Über die Berechnung des Reduktionsfaktors in der Krankenversicherung

Über die Berechnung des Reduktionsfaktors in der Krankenversicherung.

Von Dr. **A. Kienast** (Küsnacht).

Bezeichnet $\lambda(x)$ die Zahl der Kranken im Alter x, dann ist der Reduktionsfaktor $R(t)$ der Krankenversicherung ausgedrückt durch

$$R(t) = \int_0^t \lambda(x)\,dx \Big/ \int_0^1 \lambda(x)\,dx.$$

Prof. Dr. Ch. Moser [1]) zeigte, dass $\lambda(x)$ mit sehr grosser Annäherung dargestellt werden kann durch die Funktion

$$\lambda(x) = k\,s^x\,g^{(c+x)^{-1}},$$

wo k, s, g, c, Konstante sind, die aus 4 Beobachtungen berechnet werden können. Setzt man $s = e^{-a}$, $g = e^b$, und nennt $\int_0^1 \lambda(x)\,dx = C^{-1}$, so erhält man

$$R(t) = Ck \int_0^t e^{-ax+b(c+x)^{-1}}\,dx. \tag{1}$$

Dr. Böschenstein [2]) hat dieses Integral in eine Reihe entwickelt unter Verwendung der bekannten

---

[1]) Communication touchant une table de morbidité; Rapports présentés au 3e Congrès international d'actuaires, Paris 1900, und séance 29 juin 1900; pages 662 et 1054.

[2]) K. Böschenstein, Der Reduktionsfaktor etc.; diese Mitteilungen, Heft 2, 1907.

Darstellung [1]) von $e^{\frac{xi}{2}(z+z^{-1})}$ durch eine Laurentsche Reihe. Aber die Berechnung von $R(t)$ durch diese Reihe ist, wie auch Prof. Riethmann [2]) bemerkt, sehr mühsam. Man kann $R(t)$ noch in anderer Weise durch eine Reihe darstellen, die für numerische Rechnungen weniger Arbeit verursacht.

Differentiation von (1) ergibt, dass $R(t)$ eine Lösung des Systems von Differentialgleichungen ist

$$(2) \qquad \frac{dR}{dt} = S, \quad \frac{dS}{dt} = -\left[a + b(c+t)^{-2}\right] S.$$

Jede Lösung dieses Systems ist analytische Funktion von t, a, b, c, regulär in der Umgebung jeder Stelle

$$t = t_0, \quad a = a_0, \quad b = b_0, \quad c = c_0,$$

in deren Umgebung die rechten Seiten von (2) sich regulär verhalten [3]). Dies trifft zu für jedes endliche a und b und jeden von Null verschiedenen Wert von $c + t$. Somit ist $R(t)$ eine ganze transzendente Funktion von a für jedes endliche b und jeden von Null verschiedenen Wert von $c + t$. Unter dieser Bedingung lässt sich daher $R(t)$ in eine beständig konvergierende Potenzreihe von a entwickeln. Sie ist in den numerischen Beispielen der Herren Böschenstein und Riethmann erfüllt; denn dort ist c positiv und $0 \leqq t \leqq 1$.

Setzt man $Cke^{ac} = D$ und verwendet die Lagrangesche Form des Restgliedes in der Reihe für $e^{-a(c+x)}$, so folgt:

---

[1]) Vgl. Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen, S. 65.

[2]) Siehe diese Mitteilungen, Heft 15 (1920), S. 77.

[3]) Satz von Poincaré; vgl. Picard, Traité d'Analyse, vol. III, chap. VIII.

$$R(t) = D \int_0^t e^{b(c+x)^{-1}} d(c+x) \left\{ \sum_0^{n-1} \frac{1}{\varkappa!} (-a)^\varkappa (c+x)^\varkappa + \right.$$

$$\left. e^{-a(c+\xi)} \frac{1}{n!} (-a)^n (c+x)^n \right\}; \ o < \xi < 1,$$

woraus (3)

$$R(t) = b D \sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{(ab)^\lambda}{\lambda!} \int_0^t e^{b(c+x)^{-1}} \left(-\frac{c+x}{b}\right)^\lambda d\left(\frac{c+x}{b}\right) + R_n(t)$$

$$R_n(t) = -C \cdot k\, b\, e^{-a\xi} \frac{(-ab)^n}{n!} \int_{bc^{-1}}^{b(c+t)^{-1}} e^z z^{-n-2}\, dz$$

$$|R_n| < C k b \cdot e^{-a\xi} \frac{(ab)^n}{n!} e^{bc^{-1}} \int_{bc^{-1}}^{b(c+t)^{-1}} z^{-n-2} dz$$

wobei b, c, t positiv gedacht sind. Ist auch a positiv, so ist $e^{-a\xi} < 1$.

$$|R_n| < C k b\, e^{bc^{-1}} \frac{a^n}{(n+1)!} \left[(c+t)^{n+1} - c^{n+1}\right]. \quad (4)$$

Mit Hilfe dieses Ausdruckes ist es leicht, von vornherein abzuschätzen, wie viele Glieder der Reihe (3) benötigt werden. Man kann (4) noch eine andere Form geben. Sei

$$T = \frac{(ab)^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^t e^{b(c+x)^{-1}} \left(-\frac{c+x}{b}\right)^{n-1} d\left(\frac{c+x}{b}\right)$$

das letzte in der Reihe (3) benutzte Glied; dann ist

$$R_n = Ckbe^{-a\xi} \frac{ab}{n} T,$$

also
$$|R_n| < Ck \frac{ab^2}{n} |T|.$$

Die Koeffizienten der Reihe (3) sind

(5)
$$C_\lambda(t) = \int\limits_{-bc^{-1}}^{-b(c+t)^{-1}} e^{-z} z^{-\lambda-2} \, dz.$$

Führt man die Funktion [1]) ein

(6)
$$Q(x, n) = \int\limits_x^\infty e^{-z} z^{n-1} \, dz,$$

so ist

$$C_\lambda(t) = Q[-bc^{-1}, -(\lambda+1)] - Q[-b(c+t)^{-1}, -(\lambda+1)].$$

Man kennt [1]) für die unvollständige Gammafunktion $Q(x, n)$ die Potenzreihenentwicklungen und asymptotische Reihen. Es ist jedoch hier einfacher die C_λ durch Rekursionsformeln zu berechnen. Führt man rechts in (6) eine partielle Integration aus, so gelangt man von der entstehenden Formel aus leicht zu der linearen Differenzengleichung

(7)
$$x(\lambda+1) Q[x, -(\lambda+1)] + (x-\lambda) Q[x, -\lambda] - Q[x, -(\lambda-1)] = 0,$$

---

[1]) Vgl. Nielsen, Integrallogarithmus.
A. Kienast, Denkschriften der Schweiz. Naturf. Gesell., Bd. 57, Abh. 2 (1921), § 11.

der $Q(x, n)$ genügt. Man braucht hier $Q(x, -\lambda)$ für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ Diese können mittels (7) berechnet werden, wenn man

$$Q(x, 0) = \int_x^\infty e^{-u} u^{-1}\, du \quad \text{(Integrallogarithmus)}$$

und

$$Q(x, -1) = \int_x^\infty e^{-u} u^{-1}\, du = x^{-1} e^{-x} - Q(x, 0)$$

kennt, wobei $Q(x, -1)$ aus $Q(x, 0)$ und bekannten Funktionen gebildet ist. Die Berechnung der C_λ ist hiernach in ziemlich einfacher Weise ausführbar, wenn man die Werte des Integrallogarithmus als bekannt ansehen kann. Es gibt verschiedene Tafeln [1]) dieser Funktion; die Ausführung der Interpolation, die bei der Entnahme eines Funktionswertes notwendig ist, scheint gegenwärtig noch der mühsamste Teil der ganzen Berechnung zu sein.

Als endgültige Formel ist damit erreicht

$$R(t) = b\,C\,k\,e^{ac} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{(\mathrm{ab})^\lambda}{\lambda!} \left\{ Q\left[-\frac{b}{c}, -(\lambda+1)\right] - Q\left[-\frac{b}{c+t}, -(\lambda+1)\right] \right\} + R_n(t). \tag{8}$$

Für den Betrieb einer Krankenkasse ist die Zeit von dem Moment der Eröffnung bis zum erstmaligen Ablauf der maximalen Unterstützungszeit eine Über-

1) J. W. L. Glaisher, Phil. Transactions, vol. 160 (1870).
E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln (Teubner), 1909.

gangsperiode, die ein günstigeres Resultat ergibt, als spätere Zeitintervalle. Prof. Moser hat in seiner Denkschrift [1]) zur Beurteilung dieser Vergünstigung die Grösse $v(\alpha)$ eingeführt, den Quotienten der Gesamtzahl der in die Übergangszeit α fallenden Krankentage, dividiert durch sämtliche zu entschädigende Krankentage, die die während α erfolgenden Erkrankungen mit sich bringen. Prof. Moser gibt die Formel

$$v(\alpha) = \alpha^{-1} \overset{-1}{R(\alpha)} \int_0^\alpha R(t)\, dt. \tag{9}$$

Die in (8) gefundene Reihe kann, unter den hier geltenden Voraussetzungen, c positiv, $0 < t < 1$, nach t integriert werden. Daher kann sie zur Berechnung des Zählers von $v(\alpha)$ dienen. Führt man diese Integration im Ausdruck (8) gliedweise aus, so findet man als Koeffizienten von $\frac{(ab)^\lambda}{\lambda!}$

$$\int_0^\alpha C_\lambda(t)\, dt = \int_0^\alpha dt \left\{ \int_{-bc^{-1}}^{-b(c+t)^{-1}} e^{-z} z^{-\lambda-2}\, dz \right\},$$

woraus durch partielle Integration folgt

$$= \Big| t\, C_\lambda(t) \Big|_0^\alpha - \int_0^\alpha t\, e^{b(c+t)^{-1}} \left(-\frac{b}{c+t}\right)^{-\lambda-2} d\left(-\frac{b}{c+t}\right).$$

Fügt man hier hinzu

$$0 = c\, C_\lambda(\alpha) - \int^\alpha c\, e^{b(c+t)^{-1}} \left(-\frac{b}{c+t}\right)^{-\lambda-2} d\left(-\frac{b}{c+t}\right)$$

[1]) Denkschrift über die Höhe der finanziellen Belastung, welche den nach dem Entwurfe zu einem Bundesgesetze betreffend die Krankenversicherung einzurichtenden Krankenkassen voraussichtlich erwachsen wird. II. Aufl. 1895. Zweiter Teil, Abschnitt VI.

und fasst die beiden Integrale zusammen zu

$$-b\int_0^a e^{b(c+t)^{-1}}\left(-\frac{b}{c+t}\right)^{-\lambda-3} d\left(-\frac{b}{c+t}\right) = -b\,C_{\lambda+1}(a),$$

so folgt endlich

$$\int_0^a C_\lambda(t)\,dt = (a+c)\,C_\lambda(a) - b\,C_{\lambda+1}(a).$$

Zusammengenommen erhält man

$$v_0(a) = 1 + \frac{c}{a} - \tag{10}$$

$$\frac{b}{a}\,\frac{\displaystyle\sum_0^{n-1}\frac{(ab)^\lambda}{\lambda!}\left\{Q[-bc^{-1},\,-(\lambda+2)] - Q[-b(c+a)^{-1},\,-(\lambda+2)]\right\}}{\displaystyle\sum_0^{n-1}\frac{(ab)^\lambda}{\lambda!}\left\{Q[-bc^{-1},\,-(\lambda+1)] - Q[-b(c+a)^{-1},\,-(\lambda+1)]\right\}}$$

und

$$v(a) = v_0(a)\,[1 - R^{-1}(a)\,R_n(a)] + a^{-1}R^{-1}(a)\int_0^a R_n(t)\,dt.$$

$v_0(a)$ ist derjenige Näherungswert für $v(a)$, der entsteht, wenn von den Reihen in Zähler und Nenner nur die n ersten Glieder zur Berechnung benutzt werden. Kennt man $R(t)$ und den Rest $R_n(t)$ in (8), so kann man leicht den Fehler abschätzen, der $v_0(a)$ anhaftet.

Jede einzelne Q-Funktion in (10) wird auch hier durch die oben angegebene Rekursionsformel berechnet, und erst aus diesen werden die Koeffizienten von $(ab)^\lambda$ zusammengesetzt.

In dem von Dr. Böschenstein, S. 233 f., berechneten Zahlenbeispiel erhalte ich für $t = 0{,}153323$ Jahr

$$|R_4| < 0{,}0001,$$

so dass die Glieder bis inklusive $(ab)^3$ für $R(t)$ schon eine genügende Genauigkeit ergeben.