > 0 \text{ ist.}$$

Ist z dasjenige Alter, welches den Beziehungen

$$\frac{d^2 l(z)}{dz^2} = 0 \text{ und } \frac{-d^3 l(z)}{dz^3} < 0$$

genügt, so wird $\overline{z-x}$ die *wahrscheinlichste* Lebensdauer des x-jährigen genannt. Nach Ablauf von $\overline{z-x}$ Jahren ist die Zahl der Sterbefälle am grössten. z ist die wahrscheinlichste Lebensdauer des Neugeborenen und wird von Lexis die „normale Lebensdauer" genannt.

Wir wollen für die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{d^2 l(x)}{dx^2} = 0$$

einige Anhaltspunkte finden. Zu diesem Zwecke bilden wir aus der Definitionsgleichung der Intensitätsfunktion

$$\mu(x) = -\frac{1}{l(x)} \cdot \frac{dl(x)}{dx}$$

die Relation

$$T(x) = -\frac{dl(x)}{dx} = \mu(x)\, l(x)$$

und differenzieren diese Relation nach x [1]). Es wird

---

[1]) Wir setzen voraus, dass der Differentialquotient von $T(x)$ existiert.

$$\frac{d^2\, l(x)}{dx^2} = -\frac{d\,T(x)}{dx} = -\left\{\mu(x)\cdot\frac{dl(x)}{dx} + \frac{d\,\mu(x)}{dx}\cdot l(x)\right\} =$$

$$= l(x)\left\{-\mu(x)\cdot\frac{1}{l(x)}\cdot\frac{dl(x)}{dx} - \frac{d\,\mu(x)}{dx}\right\}.$$

Ersetzt man hier $-\frac{dl(x)}{dx}\cdot\frac{1}{l(x)}$ durch $\mu(x)$, so erhält man die Beziehung

$$\frac{d^2\, l(x)}{dx^2} = l(x)\left\{\mu^2(x) - \frac{d\,\mu(x)}{dx}\right\}.$$

Die Auflösung der Gleichung $\frac{d^2\, l(x)}{dx^2} = 0$ führt somit zur Bestimmung der Wurzeln der Gleichung

(17a) $$\mu^2(x) - \frac{d\,\mu(x)}{dx} = 0$$

oder

(17b) $$\mu^2(x) = \frac{d\,\mu(x)}{dx}.$$

Da die linke Seite der Gleichung (17b) für jedes x positiv ist, so muss für die Wurzeln der Gleichung auch die rechte Seite positiv sein; d. h. die Wurzeln der Gleichung

$$\mu^2(x) = \frac{d\,\mu(x)}{dx}$$

und somit auch der Gleichung

$$\frac{d^2\, l(x)}{dx^2} = 0$$

liegen in demjenigen Abschnitte der Lebensdauer, wo $\frac{d\,\mu(x)}{dx}$ positiv ist, also dort, wo die Sterblichkeitsintensität mit steigendem Alter zunimmt.

Geometrisch bedeuten die Wurzeln der Gleichung $\frac{d^2 l(x)}{dx^2} = 0$ die Wendepunkte in der Kurve der Überlebensordnung. Der erste, der die Absterbeordnung oder die Zahl der Lebenden geometrisch interpretierte, war, laut Czuber, d'Alembert[1]. Er bemerkte auch[2], dass diese Kurve weder ständig konvex, noch konkav zur x-Achse verläuft, d. h. dass sie Wendepunkte besitzt.

Im Kindesalter, wo $\frac{d\mu(x)}{dx}$ negativ ist, folgt aus der Gleichung

$$\frac{d^2 l(x)}{dx^2} = l(x)\left\{\mu^2(x) - \frac{d\mu(x)}{dx}\right\}$$

dass $\frac{d^2 l(x)}{dx^2}$ positiv ist; die Kurve der Lebenden wendet also in diesem Zeitabschnitte der x-Achse ihre konvexe Seite zu. Im Greisenalter verläuft die Kurve der Lebenden asymptotisch zur x-Achse, ist also wieder konvex. Die Zahl ihrer Wendepunkte muss also *gerade* sein. Darum besitzt auch die Kurve der Häufigkeit der Sterbefälle $T(x) = -\frac{dl(x)}{dx}$ eine gerade Anzahl von Extremalpunkten, wobei keiner in das Kindesalter (bis ε) zu liegen kommt.

Für die wahrscheinlichste Lebensdauer muss, wie erwähnt,

$$\frac{d^3 l(x)}{dx^3} > 0$$

---

[1]) Opusc. math. Tome II „Théorie mathématique de l'inoculation".

[2]) Opusc. math. Tome IV „Sur les calculs relatifs à l'inoculation".

sein, d. h. die Kurve muss hier von der Konkavität in die Konvexität übergehen. Dieser Wendepunkt der Kurve der Lebenden kann also der Reihenfolge nach nicht der erste sein. Vielmehr muss ihm ein Wendepunkt vorangehen, wo die Kurve von der Konvexität in die Konkavität übergeht. Wir können hieraus schliessen, dass die Kurve der Sterbenshäufigkeit bei Vorhandensein eines Maximums vorerst auch ein Minimum besitzen muss. Auch die Umkehrung dieses Satzes trifft zu, denn die Kurve der Sterbenden steigt nach einem Minimum, und da sie ins Unendliche nicht steigen kann — sie wird vielmehr zu Null —, so muss auf das Minimum ein Maximum folgen.

Um die Beziehung zwischen der Anzahl der Gestorbenen in einem endlichen Intervalle $\triangle x$ und der Sterbenshäufigkeit zu ermitteln, entwickeln wir die Funktion $l(x + \triangle x)$ in eine Taylorsche Reihe. Es wird:

$$l(x + \triangle x) = l(x) + \frac{\triangle x}{1!} \frac{dl(x)}{dx} + \frac{(\triangle x)^2}{2!} \frac{d^2 l(x)}{dx^2} + \\ + \frac{(\triangle x)^3}{3!} \frac{d^3 l(x)}{dx^3} + \cdots$$

oder

$$l(x + \triangle x) = l(x) + \frac{\triangle x}{1!} \frac{dl(x)}{dx} + \frac{(\triangle x)^2}{2!} \frac{d^2 l(x)}{dx^2} + \\ + \frac{(\triangle x)^3}{3!} \frac{d^3 l(x + \delta)}{dx^3} \quad (0 < \delta < 1)$$

$(\delta \cdot \Delta x)$

wo das Restglied in der Lagrangeschen Form dargestellt ist. Bei unsern weitern Untersuchungen werden wir in der letzten Relation das Restglied vernachlässigen; das ist erlaubt, da, wie man sich durch ein Differenzschema, oder bei analytisch gegebener Funktion

$l(x)$ direkt überzeugen kann, sind die dritten Differenzen und mithin die dritten Differentialquotienten im Vergleiche mit den ersten und zweiten von verschwindend kleiner Grösse.

Die obige Relation wird also approximativ lauten:

$$(18)\quad l(x+\triangle x) = l(x) + \frac{\triangle x}{1!} \cdot \frac{dl(x)}{dx} + \frac{(\triangle x)^2}{2!} \cdot \frac{d^2 l(x)}{dx^2}$$

während ihre exakte Form ist:

$\cdot\Delta x$

$$l(x+\triangle x) = l(x) + \frac{\triangle x}{1!} \cdot \frac{dl(x)}{dx} + \frac{(\triangle x)^2}{2!} \cdot \frac{d^2 l(x+\delta)}{dx^2}$$

$$(0 < \delta < 1)$$

Setzt man in (18) statt des Differentialquotienten $\frac{-dl(x)}{dx}$ die Sterbenshäufigkeit $T(x)$, so wird

$$\triangle x\, T(x) = l(x) - l(x+\triangle x) + \frac{(\triangle x)^2}{2} \cdot \frac{d^2 l(x)}{dx^2}$$

oder

$$T(x) = \frac{l(x) - l(x+\triangle x)}{\triangle x} + \frac{\triangle x}{2} \cdot \frac{d^2 l(x)}{dx^2}$$

Die Sterbenshäufigkeit stimmt also in ihren Extremalpunkten, d. h. in den Wendepunkten der Überlebensordnung, mit dem $\triangle x$*-ten* Teil der Sterbefälle überein, die im Intervalle $\triangle x$ stattfinden [1]).

Ist in einem Punkte x der zweite Differentialquotient $\frac{d^2 l(x)}{dx^2}$ negativ, d. h. die Kurve der Überlebens-

[1]) Genauer: in Punkten, die den Extremalpunkten bzw. Wendepunkten vorangehen; die Differenz ist aber praktisch zu vernachlässigen.

ordnung zur Altersachse konkav und die Sterbenshäufigkeit eine zunehmende Funktion des Argumentes, so ist die Sterbenshäufigkeit kleiner als die entsprechende Anzahl der Sterbefälle. Ist dagegen in einem Punkte x der zweite Differentialquotient $\frac{d^2 l(x)}{dx^2}$ positiv, d. h. die Kurve der Überlebensordnung zur Altersachse konvex und die Sterbenshäufigkeit eine abnehmende Funktion des Argumentes, so ist letztere grösser als die entsprechende Anzahl der Sterbefälle.

Um bei Annahme der Lazarusschen Formel die Wendepunkte der Kurve der Lebenden und zugleich die Extrema der Kurve der Sterbenden zu finden, setzen wir in der Gleichung

$$\mu^2(x) - \frac{d\mu(x)}{dx} = 0$$

die Werte

$$\mu(x) = A + M h^x + N c^x$$

und

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = M H h^x + N C c^x$$

Wir erhalten zur Auflösung die Gleichung

$$(19) \quad A^2 + M^2 h^{2x} + N^2 c^{2x} + 2 M A h^x + 2 N A c^x + \\ + 2 M N h^x c^x - M H h^x - N C c^x = 0$$

Diese in x transzendente Gleichung ist aber nicht direkt auflösbar. Um dennoch die Wendepunkte der Kurve und die Extremalpunkte der Kurve $T(x)$ wenigstens annähernd zu finden, verfahren wir wie folgt: Die Wurzeln der Gleichung $\mu^2(x) = \frac{d\mu(x)}{dx}$ liegen, wie gezeigt, nicht im Kindesalter. Wir finden sie vielmehr dort, wo man die Ausdrücke mit dem Faktor h^x vernachlässigen kann.

Die aufzulösende transzendente Gleichung lautet in diesem Falle

$$N^2 c^{2x} - N(C - 2A) c^x + A^2 = 0 \tag{19a}$$

Sie entspricht also dem Makehamschen Gesetz.

Diese in c^x quadratische Gleichung hat zwei Wurzeln; wie man aus der Form der Gleichung ersieht, werden, falls sie reell sind, beide positiv oder beide negativ.

Nur im Falle, dass beide Ausdrücke für c^x positiv und grösser als 1 sind, erhalten wir zwei positive Wurzeln x der transzendenten Gleichung (19a). Von diesen entspricht die kleinere x_1 einem Minimum, und die grössere x_2 einem Maximum in der Kurve der Sterbenshäufigkeit.

Die in der Gleichung (19) vernachlässigten Glieder

$$M^2 h^{2x} + 2 M A h^x + 2 M N h^x c^x - M H h^x$$

sind sämtlich positiv; wenn man nun die auf obige Art näherungsweise berechneten Wurzeln x_1 und x_2 in den Ausdruck für den zweiten Differentialquotienten

$$\frac{d^2 l(x)}{dx^2} = l(x) \left\{ \mu^2(x) - \frac{d \mu(x)}{dx} \right\}$$

einsetzt, so wird die rechte Seite und somit auch der zweite Differentialquotient $\frac{d^2 l(x)}{dx^2}$ positiv. Die berechneten Wurzeln entsprechen somit nicht den Wendepunkten, sondern Punkten, die sich in deren Nähe befinden. Es sind Punkte, die in *konvexen* Abschnitten der

Kurve der Lebenden liegen, d. h. die Wurzel x_1 wird zu klein und die Wurzel x_2 zu gross.

Die Differenzen zwischen den wahren Wurzeln der Gleichung

$$\mu^2(x) - \frac{d\,\mu(x)}{dx} = 0$$

und den auf obige Weise approximativ berechneten Wurzeln werden desto kleiner, je grösser die berechneten Wurzeln sind.

Die Auflösung der Gleichung (19) führt zum Ausdrucke

$$c^x = \frac{C - 2A \pm \sqrt{C(C-4A)}}{2N} \tag{20}$$

Diese beiden Ausdrücke für c^x werden reell bei

$$C > 4A \text{ d. h. wenn}$$

$$\operatorname{Log} c > \operatorname{Log} s^{-4} \text{ oder } c > s^{-4} \text{ also } cs^4 > 1 \text{ ist.}$$

In diesem Falle werden aber beide Ausdrücke für c^x positiv, denn $C - 2A$ ist positiv und stets grösser als

$$\sqrt{C^2 - 4AC} = \sqrt{C(C-4A)};$$

sollen die *beiden* Wurzeln x_1 und x_2 positiv sein, so muss der Ausdruck

$$C - 2A - \sqrt{C(C-4A)}$$

grösser als $2N$ sein. Dann wird auch

$$C - 2A + \sqrt{C(C-4A)} > 2N.$$

Aus (20) folgen für x die Werte:

$$x = \frac{\log(C - 2A \pm \sqrt{C(C-4A)}) - \log 2N}{\log c} \tag{21}$$

Diese Wurzeln sind abhängig von den Parametern der Makehamschen Überlebensordnung. Um die Abhängigkeit der Wurzeln (21) von den Parametern c, g und s zu untersuchen, bilden wir die Differentialquotienten $\frac{dx}{dc}$, $\frac{dx}{dg}$ und $\frac{dx}{ds}$.

Es ist:

$$\frac{dx_1}{dc} = \frac{1}{cC^2}\left\{\left[\frac{1 - \frac{C-2A}{\sqrt{C(C-4A)}}}{C - 2A - \sqrt{C(C-4A)}} - \frac{1}{C}\right]C - x_1 C\right\} =$$

$$= \frac{1}{cC}\left\{-\frac{1}{\sqrt{C(C-4A)}} - \frac{1}{C} - x_1\right\} < 0$$

und

$$\frac{dx_2}{dc} = \frac{1}{cC^2}\left\{\left[\frac{1 + \frac{C-2A}{\sqrt{C(C-4A)}}}{C - 2A + \sqrt{C(C-4A)}} - \frac{1}{C}\right]C - x_2 C\right\} =$$

$$= \frac{1}{cC}\left\{\frac{1}{\sqrt{C(C-4A)}} - \frac{1}{C} - x_2\right\}$$

Die Differenz

$$\frac{1}{\sqrt{C(C-4A)}} - \frac{1}{C} \text{ ist } = \frac{1}{C}\left\{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4A}{C}}} - 1\right\} =$$

$$= \frac{1}{C}\left\{\left(1 - \frac{4A}{C}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right\} =$$

$$= \frac{1}{C}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{4A}{C} + \frac{3}{8}\left(\frac{4A}{C}\right)^2 + \frac{15}{16}\left(\frac{4A}{C}\right)^3 + \cdots\right\};$$

$\left(\frac{4A}{C}\right)^2$, $\left(\frac{4A}{C}\right)^3 \cdots$ kann man vernachlässigen, so dass

$$\frac{dx_2}{dc} = \frac{1}{cC^2}\left\{\frac{2A}{C} - x_2\right\} \text{ wird}$$

der Ausdruck $\frac{2A}{C}$ wird aber im allgemeinen kleiner als x_2 und somit auch $\frac{dx_2}{dc} < 0$ d. h. die Abszissen, bei welchen die Überlebensordnung bei Annahme der Makehamschen Funktion Wendepunkte besitzt, nehmen mit wachsendem Parameter c ab.

Anderseits ist:

$$\frac{dx}{dg} = \frac{-1}{g\,G'\,C}$$

Da dieser Ausdruck positiv ist, so nehmen beide Wurzeln x_1 und x_2 mit wachsendem g zu.

Ferner ist:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{C} \cdot \frac{2\cancel{S} \cdot \frac{1}{s} \pm \frac{2C\cancel{S} \cdot \frac{1}{s}}{\sqrt{C(C-4A)}}}{C - 2A \pm \sqrt{C(C-4A)}} = \frac{2\cancel{S}}{sC}\left\{\frac{1 \pm \frac{C}{\sqrt{C(C-4A)}}}{C - 2A \pm \sqrt{C(C-4A)}}\right\}$$

also

(a) $$\frac{dx_1}{ds} = \frac{2\cancel{S}}{sC(C - 2A - \sqrt{C(C-4A)})}\left\{1 - \frac{C}{\sqrt{C(C-4A)}}\right\}$$

und

(b) $$\frac{dx_2}{ds} = \frac{2\cancel{S}}{sC(C - 2A + \sqrt{C(C-4A)})}\left\{1 + \frac{C}{\sqrt{C(C-4A)}}\right\}$$

Man hat

$$\sqrt{C(C-4A)} < C$$

somit

$$\frac{C}{\sqrt{C(C-4A)}} > 1$$

die Klammergrösse

$$\left\{1-\frac{C}{\sqrt{C(C-4A)}}\right\}$$

bei (a) wird also negativ. Da aber $S<0$ ist, und alle andern Faktoren positiv sind, so wird $\frac{dx_1}{ds}>0$ d. h. das Alter x_1, bei welchem das Minimum der Sterbenshäufigkeit stattfindet, nimmt mit wachsendem s zu.

Die Klammergrösse

$$\left\{1+\frac{C}{\sqrt{C(C-4A)}}\right\}$$

bei (b) ist positiv, $\frac{dx_2}{ds}$ also <0, d. h. die wahrscheinlichste Lebensdauer nimmt mit wachsendem s ab.

Bei den angegebenen Konstanten der Mortalitätstafel der Assicurazioni Generali in Triest ist:

$$x_1 = 22{,}026 \text{ und } x_2 = 73{,}533.$$

Der Wert der Sterblichkeitsintensität in den Punkten x_1 und x_2 wird erhalten, wenn man die Gleichung

$$\mu(x) = A + Nc^x$$

für c^x nach (20) die Werte

$$c^x = \frac{C-2A \pm \sqrt{C(C-4A)}}{2N}$$

einsetzt. Man erhält

$$\mu(x) = A + \frac{C}{2} - A \pm \frac{1}{2}\sqrt{C(C-4A)} = \frac{C \pm \sqrt{C(C-4A)}}{2}.$$

Diese Werte sind vom Parameter g unabhängig.

Im Falle, dass die Wendepunkte der Überlebensordnung in einem Gebiete liegen, wo die Makehamsche Funktion nicht angewendet werden kann, oder bei Mortalitätstafeln, die nicht nach der Makehamschen Funktion ausgeglichen sind, kann man die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{d^2\,l(x)}{dx} = 0 \text{ oder } \mu^2(x) - \frac{d\,\mu(x)}{dx} = 0$$

mittels numerischer Differentiation und Interpolation bestimmen. So findet man in der Mortalitätstafel der schweizerischen Bevölkerung für die Periode 1876/77 bis 1880/81 die Wendepunkte der $l(x)$ in der Nähe des Alters von 14 und 71 Jahren. Bei der mechanischen Ausgleichung dieser Tafel nach der Methode von Woolhouse hat Dr. G. Schærtlin gefunden[1]), dass $l(7) < l(8)$ wurde und hat dies dadurch erklärt, dass „in der Nähe jenes Alters die Kurve der Lebenden einen Wendepunkt aufweist", was, wie auf Seite 66 gezeigt wurde, nicht möglich ist, da die Sterblichkeit nach dieser Tafel bis zum Alter von 12—13 Jahren abnimmt[2]).

§ 4.

In analoger Weise, wie die Sterblichkeitsintensität aus der Überlebensordnung $\mu(x)$ abgeleitet wird, kann

[1]) Zeitschrift für Schweizerische Statistik 1887, pag. 330 ff.

[2]) Auf meine Anfrage hat Herr Direktor Dr. Schærtlin die Freundlichkeit gehabt, mir folgendes zu antworten: „... ich stelle gerne fest, dass ich mit Ihrer Auffassung einig gehe. Als ich den von Ihnen erwähnten Satz schrieb, wollte ich nichts anderes ausdrücken, als dass der Wendepunkt in der Kurve der $l(x)$ bei der *mechanischen* Ausgleichung die erwähnte Wirkung habe. Damals muss ich angenommen haben, dieser Wendepunkt liege dem $l(8)$ näher als es tatsächlich der Fall ist. Er liegt tatsächlich aber weiter oben, vielleicht bei l (14) oder l (15)...".

man auch eine weitere Funktion aus $\mu(x)$ ableiten [1]; man nennt sie die Intensitätsfunktion zweiter Ordnung. Sie ist definiert durch die Gleichung

$$\mu_2(x) = -\frac{d\,\mu(x)}{dx} \cdot \frac{1}{\mu(x)}$$

Allgemein kann man die Intensitätsfunktion n^{ter} Ordnung definieren durch die Gleichung

$$\mu_n(x) = -\frac{d\mu_{n-1}(x)}{dx} \cdot \frac{1}{\mu_{n-1}(x)}$$

wo $\mu_{n-1}(x)$ die Intensitätsfunktion $\overline{n-1}^{\text{ter}}$ Ordnung darstellt.

Durch Einführung der Intensitätsfunktionen höherer Ordnung nimmt die frühere Bedingung für die Wendepunkte der Kurve der Absterbeordnung, und für die Extrema der Sterbenshäufigkeit, folgende Form an:

$$\mu_1(x) + \mu_2(x) = 0.$$

Bei Annahme der Lazarusschen Formel lauten die Intensitätsfunktionen wie folgt:

$$\mu_1(x) = A + M h^x + N c^x$$

$$\mu_2(x) = \frac{-M H h^x - N C c^x}{A + M h^x + N c^x}$$

$$\mu_3(x) =$$

$$\frac{-M H^2 A h^x - N C^2 A c^x - M H^2 N h^x c^x - M N C^2 c^x h^x + 2 M N C H c^x}{(A + M h^x + N c^x)(M H h^x + N C c^x)}$$

[1]) Prof. Dr. Moser: Die Intensität der Sterblichkeit und die Intensitätsfunktion, Bern 1906.

Besonders bemerkenswert werden die Intensitätsfunktionen höherer Ordnung unter Annahme der Makehamschen Funktion. Es ist dann:

$$\mu_1(x) = A + Nc^x$$

$$\mu_2(x) = -\frac{NCc^x}{A + Nc^x} = \frac{AC}{A + Nc^x} - C$$

$$\mu_3(x) = -\frac{AC}{A + Nc^x}$$

$$\mu_4(x) = -\mu_2(x)$$

$$\mu_5(x) = +\mu_3(x)$$

$$\mu_6(x) = +\mu_4(x) = -\mu_2(x)$$

usf. [1]).

Allgemein wird

$$\mu_{2n}(x) = -\mu_2(x) = C - \frac{AC}{A + Nc^x} = C - \frac{AC}{\mu(x)} \text{ für } n > 1$$

und

$$\mu_{2n-1}(x) = -\frac{AC}{A + Nc^x} = -\frac{AC}{\mu(x)} \quad \text{für } n > 1$$

Hieraus folgt:

$$\mu_{2n}(x) - \mu_{2n-1}(x) = C.$$

Die frühere Bedingung für den Wendepunkt der Überlebensordnung $\mu(x) = -\mu_2(x)$ wird (unter Annahme der Makehamschen Funktion) zu

$$\mu(x) = \mu_{2n}(x) \qquad n > 1$$

Aus den Ausdrücken für die Intensitätsfunktionen verschiedener Ordnungen ersieht man, dass sie alle

[1]) Bei Annahme der Gompertzschen Funktionen wird $\mu_{2n}(x) = -\mu_2(x) = C$ und $\mu_{2n-1}(x) = 0$

monoton sind, und zwar ist $\mu_2(x)$ abnehmend, während die Intensitätsfunktionen aller andern Ordnungen (auch der ersten) zunehmend sind.

Durchläuft die Variable x alle reellen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, so nehmen die Intensitätsfunktionen ungerader Ordnung (mit Ausnahme der ersten) die negativen Werte von $-C$ bis Null an:

$$-C \leqq \mu_{2n-1}(x) \leqq 0 \quad (n > 1);$$

die Intensitätsfunktionen gerader Ordnung (die zweite ausgeschlossen) nehmen dabei die positiven Werte von Null bis $+C$ an.

$$0 \leqq \mu_{2n}(x) \leqq C. \qquad (n > 1);$$

Die Intensitätsfunktion erster Ordnung (Sterblichkeitsintensität) wächst bei zunehmendem x ins Unendliche; diejenige zweiter Ordnung nimmt die negativen Werte von Null bis $-C$ an. Zusammenfassend stellen wir folgendes fest: Bei Annahme der Makehamschen Funktion

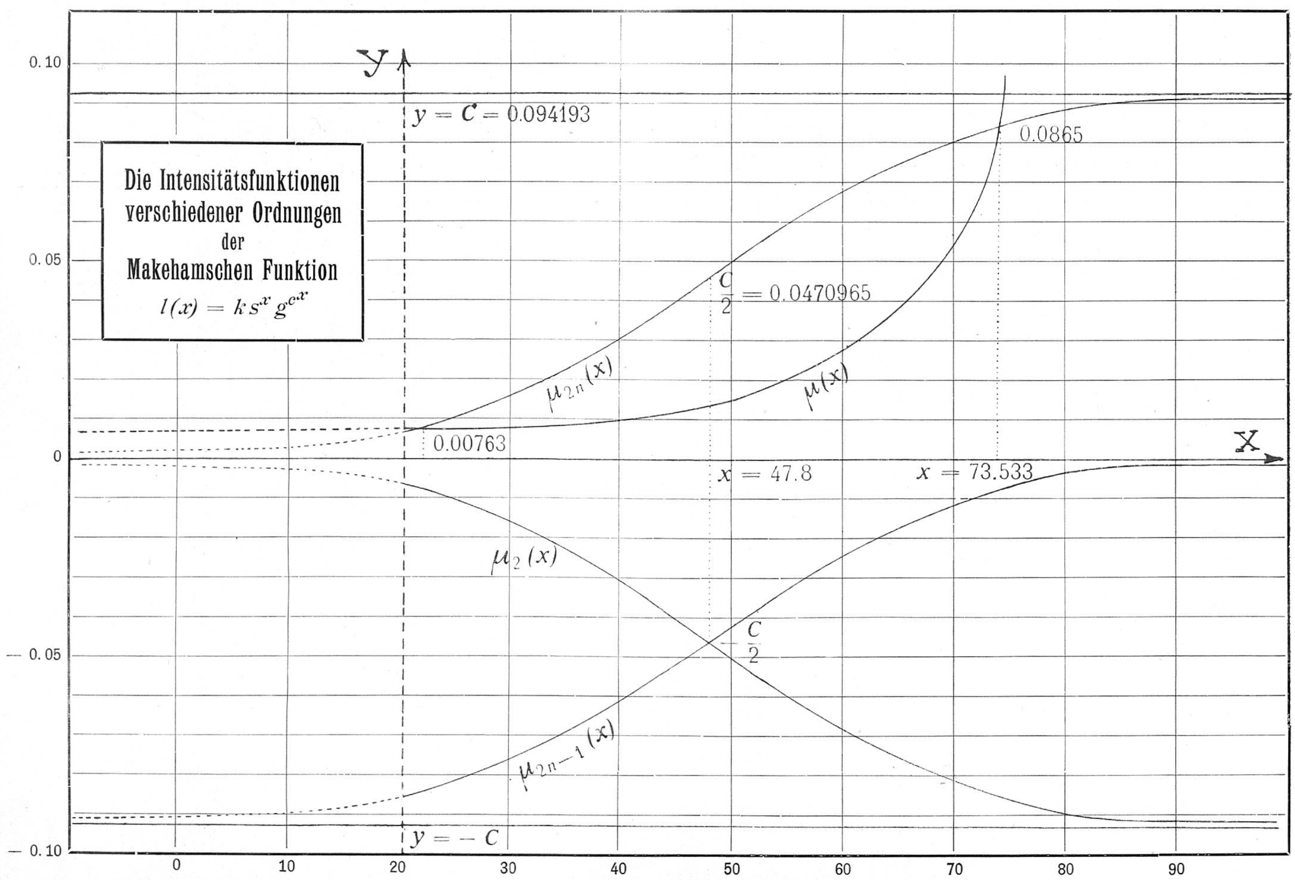
$$l(x) = k \cdot s^x g^{c^x}$$

liegen die Werte ihrer Intensitätsfunktionen aller Ordnungen, mit Ausnahme der ersten, zwischen den engen Grenzen $-C$ und $+C$ [1]).

Die Kurven $\mu_{2n-1}(x)$ und $\mu_{2n}(x)$ verlaufen zwischen zwei parallelen Linien, denen sie asymptotisch sind: $\mu_{2n-1}(x)$ liegt zwischen den Geraden $y = -C$ und $y = 0$, $\mu_{2n}(x)$ zwischen den Geraden $y = 0$ und $y = C$, beide Kurven besitzen also je einen Wendepunkt. Wir wollen zunächst die Lage dieses Punktes für die Kurve $\mu_{2n-1}(x)$ bestimmen. Zu diesem Zwecke bilden wir den zweiten Differentialquotienten nach x genommen. Es ist

---

[1]) Vergleiche Figur.



Die Intensitätsfunktionen verschiedener Ordnungen der Makehamschen Funktion
$l(x) = k s^x g^{c^x}$
$y = C = 0.094193$
0.0865
$\frac{C}{2} = 0.0470965$
$\mu_{2n}(x)$
$\mu(x)$
0.00763
$x = 47.8$
$x = 73.533$
$\mu_2(x)$
$-\frac{C}{2}$
$\mu_{2n-1}(x)$
$y = -C$
0.10
0.05
0
— 0.05
— 0.10
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90

$$\frac{d^2 \mu_{2n-1}(x)}{dx^2} = \frac{N C^3 A c^x (A - N c^x)}{(A + N c^x)^3}$$

Für den Wendepunkt muss also $N c^x = A$ sein. Hieraus folgt:

$$c^x = \frac{A}{N}$$

oder

$$x = \frac{\log A - \log N}{\log c}$$

Der Wert $\mu_{2n-1}(x)$ wird in diesem Punkte zu

$$\mu_{2n-1}(x) = -\frac{A C}{A + A} = -\frac{C}{2}$$

Wegen der Beziehung

$$\mu_{2n}(x) = -\mu_2(x) = \frac{C}{2} + \mu_{2n-1}(x)$$

haben die Abszissen der Wendepunkte der Kurven $y = \mu_2(x)$ und $y = \mu_{2n}(x)$ ebenfalls den Wert

$$x = \frac{\log A - \log N}{\log c}.$$

Die entsprechenden Ordinanten werden

$$\mu_2(x) = \frac{A C}{A + A} - C = -\frac{C}{2}$$

und

$$\mu_{2n}(x) = \frac{C}{2}$$

Da in den Wendepunkten die Werte $\mu_2(x)$ und $\mu_{2n-1}(x)$ übereinstimmen, so durchschneiden sich diese beiden Kurven in ihren Wendepunkten.

Bekanntlich hat der Parameter c in allen Mortalitätstafeln annähernd denselben Wert, daher unterscheiden sich die Intensitätsfunktionen höherer Ordnung in den

Wendepunkten bei verschiedenen Mortalitätstafeln nicht wesentlich voneinander.

Die Sterblichkeitsintensität selbst hat in diesem Punkte den Wert

$$\mu(x) = A + N c^x = A + N \cdot \frac{A}{N} = 2\,A$$

ist also nur vom Parameter s abhängig.

Die Abszissen der Wendepunkte der Überlebensordnung sind (bei Annahme der Makehamschen Formel) die Wurzeln der Gleichung

$$\mu_1(x) = \mu_4(x)$$

Diese Gleichung lautet:

$$\mu_1(x) = C - \frac{A\,C}{\mu_1(x)}$$

Man kann hieraus direkt die Werte der Sterblichkeitsintensität in den Wendepunkten der $l(x)$-Kurve bestimmen.

Es ist

$$\mu^2(x) - C\,\mu(x) + A\,C = 0$$

und hieraus, wie früher (Seite 74) gefunden,

$$\mu(x) = \frac{C \pm \sqrt{C^2 - 4\,A\,C}}{2}$$

Sollen diese Werte reell sein, so muss, wie oben ausgeführt, $C > 4\,A$ sein. Dann wird der eine Wert kleiner als $\frac{C}{2}$ und der andere grösser als $\frac{C}{2}$ sein, wie es die Figur zeigt.

Bei der Annahme der Konstanten der L. L.-Tafel wird in den Wendepunkten der $l(x)$-Kurve

$$\mu(x) = 0{,}00763 \text{ für } x_1 = 22{,}026$$

und

$$\mu(x) = 0{,}0865 \text{ für } x_2 = 73{,}533$$

während die Abszisse der Wendepunkte der Intensitätsfunktionen höherer Ordnung den Wert $x = 47{,}8$ hat und dessen Ordinate $-\frac{C}{2} = 0{,}0470965$ ist.

§ 5.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein x-jähriger nach n Jahren noch lebt, ausgedrückt durch die Sterblichkeitsintensität, ist nach (8b)

$$ {}_np(x) = e^{-\int_0^n \mu(x+\tau)d\tau} $$

Dieser Wert ist, ausser vom Verlaufe der Sterblichkeit, auch noch vom Alter x des Individuums und der Dauer n abhängig.

Da der erste Differentialquotient nach n genommen

$$ \frac{d}{dn}\,{}_np(x) = -e^{-\int_0^n \mu(x+\tau)d\tau} \cdot \mu(x+n) $$

negativ ist, so nimmt diese Wahrscheinlichkeit mit steigendem n ab, was aus dem Begriffe der Überlebenswahrscheinlichkeit von selbst folgt.

Wir wollen nun die Kurve, welche die Wahrscheinlichkeit ${}_np(x)$ als Funktion von n geometrisch darstellt, auf ihre Konvexität und Konkavität hin untersuchen. Zu diesem Zwecke bilden wir den zweiten Differentialquotienten des Ausdruckes (8b) nach n genommen. Es ist:

$$ \frac{d^2}{dn^2}\,{}_np(x) = -\left\{\frac{d\mu(x+n)}{dn}\,e^{-\int_0^n \mu(x+\tau)d\tau} - \mu^2(x+n)\,e^{-\int_0^n \mu(x+\tau)d\tau}\right\} = $$

$$ = e^{-\int_0^n \mu(x+\tau)d\tau}\left\{\mu^2(x+n) - \frac{d\mu(x+n)}{dn}\right\} = $$

$$ = {}_np(x)\mu(x+n)\left\{\mu(x+n) + \mu_2(x+n)\right\} $$

Somit hat die Kurve, welche die Wahrscheinlichkeit ${}_np(x)$ als Funktion von n darstellt, dieselben Eigenschaften in bezug auf Konvexität und Konkavität wie die Überlebensordnung; dies folgt übrigens auch aus der Definition:

$$\text{(2b)} \qquad {}_np(x) = \frac{l(x+n)}{l(x)}$$

Hat die Absterbeordnung zwei Wendepunkte x_1 und x_2, wobei $x_2 > x_1$ ist, so besitzt auch die Wahrscheinlichkeitskurve zwei Wendepunkte: für die Dauer

$$n_1 = x_1 - x$$

und

$$n_2 = x_2 - x$$

wo x das gegebene Alter des Individuums ist.

Ist $x < x_1$, so gibt es zwei positive n, bei welchen die Kurve der ${}_np(x)$ Wendepunkte besitzt; ist $x_1 < x < x_2$, so gibt es nur ein solches n; ist endlich $x > x_2$, so findet man keine Wendepunkte; in diesem Falle verläuft die Kurve konvex zur n-Achse.

Um die Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit ${}_np(x)$ vom Alter x des Individuums zu untersuchen, bilden wir den Differentialquotienten $\frac{d}{dx}\,{}_np(x)$.

Es ist

$$\frac{d}{dx}\,{}_np(x) = -\,e^{-\int\limits_0^n \mu(x+\tau)d\tau} \left\{ \int\limits_0^n \frac{d\,\mu(x+\tau)}{dx} \cdot d\tau \right\}$$

Da aber

$$\frac{d\,\mu(x+\tau)}{dx} = \frac{d\,\mu(x+\tau)}{d\tau} \quad \text{ist,}$$

so wird

$$\int\limits_0^n \frac{d\,\mu(x+\tau)}{dx}\,d\tau = \int\limits_0^n d\,\mu(x+\tau) = \mu(x+n) - \mu(x)$$

und somit

$$\frac{d}{dx}\,{}_np(x) = \left\{\mu(x) - \mu(x+n)\right\} e^{-\int\limits_0^n \mu(x+\tau)d\tau}$$

Wäre die Sterblichkeitsintensität in ihrem ganzen Verlaufe eine monoton wachsende Funktion, so wäre die Differenz

$$\mu(x) - \mu(x+n)$$

stets negativ und somit auch der Differentialquotient $\frac{d}{dx}\,{}_np(x)$ negativ, da der Ausdruck

$$e^{-\int\limits_0^n \mu(x+\tau)d\tau} = {}_np(x)$$

positiv ist.

Da aber die Sterblichkeitsintensität nicht im ganzen Verlaufe eine wachsende Funktion ist, so kann die Differenz

$$\mu(x) - \mu(x+n)$$

und somit auch der Differentialquotient positiv werden. Dies trifft zu, wenn im betrachteten Intervalle die Sterblichkeitsintensität eine abnehmende Funktion ist; das ist aber dann der Fall, wenn $x+n$, also auch x, kleiner als ε ist, d. h. kleiner als dasjenige Alter, bei welchem die Sterblichkeitsintensität ihr Minimum besitzt. Hat man gegen $x < \varepsilon$ und $x+n > \varepsilon$, so kann die Differenz $\mu(x) - \mu(x+n)$ sowohl negativ als auch positiv sein; ihr Vorzeichen hängt ab von der relativen Grösse des Alters x und der Dauer n. Geht diese Differenz von negativen Werten in positive über, genügt also x der Gleichung

$$\mu(x) - \mu(x+n) = 0 \tag{22}$$

so wird der Differentialquotient $\frac{d}{dx}\,{}_n p(x)$ gleich Null; somit hat die Überlebenswahrscheinlichkeit für diese Alter ein Maximum, und mit ihr hat die n-jährige Sterbenswahrscheinlichkeit ${}_n q(x)$ ein Minimum wegen der Beziehung

$$(11) \qquad {}_n q(x) = 1 - {}_n p(x)$$

Soll die Beziehung (22) stattfinden können, so muss die Funktion im Intervalle $(x, x+n)$ eine nicht monotone sein und das Extremum muss zwischen x und $x+n$ liegen, während das Extremum der Funktionen ${}_n p(x)$ und ${}_n q(x)$ bei x ist. Ist speziell $n = 1$, so folgt hieraus das Resultat, dass die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit q ihr Extremum bei einem niedrigeren Alter hat als die Sterbensintensität μ; die Differenz kann dabei aber ein Jahr nicht überschreiten. So ist z. B. in der Tafel L. L. das Minimum für q bei $x = 9{,}71$ und für μ bei $\varepsilon = 10{,}17$.

Die Wurzel x der Gleichung $\mu(x) - \mu(x+n) = 0$ hängt ausser von der Beschaffenheit der Intensitätsfunktion noch vom Parameter n ab. Um diese Abhängigkeit zu untersuchen, differenzieren wir die obige Gleichung nach n, indem wir beachten, dass in diesem Falle auch x eine Funktion von n ist.

Es ist:

$$\frac{d\mu(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dn} - \frac{d\mu(x+n)}{d(x+n)} \cdot \frac{d(x+n)}{dn} = 0$$

$$\frac{d\mu(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dn} - \frac{d\mu(x+n)}{d(x+n)} \left\{\frac{dx}{dn} + 1\right\} = 0$$

$$\frac{dx}{dn}\left\{\frac{d\mu(x)}{dx} - \frac{d\mu(x+n)}{d(x+n)}\right\} = \frac{d\mu(x+n)}{d(x+n)}$$

hieraus folgt:

$$(\alpha) \qquad \frac{dx}{dn} = \frac{\dfrac{d\mu(x+n)}{d(x+n)}}{\dfrac{d\mu(x)}{dx} - \dfrac{d\mu(x+n)}{d(x+n)}}$$

Besitzt die Sterblichkeitsintensität nur ein Extremum (Minimum) beim Alter ε, so ist die Wurzel x der Gleichung (22) eindeutig bestimmt; für diese Wurzel müssen dann, wie wir gesehen haben, die Ungleichungen $x < \varepsilon$ und $x + n > \varepsilon$ bestehen; es wird

$$\frac{d\mu(x)}{dx} < 0 \text{ und } \frac{d\mu(x+n)}{d(x+n)} > 0$$

da die Sterblichkeitsintensität bis zum Alter ε abnimmt und dann zunimmt. Wie man sieht, wird in diesem Falle der Differentialquotient (α) negativ, d. h. die Wurzel x der Gleichung (22) $\mu(x) - \mu(x+n) = 0$ nimmt mit wachsendem Parameter n ab.

Besitzt aber die Sterblichkeitsintensität mehrere Extrema, wie es z. B. die Tafeln AF, RF, M & W und andere aufweisen, so kann die Wurzel x mehrdeutig sein. In diesem Falle können x und $\overline{x+n}$ sowohl im absteigenden als auch im aufsteigenden Aste liegen. Liegt x im absteigenden und $\overline{x+n}$ im aufsteigenden Aste, so wird wie früher

$$\frac{dx}{dn} < 0.$$

Liegt x im aufsteigenden und $\overline{x+n}$ im absteigenden Aste, so wird auch hier

$$\frac{dx}{dn} < 0.$$

Liegen endlich x und $\overline{x+n}$ beide in aufsteigenden oder beide in absteigenden Ästen, so wird das Vorzeichen des Differentialquotienten

$$\frac{dx}{dn} = \frac{\dfrac{d\mu(x+n)}{d(x+n)}}{\dfrac{d\mu(x)}{dx} - \dfrac{d\mu(x+n)}{d(x+n)}}$$

abhängen von der relativen Grösse der Differentialquotienten

$$\frac{d\mu(x)}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{d\mu(x+n)}{d(x+n)}$$

d. h. von der Raschheit der Zunahme, resp. der Abnahme der Sterblichkeitsintensität in diesen beiden Punkten.

Unter Annahme der Lazarusschen Formel lautet die Gleichung $\mu(x) = \mu(x+n)$ wie folgt:

$$(\beta) \qquad A + Mh^x + Nc^x = A + Mh^{x+n} + Nc^{x+n}$$

Umgeformt hat man:

$$Mh^x(1-h^n) = Nc^x(c^n-1)$$

und

$$\left(\frac{c}{h}\right)^x = \frac{M(1-h^n)}{N(c^n-1)}$$

$$x = \frac{\log M + \log(1-h^n) - \log N - \log(c^n-1)}{\log c - \log h}$$

Für die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit ($n=1$) wird das Alter, bei welchem das Maximum stattfindet, durch die Gleichung $\mu(x) = \mu(x+1)$ definiert.

Bei Annahme der Lazarusschen Formel wird diese Wurzel dargestellt durch folgenden Ausdruck:

$$x = \frac{\log M + \log(1-h) - \log N - \log(c-1)}{\log c - \log h}$$

In der Tafel der k. k. priv. Assicurazioni Generali ist, wie erwähnt, dieses $x = 9{,}71$, während $\varepsilon = 10{,}17$ ist.

Die Gleichung (22)

$$\mu(x) - \mu(x+n) = 0$$

haben wir nach der Unbekannten x aufgelöst; man kann sie aber auch als Gleichung mit der Unbekannten n und dem Parameter x ansehen. Geometrisch wird das heissen, man soll zu einem gegebenen Punkte mit der Abszisse x einen andern Punkt der Kurve der Sterblichkeitsintensität finden, dessen Ordinate gleich derjenigen des ersten ist. Die Wurzel n ist jetzt vom Parameter x abhängig; kehrt man den frühern Ausdruck (α) für $\frac{dx}{dn}$ um, so erhält man

$$\frac{dn}{dx} = \frac{\frac{d\mu(x)}{dx} - \frac{d\mu(x+n)}{d(x+n)}}{\frac{d\mu(x+n)}{d(x+n)}}$$

Die Abhängigkeit der Wurzel n von x ist dieselbe wie in der frühern Betrachtung die umgekehrte Abhängigkeit x von n.

Die Auflösung der Gleichung (β) nach n ist nur dann möglich, wenn das gegebene Alter x klein ist; n wird in diesem Falle gross, und man kann dann die Glieder mit h^n vernachlässigen; die Gleichung lautet somit:

$$N c^{x+n} = M h^x + N c^x$$

$$c^n = \frac{M}{N}\left(\frac{h}{c}\right)^x + 1$$

Daraus folgt

$$n = \frac{1}{\log c} \log \left\{ \frac{M}{N} \left(\frac{h}{c} \right)^x + 1 \right\}$$

Wir sahen, dass die Kurve der Überlebenswahrscheinlichkeiten ein Maximum besitzt. Darum ist sie in diesem Punkte zur x-Achse konkav. Treffen wir für die Überlebensordnung die Annahme einer analytischen Funktion, so nähert sich diese Kurve asymptotisch der x-Achse, sie ist also im Greisenalter zur x-Achse konvex.

Daher muss sie nach demjenigen Alter, bei welchem das Maximum stattfindet, eine ungerade Anzahl von Wendepunkten besitzen. Will man diese Wendepunkte analytisch finden, so setzt man den zweiten Differentialquotienten der Überlebenswahrscheinlichkeit nach x genommen gleich Null und löst die so erhaltene Gleichung nach x auf.

Es ist

$$\frac{d^2}{dx^2}\, {}_n p(x) =$$

$$= e^{-\int_0^n \mu(x+\tau)d\tau} \left\{ \frac{d\,\mu(x)}{dx} - \frac{d\,\mu(x+n)}{d(x+n)} + \big(\mu(x) - \mu(x+n)\big)^2 \right\}$$

Die aufzulösende Gleichung lautet also:

$$\frac{d\,\mu(x+n)}{d(x+n)} - \frac{d\,\mu(x)}{dx} = \left\{ \mu(x) - \mu(x+n) \right\}^2$$

Bei Annahme der Makehamschen Formel wird sie

$$N\,C\,c^{x+n} - N\,C\,c^x = (N c^x - N c^{x+n})^2$$

$$C\,c^x (c^n - 1) = N c^{2x} (c^n - 1)^2$$

$$c^x = \frac{C}{(c^n - 1)\,N}$$

hieraus folgt

$$x = \frac{\log C - \log (c^n - 1) - \log N}{\log c}$$

Diese Wurzel nimmt mit wachsenden n ab.

In der Tafel L. L. ist

für $n = 1$	$x = 99{,}91$
$n = 2$	$x = 89{,}80$
$n = 3$	$x = 87{,}21$
$n = 5$	$x = 80{,}73$
$n = 10$	$x = 70{,}73$ usw.

Die Wahrscheinlichkeit für einen x-jährigen das Alter c zu erreichen ist nach (9)

$$_{c-x}p(x) = e^{-\int\limits_0^{c-x} \mu(x+\tau)d\tau}$$

Um die Abhängigkeit dieser Wahrscheinlichkeit vom Alter x zu untersuchen, differenzieren wir den obigen Ausdruck nach x; es ist

$$\frac{d}{dx}\,{}_{c-x}p_x = e^{-\int\limits_0^{c-x} \mu(x+\tau)d\tau} \cdot -\int\limits_0^{c-x} \frac{d\,\mu(x+\tau)}{dx}\,d\tau +$$

$$+ e^{-\int\limits_0^{c-x} \mu(x+\tau)d\tau} \Big| \mu(x+\tau) \Big|_{\tau=c-x} = e^{-\int\limits_0^{c-x} \mu(x+\tau)d\tau} \Big\{ -\mu(c) + \mu(x) + \mu(c) \Big\} =$$

$$= \mu(x)\, e^{-\int\limits_0^{c-x} \mu(x+\tau)d\tau}$$

Der Ausdruck $\frac{d}{dx}\,{}_{c-x}p(x)$ wird somit für alle x positiv; die Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen, das Alter c zu erreichen, nimmt also zu mit wachsendem Alter x.

Aus

$$\frac{d}{dx}\,{}_{c-x}p\,(x) = \mu\,(x)\; e^{-\int\limits_0^{c-x}\mu(x+\tau)\,d\tau}$$

folgt durch nochmalige Differentiation nach x

$$\frac{d^2}{dx^2}\,{}_{c-x}p_x = \frac{d\,\mu(x)}{dx}\; e^{-\int\limits_0^{c-x}\mu(x+\tau)\,d\tau} + \mu^2(x)\; e^{-\int\limits_0^{c-x}\mu(x+\tau)\,d\tau} =$$

$$= e^{-\int\limits_0^{c-x}\mu(x+\tau)\,d\tau}\left\{\mu^2(x) + \frac{d\,\mu(x)}{dx}\right\}$$

Nimmt die Sterblichkeitsintensität mit wachsendem Alter zu, so wird der Ausdruck $\frac{d\,\mu(x)}{dx}$ und somit auch $\frac{d^2}{dx^2}\,{}_{c-x}p\,(x)$ positiv, d. h. die Kurve, welche die Funktion ${}_{c-x}p\,(x)$ geometrisch darstellt, ist in diesem Abschnitte zur x-Achse konvex. Sie kann nur dann konkav sein, wenn $\frac{d\,\mu(x)}{dx}$ negativ ist und absolut genommen grösser als $\mu\,(x)$. Ist $\frac{d\,\mu(x)}{dx} = -\,\mu^2(x)$ so hat ${}_{c-x}p\,(x)$ einen Wendepunkt; dieser liegt im Kindesalter und ist von c unabhängig.

§ 6.

Wird in der frühern approximativen Relation

$$\frac{l(x) - l(x + \Delta\,x)}{\Delta\,x} = T(x) - \frac{\Delta\,x}{2}\,\frac{d^2\,l(x)}{dx^2}$$

Δx gleich 1 gesetzt, und werden beide Seiten dieser Gleichung durch $l\,(x)$ dividiert, so erhält man

$$\frac{l(x) - l(x+1)}{l(x)} = \frac{T(x)}{l(x)} - \frac{1}{2\,l(x)}\cdot\frac{d^2\,l(x)}{dx^2}$$

was die Näherungsgleichung

$$\mu(x) - q(x) = \frac{1}{2\,l(x)} \cdot \frac{d^2 l(x)}{dx^2}$$

ergibt.

Die genaue Beziehung heisst:

$$\mu(x) - q(x) = \frac{1}{2\,l(x)} \cdot \frac{d^2 l(x+\delta)}{d^2 x^2} \qquad 0 < \delta < 1$$

welche sich in der Praxis von der obigen approximativen kaum unterscheidet.

Aus den obigen Gleichungen sehen wir, dass das Vorzeichen der Differenz [1] $\overline{\mu - q}$ vom Vorzeichen des zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2 l(x)}{dx^2}$ abhängt. Die Differenz $\overline{\mu - q}$ ist also *positiv*, wenn die Kurve der Absterbeordnung zur x-Achse *konvex* ist, und sie ist *negativ*, wenn die Kurve $l(x)$ zur x-Achse *konkav* ist. In den Wendepunkten der Kurve $l(x)$ oder genauer in den Punkten, die um nicht Merkliches (jedenfalls weniger als ein Jahr) sich von jenen unterscheiden, und zwar kleiner sind, ist

$$\mu = q$$

Aber auch umgekehrt, nach dem Vorzeichen der Differenz $\mu - q$ kann man über den Verlauf der Kurve $l(x)$ urteilen. So ist z. B. in der Tafel A. F. (1892) [2].

[1]) Der Einfachheit halber sind die Argumente weggelassen.

[2]) Der Verlauf der Absterbeordnung dieser und anderer Sterblichkeitstabellen ist aus einer graphischen Darstellung ersichtbar, die dem Werke „Tables de mortalité du Comité des Compagnies d'assurance à primes fixes sur la vie" (Paris 1895) beigelegt ist.

x	$\mu(x)$	$q(x)$	$\mu - q$	$l(x)$
9	0,00410	0,00388	+ 0,00022	konvex
10	372	364	+ 08	"
11	362	366	— 04	konkav
12	374	387	— 13	"
19	0,00665	0,00675	— 0,00010	"
20	687	690	— 03	"
21	0,00695	0,00692	+ 0,00003	konvex
22	690	681	+ 09	"
23	670	662	+ 08	"
24	663	641	— 08	konkav
25	628	625	— 13	"
26	636	640	— 04	"
70	0,06859	0,06897	— 0,00038	"
71	7442	7462	— 20	"
72	8078	8076	+ 02	konvex
73	8773	8741	+ 22	"

Betrachtet man die Beziehungen zwischen den beiden Kurven, welche die Sterblichkeitsintensität, resp. die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit als Funktionen des Alters x darstellen, so bemerkt man folgendes:

Im Kindesalter nehmen beide Kurven ab, wobei die Sterbenswahrscheinlichkeit q kleiner ist als die Sterblichkeitsintensität μ. Die Kurve q erreicht ihr Minimum früher als die Kurve μ; q fängt also früher an zu steigen, bleibt aber bis zum Wendepunkte x_1 der Überlebensordnung kleiner als μ. Im Punkte mit der Abszisse x_1 schneiden sich beide Kurven und von hier an verläuft q höher als μ. So bleibt es bis zum nächsten Wendepunkte x_2. Hier schneiden sich die beiden Kurven wieder, wonach q tiefer verläuft als μ. Die Sterbenswahrscheinlichkeit q hat als obere Grenze die Einheit, während die Sterblichkeitsintensität μ ins Unendliche wächst.

Da die Kurve $l(x)$, wie oben gezeigt wurde, immer eine *gerade* Anzahl ($2k$) von Wendepunkten besitzt, von denen keiner in das Kindesalter zu liegen kommt, so folgt, dass die Differenz $\mu - q$ dieselbe *gerade Anzahl* von Nullstellen besitzt, und daher nach dem Satze von Rolle muss sie eine ungerade Anzahl, mindestens $2k - 1$ von Extremalpunkten besitzen, und zwar mindestens k Minima und $k - 1$ Maxima.

Wir gehen über zu dessen Aufsuchen.

Zu diesem Zwecke bilden wir den Differentialquotienten

$$\frac{d}{dx}\left\{\mu - q\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{2\,l(x)} \cdot \frac{d^2\,l(x)}{dx^2}\right\}$$

Es ist, wie gesehen,

$$\frac{d^2\,l(x)}{dx^2} = l(x)\left\{\mu^2(x) - \frac{d\,\mu(x)}{dx}\right\}$$

und

$$\frac{1}{2\,l(x)}\,\frac{d^2\,l(x)}{dx^2} = \frac{1}{2}\left\{\mu^2(x) - \frac{d\,\mu(x)}{dx}\right\} = \frac{\mu(x)}{2}\left\{\mu(x) + \mu_2(x)\right\}$$

Daher

$$\frac{d}{dx}(\mu - q) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{2}\,\mu^2(x) - \frac{1}{2}\,\frac{d\,\mu(x)}{dx}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{2\,\mu(x)\,\mu'(x) - \mu''(x)\right\}$$

Da für $x < \varepsilon$ $\mu'(x) < 0$ und $\mu''(x) > 0$ ist, mindestens bei Annahme der Lazarusschen Formel

$$\mu(x) = A + Bc^x + Fh^x, \quad \begin{vmatrix} A,\ B,\ c > 0 \\ c > 1 \quad h < 1 \end{vmatrix},$$

so ist für das Kindesalter $\frac{d}{dx}\left\{\mu - q\right\} < 0$, d. h. die positive Differenz $\mu - q$ nimmt in diesem Intervalle mit wachsendem x monoton ab.

So haben z. B. in der Tafel A. F., die in diesem Intervalle nur mechanisch ausgeglichen ist, d. h. nicht unter Zugrundelegung irgendwelcher analytischen Formel, $\mu(x)$ und $q(x)$ folgende Werte:

x	$\mu(x)$	$q(x)$	$\mu(x) - q(x)$
0	0,04181	0,03602	0,00579
1	0,03186	0,02749	0,00437
2	0,02415	0,02085	0,00330
3	0,01821	0,01575	0,00246
4	0,01370	0,01187	0,00183
5	0,01032	0,00897	0,00135
6	0,00782	0,00687	0,00096
7	0,00605	0,00540	0,00065
8	0,00485	0,00443	0,00042
9	0,00410	0,00388	0,00022
10	0,00372	0,00364	0,00008

Es ist auch

$$\frac{d}{dx}(\mu - q) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2\,l(x)} \cdot \frac{d^2 l(x)}{dx^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\,l^2(x)} \left\{ l(x)\,\frac{d^3 l(x)}{dx^3} - \frac{dl(x)}{dx} \cdot \frac{d^2 l(x)}{dx^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\,l(x)} \left\{ \frac{d^3 l(x)}{dx^3} + \mu(x) \cdot \frac{d^2 l(x)}{dx^2} \right\}$$

Für das Extremum der Differenz $\overline{\mu - q}$ muss also

$$\mu(x)\,\frac{d^2 l(x)}{dx^2} = -\,\frac{d^3 l(x)}{dx^3} \text{ sein.}$$

Zwischen den Zeitpunkten x_1 und x_2, wo dieses Extremum liegt, ist aber die Überlebensordnung zur x-Achse konkav, d. h. $\frac{d^2 l(x)}{dx^2} < 0$. Es muss daher für dieses Extremum $\frac{d^3 l(x)}{dx^3}$ positiv sein.

Wegen der Beziehung

$$T(x) = -\,\frac{dl(x)}{dx}$$

ist

$$\frac{d^3 l(x)}{dx^2} = -\,\frac{d^2 T(x)}{dx^2}$$

Somit im gesuchten Punkte muss $\frac{d^2 T(x)}{dx^2}$ negativ sein, d. h. die Kurve der „Todeshäufigkeit" verläuft hier zur x-Achse konkav. Da sie aber im Punkte x_1 ein Minimum und im Punkte x_2 ein Maximum besitzt, so ist

$$\left(\frac{d^2 T(x)}{dx^2}\right)_{x_1} > 0 \text{ und } \left(\frac{d^2 T(x)}{dx^2}\right)_{x_2} < 0$$

Hieraus kann man schliessen, dass das Extremum der Differenz $\overline{\mu - q}$ bei einem höheren Alter als der Wendepunkt der Todeshäufigkeit stattfindet.

Anderseits ist auch

$$\frac{d}{dx}\left\{\overline{\mu - q}\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{\mu_1}{2}(\mu_1 + \mu_2)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{2\mu_1\mu_1' + \mu_1'\mu_2 + \mu_1\mu_2'\right\} = -\frac{\mu_1\mu_2}{2}\left\{2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3\right\}$$

Unter Anwendung der Makehamschen Funktion ist:

$$\mu_1(x) = A + Nc^x$$

und

$$\mu_2(x) + \mu_3(x) = -C.$$

Für das Extremum der Differenz $\overline{\mu - q}$ muss also $2(A + Nc^x) - C = 0$ sein, woraus

$$c^x = \frac{C - 2A}{2N} \text{ und } x = \frac{\log(C - 2A) - \log 2N}{\log c}$$

Wir haben früher gesehen, dass diejenigen Altersjahre, bei welchen die $l(x)$-Kurve einen Wendepunkt hat, oder genauer, in deren Nähe sich ein Wendepunkt befindet, den Gleichungen

$$c^{x_1} = \frac{C - 2A - \sqrt{C(C - 4A)}}{2N}$$

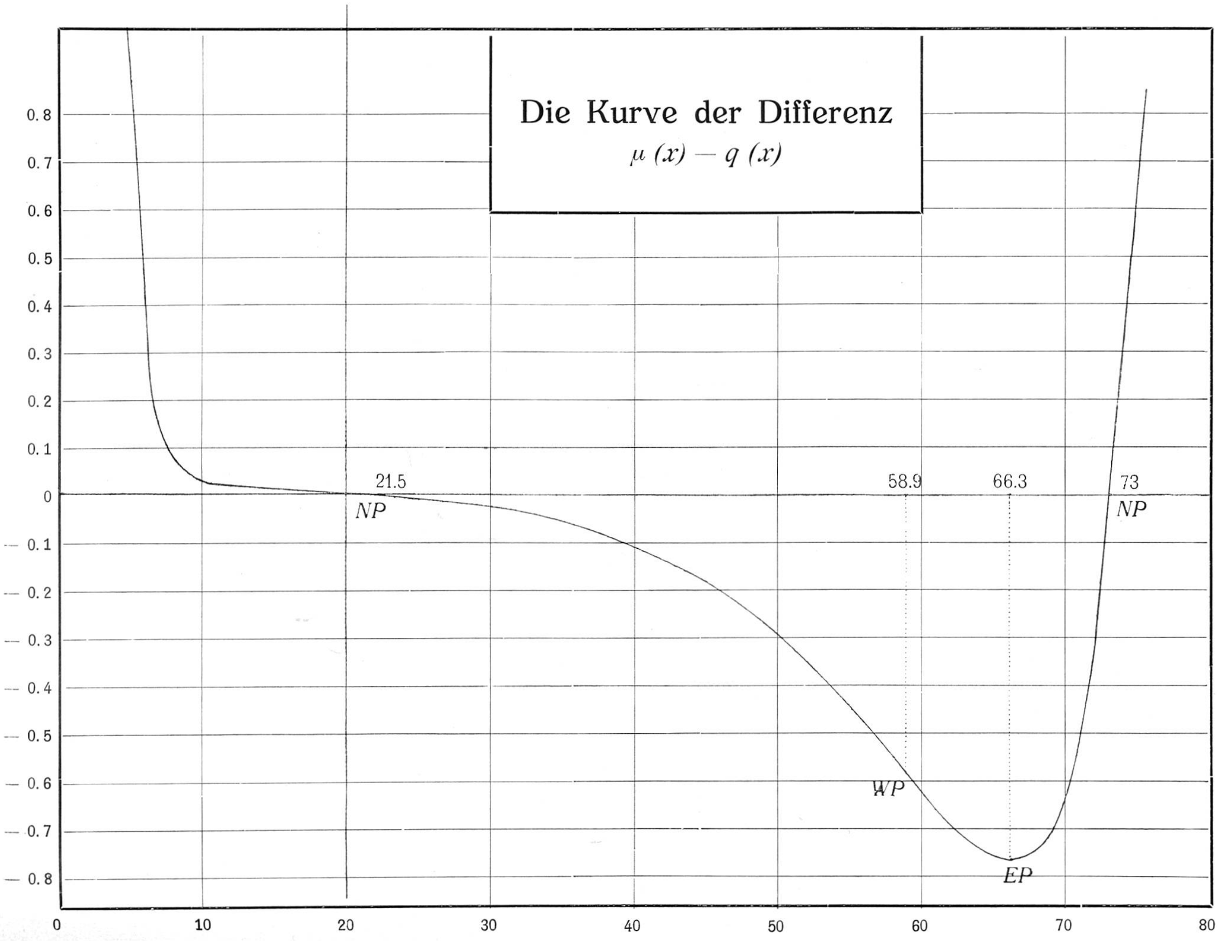
$$c^{x_2} = \frac{C - 2A + \sqrt{C(C - 4A)}}{2N} \text{ genügen.}$$

Dividieren wir diese Werte durch den vorigen

$$c^x = \frac{C - 2A}{2N}$$

so erhalten wir

$$c^{x_1 - x} = 1 - \frac{\sqrt{C(C - 4A)}}{C - 2A}$$


Die Kurve der Differenz
$\mu(x) - q(x)$
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
— 0.1
— 0.2
— 0.3
— 0.4
— 0.5
— 0.6
— 0.7
— 0.8
21.5
NP
58.9
66.3
73
NP
WP
EP
0
10
20
30
40
50
60
70
80

$$c^{x_2-x} = 1 + \frac{\sqrt{C(C-4A)}}{C-2A}$$

Hieraus

$$x_1 - x = \frac{\operatorname{Log}\left\{1 - \frac{\sqrt{C(C-4A)}}{C-2A}\right\}}{\operatorname{Log} c}$$

$$x_2 - x = \frac{\operatorname{Log}\left\{1 + \frac{\sqrt{C(C-4A)}}{C-2A}\right\}}{\operatorname{Log} c}$$

Nun ist aber

$$\left|\operatorname{Log}\left\{1 - \frac{\sqrt{C(C-4A)}}{C-2A}\right\}\right| > \operatorname{Log}\left\{1 + \frac{\sqrt{C(C-4A)}}{C-2A}\right\}$$

denn es ist:

$$\left|\operatorname{Log}\left\{1 - \frac{\sqrt{C(C-4A)}}{C-2A}\right\}\right| = \frac{\sqrt{C(C-4A)}}{C-2A} + \frac{1}{2}\frac{C(C-4A)}{(C-2A)^2} + \cdots$$

und

$$\operatorname{Log}\left\{1 + \frac{\sqrt{C(C-4A)}}{C(C-2A)}\right\} = \frac{\sqrt{C(C-4A)}}{C-2A} - \frac{1}{2}\frac{C(C-4A)}{(C-2A)^2} + \cdots$$

Somit ist die Differenz $x_2 - x < x - x_1$, d. h. das Extremum der Differenz $\mu(x) - q(x)$ liegt näher zum Nullpunkt x_2 als zum Nullpunkt x_1.

Die Differenz $\overline{\mu - q}$ nimmt also mit wachsendem x langsam ab bis zum Minimum und dann rasch zu[1]. Bei L. L. ist

$$x_1 = 22{,}03 \qquad x = 66{,}26 \qquad x_2 = 73{,}53$$

Um die Lage des Wendepunktes der Kurve, welche die Differenz $\overline{\mu - q}$ darstellt, zu bestimmen, bilden wir die Gleichungen

[1]) Vgl. Figur.

$$\frac{d^2}{dx^2}\left\{\mu(x) - q(x)\right\} = \frac{d^2}{dx^2}\left\{\frac{1}{2\, l(x)} \cdot \frac{d^2 l(x)}{dx^2}\right\} = 0 \quad .$$

Bei Annahme der Makehamschen Formel wird:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left\{\mu(x) - q(x)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(2\, A\, N - N\, C)\, C^2\, c^x + 4\, N^2\, C^2\, c^{2x}\right\} = 0$$

$$\frac{1}{2}\, N\, C^2 \left\{2\, A - C + 4\, N c^x\right\} = 0$$

Hieraus

$$c^x = \frac{C - 2\, A}{4\, N} \text{ und } x_{WP} = \frac{\log\,(C - 2\, A) - \log 4\, N}{\log c}$$

Die Differenz

$$x_{EP} - x_{WP} = \frac{\log\,(C - 2\, A) - \log 2\, N}{\log c} -$$

$$- \frac{\log\,(C - 2\, A) - \log 4\, N}{\log c} = \frac{\log 2}{\log c}$$

hängt also nur vom Parameter c ab.

Da dieser Parameter c in allen nach Makeham ausgeglichenen Tafeln nur innerhalb enger Grenzen variiert, so ist die Differenz zwischen den Altersjahren, bei welchen einerseits das Extremum und anderseits der Wendepunkt in der Kurve $\overline{\mu - q}$ stattfindet, annähernd konstant. Variiert $\log_{10} c$ zwischen den Grenzen 0,039 und 0,041, so variiert die Differenz $x_{EP} - x_{WP} = \frac{\log 2}{\log c}$ zwischen 7,52 und 7,34 Jahren (mit wachsendem c nimmt sie ab). In der Tafel ist diese Differenz 7,36. Der Wendepunkt liegt beim Alter $x_{WP} = 58{,}9$ Jahre.

Die Lebenskraft $\frac{1}{\mu(x)}$ gibt an, nach wieviel Jahren würde eine Personengruppe eines gegebenen Alters ausgestorben sein, wenn die Sterblichkeitskraft während der ganzen Existenz dieser Gruppe beständig die nämliche wäre wie im Momente dieses Alters.

Diese biometrische Funktion nimmt dort zu, wo die Sterblichkeitsintensität abnimmt, und umgekehrt; sie hat also ein Maximum im Alter ε und nimmt von hier ab.

Während die Kurve der Sterblichkeitsintensität, als Funktion des Alters x betrachtet, beständig zur x-Achse konvex verläuft (mindestens bei Annahme der Lazarusschen oder Makehamschen Formel), kehrt die Lebenskraft zeitweise ihre konkave, zeitweise ihre konvexe Seite der Altersachse zu. Es ist:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{\mu(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{\frac{d\,\mu(x)}{dx}}{\mu^2(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\mu_2(x)}{\mu_1(x)}\right) =$$

$$= \frac{\mu_2'\mu_1 - \mu_2\mu_1'}{\mu_1^2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\left\{\frac{\mu_2'}{\mu_2} - \frac{\mu_1'}{\mu_1}\right\} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\left\{\mu_2 - \mu_3\right\}$$

besitzt also einen Wendepunkt dort, wo die zweite und dritte Intensitätsfunktionen einander gleich sind.

Wie auf Seite 80 gezeigt wurde, schneiden sich die Kurven $\mu_2(x)$ und $\mu_3(x)$ bei Annahme der Makehamschen Funktion in einem Punkte, bei welchem die Sterblichkeitsintensität den Wert $2\,A$ hat.

Die Lebenskraft hat also hier den Wert $\frac{1}{2\,A}$; bis zur Erreichung dieses Wertes verläuft $\frac{1}{\mu(x)}$ sinkend zur x-Achse konkav und von hier an konvex.

§ 7.

Unter der mittlern Lebensdauer $\mathring{e}(x)$ eines x-jährigen versteht man eine Grösse, welche die von einem x-jährigen durchschnittlich noch zu erlebende Anzahl von Jahren angibt.

Erfolgen die Sterbefälle nach der angenommenen Überlebensordnung, so ist die Zahl der heute x-jährigen Personen der Gemeinschaft, welche nach t Jahren im unendlich kleinen Intervalle t bis $t + dt$ sterben, gleich

$$l(x+t) - l(x+t+dt) = -dl(x+t)$$

Jede von ihnen wird, vom heutigen Momente gerechnet, noch t Jahre leben; zusammen erleben sie

$$-t\,dl(x+t)$$

Wird diese Grösse summiert über alle entsprechenden t von 0 bis $\omega - x$, bei welchem Alter keine Lebenden mehr vorhanden sind, so erhält man die Anzahl der Jahre, welche die $l(x)$ gemeinschaftlich noch durchleben:

$$-\int_0^{\omega-x} t\,dl(x+t).$$

die mittlere Lebensdauer des x-jährigen wird somit

$$\mathring{e}(x) = -\frac{1}{l(x)} \int_0^{\omega-x} t \cdot dl(x+t).$$

Partiell integriert erhält man:

$$\mathring{e}(x) = -\frac{1}{l(x)} \left\{ \Big| t\,l(x+t) \Big|_{t=0}^{t=\omega-x} - \int_0^{\omega-x} l(x+t)\,dt \right\}$$

Der Ausdruck $tl(x+t)$ wird aber für $t = 0$ und für $t = \omega - x$ zu Null; wir erhalten also

$$(24)\quad \overset{\circ}{e}(x) = \frac{1}{l(x)} \int_0^{\omega-x} l(x+t)\,dt = \int_0^{\omega-x} \frac{l(x+t)}{l(x)}\,dt = \int_0^{\omega-x} {}_t p(x)\,dt;$$

hier tritt die mittlere Lebensdauer als eine Summe von Überlebenswahrscheinlichkeiten auf. Wird ${}_t p(x)$ durch $e^{-\int_0^t \mu(x+\tau)d\tau}$ ersetzt, so erhält man für die mittlere Lebensdauer den Ausdruck

$$\overset{\circ}{e}(x) = \int_0^{\omega-x} e^{-\int_0^t \mu(x+\tau)d\tau}\,dt$$

(25) oder

$$\overset{\circ}{e}(x) = \int_0^{\infty} e^{-\int_0^t \mu(x+\tau)d\tau}\,dt$$

wenn wir statt der obern Grenze $\omega - x$, wie einleitend bemerkt, ∞ setzen.

Die mittlere Lebensdauer wurde von ältern Autoren [1]) oft mit der *wahrscheinlichen* Lebensdauer verwechselt. Letztere gibt diejenige Anzahl $W(x)$ von Jahren an, nach welcher die Zahl der heute x-jährigen auf die Hälfte reduziert wird. Die Wahrscheinlichkeiten für einen x-jährigen, das Alter $x + W(x)$ zu erleben oder früher zu sterben, sind gleich gross. Diese wahrscheinliche Lebensdauer wird durch folgende Gleichung definiert:

$$\frac{1}{2}\,l(x) = l\big(x + W(x)\big) \quad \text{oder} \quad {}_{W(x)}p(x) = \frac{1}{2}$$

also

---

[1]) Vgl. Daniel Bernoulli, Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année 1760.

$$e^{-\int\limits_0^{W(x)}\mu(x+\tau)d\tau} = \frac{1}{2} \text{ oder } \int\limits_0^{W(x)} \mu(x+\tau)\, d\tau = \text{Log } 2 \text{ [1]}$$

Die Verwechslung dieser zwei verschiedenen biometrischen Funktionen kann man durch das damalige Vorherrschen der Moivreschen Hypothese erklären, nach welcher die mittlere und die wahrscheinliche Lebensdauer für alle Alter einander gleich sind.

Ist nämlich $l(x) = k(\omega - x)$

so wird

$$\overset{\circ}{e}(x) = \frac{1}{l(x)}\int\limits_0^{\omega-x} l(x+t)\, dt = \frac{1}{k(\omega-x)}\int\limits_0^{\omega-x} k(\omega-x-t)\, dt = \frac{\omega-x}{2}$$

---

[1]) Die von Czuber (l. c. p. 247 und 248) für $\overset{\circ}{e}_x(x)$ und $W(x)$ angegebenen Definitionsgleichungen

$$\int\limits_x^{x+W(x)} \varphi(x)\, dx = \int\limits_{x+W(x)}^{\omega} \varphi(x)\, dx$$

und

$$M(x) = \overset{\circ}{e}(x) = \frac{\int\limits_x^{\omega} x\,\varphi(x)\, dx}{\int\limits_x^{\omega} \varphi(x)\, dx}$$

sind nur dann richtig, wenn $\varphi(x)$ nicht die Sterblichkeitsintensität, sondern die Laplacesche Funktion darstellt.

Auf meine diesbezügliche Anfrage hat Herr Professor Dr. E. Czuber die Freundlichkeit gehabt, mir folgendes mitzuteilen.

„Ihre Bemerkungen zu meinem Berichte vom Jahre 1899 sind zutreffend; ich bin auf das arge Versehen bald nach dem Erscheinen des Buches gekommen; die Bezeichnung ‚Sterbensintensität' ist dort in unrichtigem Sinne gebraucht. Ich hatte keine andere Gelegenheit, den Fehler gutzumachen, als in meinem Lehrbuche der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . ."

und

$$\frac{1}{2}\,k(\omega - x) = k\left(\omega - x - W(x)\right);$$

also auch

$$W(x) = \frac{\omega - x}{2}$$

Dass nur die Moivresche Hypothese diese Eigenschaft besitzt, kann man folgenderweise zeigen [1].

Es sei $y = f(\eta)$ die zur Überlebensordnung $\eta = l(y)$ inverse Funktion. Wir entwickeln $f(\eta)$ in eine Maclaurinsche Reihe:

$$y = f(\eta) = \sum_r A_r \eta^r,$$

wo die Summation sich auf die Zahl r bezieht.

Ersetzt man in (24) t durch $\overline{y - x}$, wo y die neue Integrationsvariable bedeutet, so wird die fernere mittlere Lebensdauer eines x-jährigen ausgedrückt durch:

$$\mathring{e}(x) = \frac{1}{l(x)} \int_x^\omega l(y)\,dy = \frac{1}{\xi} \int_x^\omega \eta\,dy$$

wo $\xi = l(x)$ ist.

Wir haben aber

$$dy = d\,f(\eta) = \sum r\,A_r\,\eta^{r-1}\,d\,\eta$$

und

$$\eta\,dy = \sum r\,A_r\,\eta^r\,d\,\eta$$

[1]) Vgl. Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendungen von J. H. Lambert, III. Teil, S. 502 ff.

Ging die Integrationsvariable y von x bis ω, so geht η entsprechend von ξ bis 0, weil $l(x) = \xi$ und $l(\omega) = 0$ ist.

Es wird also

$$\mathring{e}(x) = \frac{1}{\xi} \int_{\xi}^{0} \sum r\, A_r\, \eta^r\, d\,\eta = \frac{1}{\xi} \left| \sum \frac{r}{r+1} A_r\, \eta^{r+1} \right|_{\eta=\xi}^{\eta=0} =$$

$$= -\frac{1}{\xi} \sum \frac{r}{r+1} A_r\, \xi^{r+1} = -\sum \frac{r}{r+1} A_r\, \xi^r.$$

Anderseits wird die wahrscheinliche Lebensdauer definiert durch

$$l\bigl(x + W(x)\bigr) = \frac{1}{2}\, l(x).$$

Es ist also, nach obigem,

$$x + W(x) = f\left(\frac{\xi}{2}\right) = \sum A_r \left(\frac{\xi}{2}\right)^r,$$

und hieraus die wahrscheinliche Lebensdauer

$$W(x) = \sum A_r \left(\frac{\xi}{2}\right)^r - x = \sum A_r \left(\frac{\xi}{2}\right)^r - \sum A_r\, \xi^r =$$

$$= -\sum A_r\, \xi^r \left(1 - \frac{1}{2^r}\right).$$

Soll nun $\mathring{e}(x)$ für jedes x mit $W(x)$ übereinstimmen, so müssen die Ausdrücke

$$-\sum A_r \frac{r}{r+1}\, \xi^r \quad \text{und} \quad -\sum A_r\, \xi^r \left(1 - \frac{1}{2^r}\right)$$

identisch sein, d. h. die Koeffizienten von gleichen Potenzen müssen einander gleich sein.

Es muss also für jedes r

$$A_r \cdot \frac{r}{r+1} \equiv A_r \cdot \left(1 - \frac{1}{2^r}\right)$$

oder

$$A_r \left\{\frac{r}{r+1} - 1 + \frac{1}{2^r}\right\} = 0$$

$$A_r \left(\frac{1}{2^r} - \frac{1}{r+1}\right) = 0 \qquad \text{sein.}$$

Die Klammergrösse $\frac{1}{2^r} - \frac{1}{r+1}$ kann aber nur für $r = 0$ und $r = 1$ verschwinden; somit müssen für alle andern r die Koeffizienten $A_r = 0$ sein. Soll also $\mathring{e}(x) \equiv W(x)$ sein, so können in der obigen Entwicklung nur die Glieder mit den Exponenten $r = 0$ und $r = 1$ vorkommen. Wir haben dann

$$x = A_0 + A_1 \xi$$

und umgekehrt

$$\xi = l(x) = \frac{1}{A_1}(x - A_0)$$

Die Absterbeordnung muss somit, wie behauptet, eine lineare Funktion des Alters sein [1].

---

[1]) *Gruder* in seinem Gutachten: „Die mittlere Lebensdauer auf Grund der österreichisch-ungarischen Sterblichkeitsmessung", vorgelegt dem VII. internationalen Kongress für Versicherungswissenschaft, behauptet, ohne zu beweisen, dass die arithmetische Reihe nur eine ganz spezielle derjenigen Funktionen ist, für welche sich die Gleichheit der mittlern und der wahrscheinlichen Lebensdauer ergibt.

Wird für die Absterbeordnung eine andere Funktion gesetzt, so werden $\overset{\circ}{e}(x)$ und $W(x)$ nicht identisch gleich sein. Z. B. bei Annahme der ersten Formel von Dormoy[1]) mit konstanter Sterblichkeitsintensität μ, wird die mittlere Lebensdauer:

$$\overset{\circ}{e}(x) = \int_0^\infty e^{-\int_0^t \mu d\tau} dt = \int_0^\infty e^{-\mu t} dt = \frac{1}{\mu};$$

sie ist somit konstant und der Lebenskraft gleich.

Die wahrscheinliche Lebensdauer wird gegeben durch die Gleichung:

$$e^{-\int_0^{W(x)} \mu dt} = \frac{1}{2};$$

daher

$$e^{-\mu W(x)} = \frac{1}{2}$$

und

$$W(x) = \frac{1}{\mu} \log 2.$$

Sie ist also auch konstant und kleiner als $\overset{\circ}{e}(x)$.

Bei den komplizierteren Absterbeordnungen kann die Differenz $\overset{\circ}{e}(x) - W(x)$ sowohl positiv als auch negativ sein. W. Karup bemerkt in seinem Werke „Handbuch der Lebensversicherung", dass die wahrscheinliche Lebensdauer fast durchgängig grösser in der ersten Hälfte des Lebens, dagegen kleiner in den spätern Jahren ist; so ist z. B. nach der Tafel A. F.

---

[1]) Dormoy, Théorie mathématique des assurances sur la vie, Paris 1878.

x	$\overset{\circ}{e}(x)$	$W(x)$	*Differenz*
0	52,0187	60,0880	negativ
1	52,9434	60,1975	"
2	53,4257	59,9870	"
3	53,5528	59,5476	"
50	19,6593	19,9029	"
51	18,9784	19,1432	"
52	18,3059	18,3932	"
53	17,6424	17,6548	"
54	16,9882	16,9286	positiv
55	16,3440	16,2137	"
56	15,7101	15,5155	"
97	1,36754	0,9791	"
98	1,27286	0,9234	"

Die mittlere Lebensdauer für ein gegebenes Alter x ist nur vom Verlaufe der Sterblichkeitsintensität abhängig; in Mortalitätstafeln mit durchweg grösserer Sterblichkeitsintensität wird die mittlere Lebensdauer kleiner. Bei einer gegebenen Absterbeordnung ist die mittlere Lebensdauer vom Alter abhängig. Um diese Abhängigkeit zu untersuchen, bilden wir $\frac{d}{dx}\overset{\circ}{e}(x)$.

Es ist

$$\frac{d}{dx}\overset{\circ}{e}(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty e^{-\int_0^t \mu(x+\tau)d\tau} dt =$$

$$= -\int_0^\infty \left\{ e^{-\int_0^t \mu(x+\tau)d\tau} \int_0^t d\mu(x+\tau)\right\} dt =$$

$$= -\int_0^\infty e^{-\int_0^t \mu(x+\tau)\,d\tau} \left(\mu(x+t) - \mu(x)\right) dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\int_0^t \mu(x+\tau)\,d\tau} \left(\mu(x) - \mu(x+t)\right) dt$$

Wäre die Sterblichkeitsintensität eine stets monoton wachsende Funktion des Alters x, so wäre die Differenz $\mu(x) - \mu(x+t)$ und somit auch der letzte Ausdruck stets negativ. Dies ist aber nicht im ganzen Verlaufe der Lebensdauer der Fall. Ist $x > \varepsilon$, so ist + allgemein! tatsächlich $\mu(x) - \mu(x+t)$ stets negativ; es nimmt somit für $x > \varepsilon$ die mittlere Lebensdauer mit steigendem Alter ab. Ist aber $x < \varepsilon$, so ist die Differenz $\mu(x) - \mu(x+t)$ für ein bestimmtes Intervall positiv, und somit kann der Differentialquotient $\frac{d}{dx}\mathring{e}(x)$ positiv sein, d. h. die mittlere Lebensdauer kann mit wachsendem Alter zunehmen.

Aus dem letzten Ausdrucke folgt:

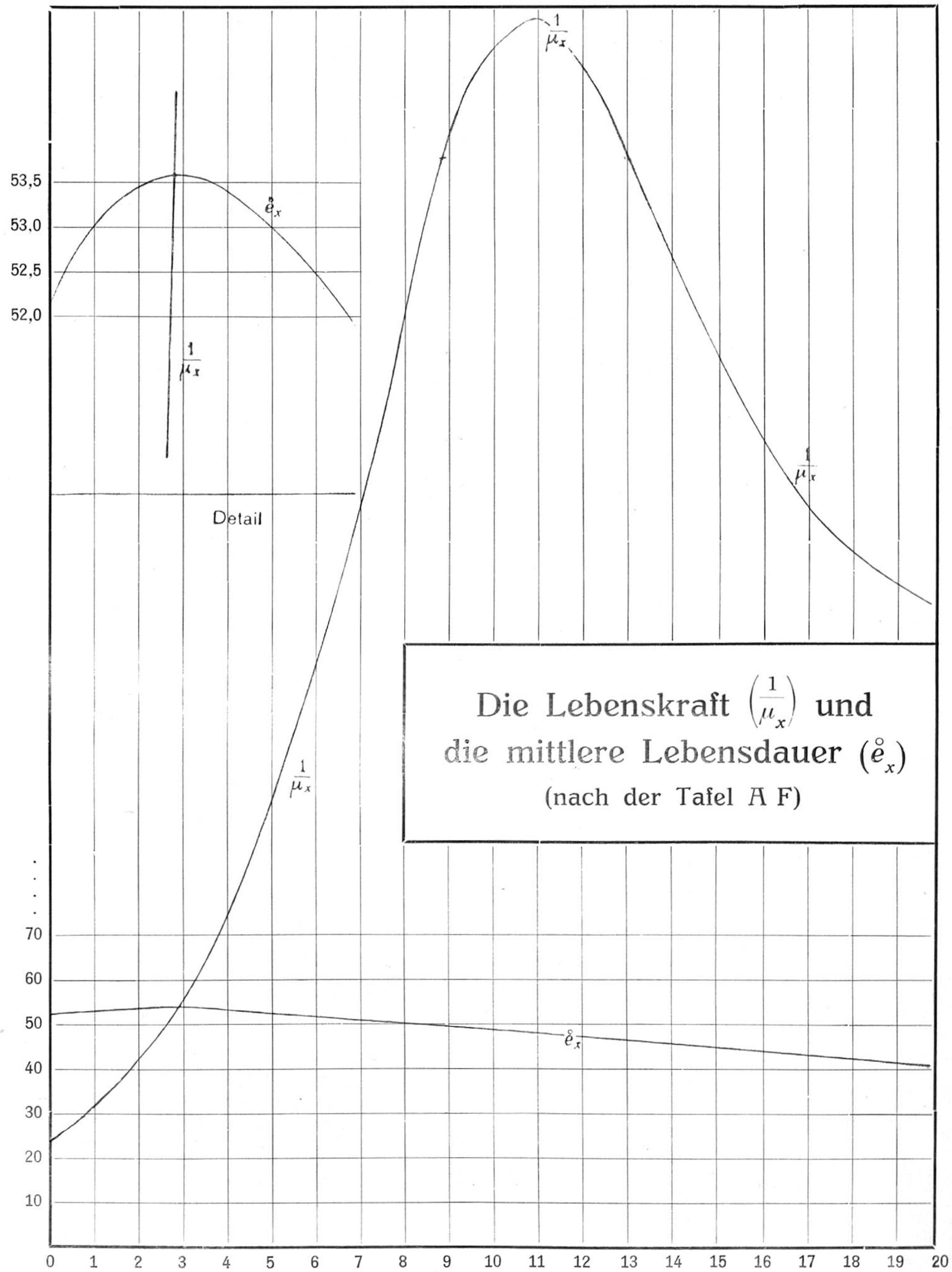
$$\frac{d}{dx}\mathring{e}(x) = \mu(x)\int_0^\infty e^{-\int_0^t \mu(x+\tau)\,d\tau} dt - \int_0^\infty \mu(x+t)\, e^{-\int_0^t \mu(x+\tau)\,d\tau} dt =$$

$$= \mu(x)\,\mathring{e}(x) - 1 = \mu(x)\left(\mathring{e}(x) - \frac{1}{\mu(x)}\right).$$

Hieraus ist folgendes ersichtlich: Die mittlere Lebensdauer nimmt zu, wenn sie grösser ist als die Lebenskraft des entsprechenden Alters, und sie nimmt ab, wenn sie kleiner ist als $\frac{1}{\mu(x)}$.[1]

$\mathring{e}(x)$ erreicht ihr Maximum für dasjenige Alter, für welches $\mathring{e}(x) = \frac{1}{\mu(x)}$. So ist z. B. in der Tafel A. F.

[1]) Vergleiche Figur.



Die Lebenskraft $\left(\frac{1}{\mu_x}\right)$ und die mittlere Lebensdauer $(\mathring{e}_x)$ (nach der Tafel A F)

x	$\mu(x)$	$\frac{1}{\mu(x)}$	$\mathring{e}(x)$	$\mathring{e}(x)-\frac{1}{\mu(x)}$
1	0,03186	31,387	52,943	positiv
2	0,02415	41,408	53,426	„
3	0,01821	54,915	53,553	negativ
4	0,01370	72,993	53,401	„

Das Maximum der mittlern Lebensdauer findet also hier zwischen den Altern $x = 2$ und $x = 3$ statt.

Ebenso wie die mittlere Lebensdauer ist auch die wahrscheinliche Lebensdauer vom Alter abhängig. Um diese Abhängigkeit zu untersuchen, bilden wir aus der Definitionsgleichung

$$e^{-\int\limits_0^{W(x)} \mu(x+\tau)d\tau} = \frac{1}{2}$$

den Ausdruck

$$\frac{d\,W(x)}{dx}.$$

Es ist

$$-e^{-\int\limits_0^{W(x)} \mu(x+\tau)d\tau} \mu\bigl(x+W(x)\bigr)\cdot\frac{d\,W(x)}{dx} -$$

$$-e^{-\int\limits_0^{W(x)} \mu(x+\tau)d\tau} \int\limits_0^{W(x)} d\,\mu(x+\tau) = 0$$

$$e^{-\int\limits_0^{W(x)} \mu(x+\tau)d\tau} \Bigl\{\mu\bigl(x+W(x)\bigr)\cdot\frac{d\,W(x)}{dx} +$$

$$+\mu\bigl(x+W(x)\bigr)-\mu(x)\Bigr\} = 0$$

oder

$$\mu\bigl(x+W(x)\bigr)\frac{d\,W(x)}{dx} + \mu\bigl(x+W(x)-\mu(x)\bigr) = 0$$

Daraus folgt

$$\frac{d\,W(x)}{dx} = \frac{\mu(x) - \mu\big(x + W(x)\big)}{\mu\big(x + W(x)\big)}$$

Wäre die Sterblichkeitsintensität monoton wachsend, so wäre die Differenz $\mu(x) - \mu\big(x + W(x)\big)$ stets negativ und somit auch

$$\frac{d\,W(x)}{dx} < 0$$

Dies trifft für $x > \varepsilon$ zu. Ist also $x > \varepsilon$, so nimmt die wahrscheinliche Lebensdauer mit wachsendem Alter ab. Ist dagegen $x < \varepsilon$, so *kann* die Differenz $\mu(x) - \mu\big(x + W(x)\big)$ positiv werden; die wahrscheinliche Lebensdauer kann also mit wachsendem Alter auch zunehmen.

Sie erreicht ihr Maximum, wenn

$$\mu(x) = \mu\big(x + W(x)\big) \quad \text{ist.}$$

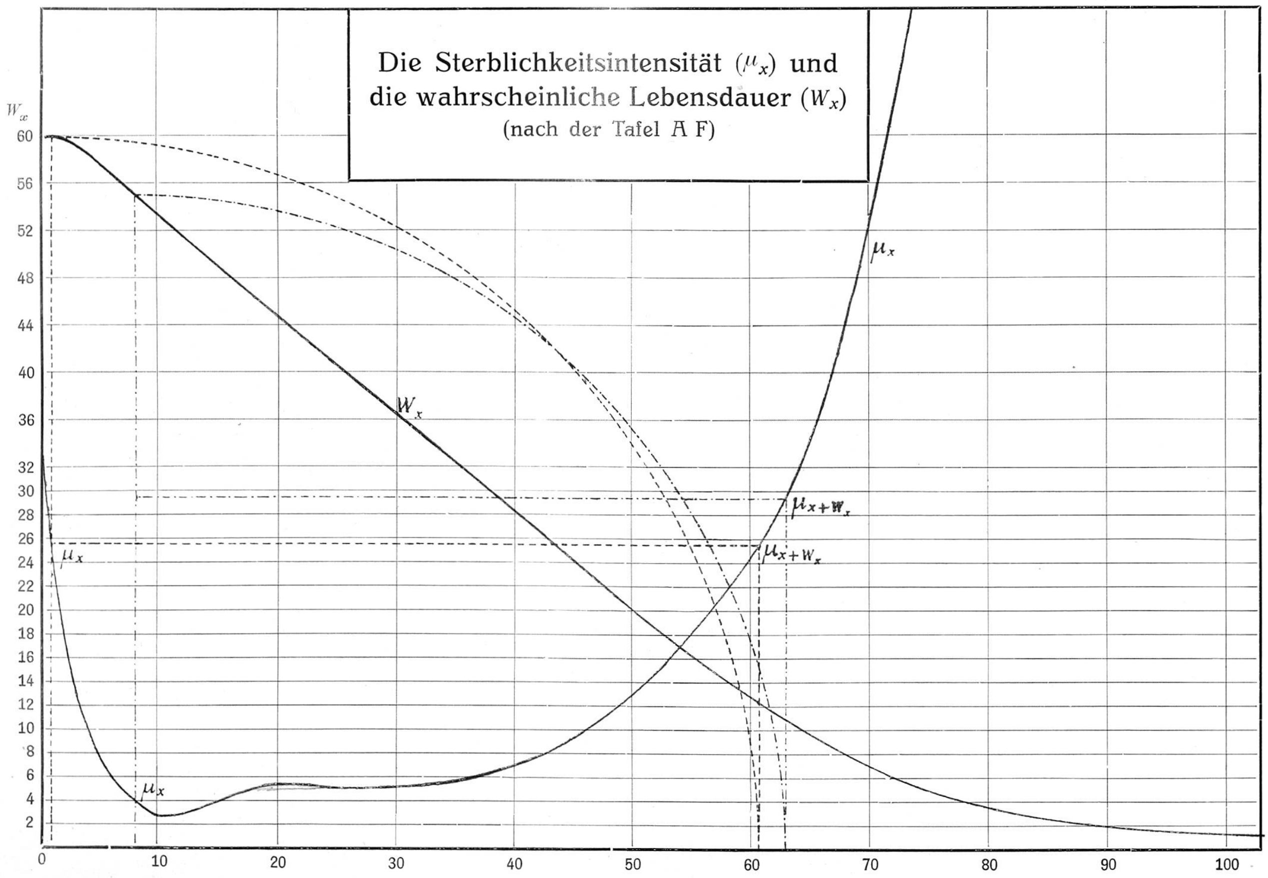
So ist z. B. in der Tafel A. F.:

x	$W(x)$	$\mu(x)$	$\mu\big(x + W(x)\big)$	Diff. $\mu(x) - \mu\big(x + W(x)\big)$
0	60,0880	0,04181	0,03168	positiv
1	60,1975	0,03186	0,03442	negativ
2	59,9870	0,02415	0,03650	„

Das Maximum trifft hier also zwischen $x = 0$ und $x = 1$ ein [1]).

Das Alter $x + \overset{\circ}{e}(x)$ können wir als das „mittlere Todesalter“ des heute x-jährigen bezeichnen. Es folgt aus

[1]) Vergleiche Figur.



Die Sterblichkeitsintensität (μ_x) und
die wahrscheinliche Lebensdauer (W_x)
(nach der Tafel A F)
W_x
60
56
52
48
44
40
36
32
30
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
W_x
μ_x
μ_x
μ_x
μ_{x+W_x}
μ_{x+W_x}

$$\frac{d\left(x + \overset{\circ}{e}(x)\right)}{dx} = 1 + \frac{d\,\overset{\circ}{e}(x)}{dx} = \mu(x)\,\overset{\circ}{e}(x)$$

dass dieses Todesalter mit wachsendem Alter zunimmt.

Analog nennen wir $x + W(x)$ das „wahrscheinliche Todesalter". Aus

$$\frac{d\left(x + W(x)\right)}{dx} = 1 + \frac{d\,W(x)}{dx} = 1 +$$

$$+ \frac{\mu(x) - \mu\left(x + W(x)\right)}{\mu\left(x + W(x)\right)} = \frac{\mu(x)}{\mu\left(x + W(x)\right)}$$

folgt ebenso, dass das wahrscheinliche Todesalter mit wachsendem Alter zunimmt.

Wie wir gesehen haben, hat $\overset{\circ}{e}(x)$, als Funktion des Alters betrachtet, ein Maximum. Die Kurve der mittlern Lebensdauer ist also in diesem Punkte zur Altersachse konkav. Im Greisenalter nähert sie sich asymptotisch der x-Achse; sie muss also nach dem Maximum eine ungerade Anzahl von Wendepunkten haben. Um diese Wendepunkte analytisch zu finden, bilden wir den zweiten Differentialquotienten von $\overset{\circ}{e}(x)$ nach x genommen.

Es ist:

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\overset{\circ}{e}(x) = \frac{d}{dx}\left(\mu(x)\,\overset{\circ}{e}(x) - 1\right) = \mu(x)\left(\mu(x)\,\overset{\circ}{e}(x) - 1\right) +$$

$$+ \overset{\circ}{e}(x)\,\frac{d\,\mu(x)}{dx} = \overset{\circ}{e}(x)\left\{\mu^2(x) + \frac{d\,\mu(x)}{dx}\right\} - \mu(x).$$

Im Punkt $x = \varepsilon$ wird

$$\frac{d\,\mu(x)}{dx} = 0.$$

Wir haben also

$$\frac{d^2}{dx^2}\overset{\circ}{e}(\varepsilon) = \overset{\circ}{e}(\varepsilon)\,\mu^2(\varepsilon) - \mu(\varepsilon) = \mu(\varepsilon)\left\{\overset{\circ}{e}(\varepsilon)\,\mu(\varepsilon) - 1\right\}$$

Es ist aber

$$\overset{\circ}{e}(\varepsilon)\,\mu(\varepsilon) - 1 = \frac{d\,\overset{\circ}{e}(\varepsilon)}{dx} < 0$$

und somit

$$\frac{d^2}{dx^2}\overset{\circ}{e}(\varepsilon) < 0$$

d. h. die Kurve der Funktion $\overset{\circ}{e}(x)$ ist im Punkte $x = \varepsilon$ zur x-Achse konkav.

Man hat anderseits:

$$\frac{d^2}{dx^2}\overset{\circ}{e}(x) = \mu(x)\,\overset{\circ}{e}(x)\left\{\mu(x) + \frac{1}{\mu(x)}\cdot\frac{d\,\mu(x)}{dx} - \frac{1}{\overset{\circ}{e}(x)}\right\};$$

soll also $\overset{\circ}{e}(x)$ einen Wendepunkt besitzen, so muss

$$\mu(x) + \frac{1}{\mu(x)}\cdot\frac{d\,\mu(x)}{dx} - \frac{1}{\overset{\circ}{e}(x)} = 0 \quad \text{sein.}$$

Es ist aber $-\frac{1}{\mu(x)}\cdot\frac{d\,\mu(x)}{dx} = \mu_2(x)$ die zweite Intensitätsfunktion.

Die Bedingungsgleichung lautet also

$$\mu_1(x) - \mu_2(x) = \frac{1}{\overset{\circ}{e}(x)}$$

Da $\overset{\circ}{e}(x)$ bei komplizierten Absterbeordnungen sich nicht durch eine endliche Anzahl von elementaren Funktionen ausdrücken lässt [1]), so kann man obige

---

[1]) Bei Anwendung der Makehamschen Funktion wird $\overset{\circ}{e}(x)$ durch eine unvollständige Gammafunktion dargestellt.

Gleichung nach x nicht auflösen. Sind aber die Werte der mittlern Lebensdauer auf irgendeine Art näherungsweise gefunden, so kann durch Vergleichung der Zahlenwerte

$$\mu_1(x) - \mu_2(x) \text{ und } \frac{1}{\overset{\circ}{e}(x)}$$

nachgeprüft werden, wo die Kurve der mittlern Lebensdauer konkav bzw. konvex verläuft und ob sie einen Wendepunkt beim gegebenen Alter besitzt.