Über die Konstruktion einer Standardabsterbeordnung

Über die Konstruktion einer Standardabsterbeordnung.

Von Dr. **Walter Saxer,** Bern.

In den folgenden Betrachtungen wird unter einem vollständigen System von Leibrenten die sämtlichen aus derselben Absterbeordnung ableitbaren Werte der kontinuierlichen Leibrenten auf ein Leben, also die 2 dimensionale Gesamtheit der Werte für die verschiedenen möglichen Verzinsungen und Alter verstanden. Die Herren Blaschke [1]) und Gram [2]) haben unabhängig voneinander gezeigt, dass diejenigen Systeme, welche zu Gompertz-Makehamschen Absterbeordnungen gehören, in einfacher Weise gegenseitig verknüpft sind. Von den genannten Autoren wurde bewiesen, dass für zwei Systeme, denen zwei verschiedene Gompertz-Makehamsche Absterbeordnungen zugrunde liegen, entsprechende Leibrentenwerte in beiden Systemen in dem Sinne existieren, dass ihr Verhältnis eine Konstante ist.

[1]) E. Blaschke: Die Todesursache bei österreichischen Versicherten nach fünfjährigen Geschäftsperioden im Zeitraum 1876 bis 1900, Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen, Bd. IX, speziell S. 33.

E. Blaschke: Über eine Anwendung des Sterbegesetzes Gompertz-Makeham, Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen, Bd. I, S. 3—14.

[2]) Gram, Aktuaren 1. Heft. S. 57 ff. Kopenhagen 1904.

Zudem sind die Alter und Verzinsungsintensitäten, die zu zwei solchen entsprechenden Leibrentenwerten gehören, durch lineare Gleichungen miteinander verbunden.

Präzise ausgedrückt: Wir bezeichnen das erste System mit (I). x bedeute das Alter und δ_1 die Verzinsungsintensität. Die diesem System zugrundegelegte Gompertz-Makehamsche Absterbeordnung sei durch folgende Gleichung definiert:

(1a) $$l(x) = s_1^x \, g_1^{q_1^x}$$

Dann erhält man für die Sterblichkeitsintensität

(2a) $$\mu_1(x) = -(\log s_1 + q_1^x \log q_1 \log g_1)$$

und für den kontinuierlichen Leibrentenbarwert

(3a) $$\overline{a}_1(x) = \int_0^\infty e^{-\int_0^t (\mu_1(x+\tau)+\delta_1)d\tau} dt$$

d.h. habe dieselbe [illegible]-Tafel,

oder eine dieser Gleichung äquivalente Beziehung

(4a) $$\frac{d\overline{a}_1(x)}{dx} - (\mu_1(x) + \delta_1)\,\overline{a}_1(x) + 1 = 0$$

Entsprechend erhält man für das System (II), sofern man mit y das Alter und mit δ_2 die Verzinsungsintensität bezeichnet, die Gleichungen

(1b) $$l(y) = s_2^y \, g_2^{q_2^y}$$

(2b) $$\mu_2(y) = -(\log s_2 + q_2^y \log q_2 \log g_2)$$

(3b) $$\overline{a}_2(y) = \int_0^\infty e^{-\int_0^t [\mu_2(y+\tau)+\delta_2]d\tau} dt$$

(4b) $$\frac{d\overline{a}_2(y)}{dy} - (\mu_2(y) + \delta_2)\,\overline{a}_2(y) + 1 = 0$$

Der Satz von Blaschke-Gram lautet nun:

Setzt man

$$y = mx + n \tag{5a}$$

$$\delta_2 = \frac{\delta_1}{m} - r \tag{5b}$$

so wird (5c) $\quad \overline{a}_2(y, \delta_2) = m\,\overline{a}_1(x, \delta_1)$

wobei die Konstanten (m, n, r) dieser Transformationen sich mittelst folgender Gleichungen aus den Konstanten der Absterbeordnungen der Systeme (I) und (II) berechnen lassen.

$$m = \frac{\log q_1}{\log q_2} \tag{6a}$$

$$n = \frac{\log\log\frac{1}{g_1} - \log\log\frac{1}{g_2}}{\log q_2} \tag{6b}$$

$$r = \frac{\log q_2}{\log q_1}\log s_1 - \log s_2 \tag{6c}$$

Demnach gehört zu jedem Wertepaar (x, δ_1) des Systemes (I) ein durch Gl. (5a, b) eindeutig bestimmtes korrespondierendes Paar (y, δ_2), für das man sehr leicht mittelst Gl. (5c) seinen zugehörigen Leibrentenbarwert berechnen kann, sofern man denselben für das korrespondierende Paar (x, δ_1) kennt. Kraft dieses Satzes genügt es also, die Leibrentenbarwerte eines Systemes vollständig zu kennen, um diese Werte für ein anderes System ohne weiteres gemäss Gl. (5 u. 6) berechnen zu können, unter der Voraussetzung, dass beiden Systemen je eine Gompertz-Makehamsche Absterbeordnung zugrunde liegt.

Merkwürdigerweise wurde von keinem der beiden Autoren untersucht, ob diese letztere Voraussetzung für die Gültigkeit des Satzes wirklich notwendig sei, was für Beziehungen zwischen den Absterbeordnungen zweier Systeme überhaupt verlangt werden müssen, damit sie in solch einfacher Weise miteinander verknüpft werden können. Diese Frage lässt sich in sehr einfacher Weise erledigen und ihre Lösung soll im folgenden mitgeteilt werden.

Wir setzen voraus, dass für 2 ganz beliebige Systeme Gleichungen (5) gelten sollen, wobei (m, n, r) beliebige, aber feste Konstanten bedeuten. Was für Konsequenzen können wir aus diesen Voraussetzungen für unsere Absterbeordnungen ziehen?

Aus Gleichung (5*a*) und (5*c*) folgt ohne weiteres

$$(7) \qquad \left(\frac{d\overline{a}_2(y)}{dy}\right)_{y=mx+n} = \frac{d\overline{a}_1(x)}{dx}$$

Berücksichtigt man dieses Resultat und ersetzt in Gleichung (4*b*) die Werte $[y, \delta_2, \overline{a}_2(y)]$ gemäss Gleichung (5*a*, *b*, *c*), so erhält man

$$\frac{d\overline{a}_1(x)}{dx} - \left[\mu_2(mx+n) + \frac{\delta_1}{m} - r\right] m\overline{a}_1(x) = 0$$

Subtrahiert man diese Gleichung von Gleichung (4*a*), so ergibt sich

$$(-\mu_1(x) + m\,\mu_2(mx+n) - rm)\,\overline{a}_1(x) = 0$$

oder, weil $\overline{a}_1(x) \not\equiv 0$

$$(8a) \qquad \mu_2(mx+n) = \frac{\mu_1(x)}{m} + r$$

D. h. (8b)
$$\mu_2(x) = \frac{\mu_1\left(\frac{x-n}{m}\right)}{m} + r$$

Gleichung (8b) ist demnach für die Gültigkeit des Satzes von Blaschke-Gram notwendig. Wir behaupten, dass ihre Existenz auch hinreichend ist.

Der Beweis für diese Behauptung lässt sich leicht aus den Ausführungen von Jörgensen [1]) lesen, die er bereits in seinem bekannten Lehrbuch publiziert hat. Man hat in der Tat bloss zu zeigen, dass die Gültigkeit von Gleichung (5c) aus der Gültigkeit der Gleichung (5a, b) und (8a, b) folgt. Zu diesem Zwecke setzt man kraft unserer Voraussetzungen

$$y = mx + n$$

$$\delta_2 = \frac{\delta_1}{m} - r$$

$$\mu_2(mx + n + t) = \frac{\mu_1\left(x + \frac{t}{m}\right)}{m} + r$$

und man erhält laut Gleichung (3b)

$$\bar{a}_2(mx + n) = \int_0^\infty e^{-\int_0^t \frac{\left[\mu_1\left(x+\frac{t}{m}\right)+\delta_1\right]}{m}dt}\, dt$$

Bezeichnet $f('t)$ die Funktion $-(\mu_1(x + t) + \delta_1)$, wobei $f('t)$ die 1. Ableitung der Funktion $f(t)$ bedeuten soll, findet man

[1]) N. R. Jörgensen, Grundzüge einer Theorie der Lebensversicherung, S. 201 ff.

$$\overline{a}_2(mx+n)=\int_o^{\infty} e^{f\left(\frac{t}{m}\right)-f(o)}\,dt = m\int_o^{\infty} e^{f(t)-f(o)}\,dt$$

und laut Gleichung (3*a*)

$$\overline{a}_1(x)=\int_o^{\infty} e^{-\int_o^t [\mu_1(x+t)+\delta_1]dt}\,dt=\int_o^{\infty} e^{f(t)-f(o)}\,dt$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen. Wir können demnach folgenden Satz aussprechen:

Sind zwei Absterbeordnungen derart miteinander verknüpft, dass die Gleichung gilt

(I) $$\mu_2(y)=\mu_2(mx+n)=\frac{\mu_1(x)}{m}+r$$

wobei $(\mu_1(x), \mu_2(y))$ *die Sterblichkeitsintensitätsfunktionen,* (x, y) *die Alter und* (m, n, r) *beliebige Konstanten bedeuten, so gilt*

(II) $$m\,\overline{a}_1(x, \delta_1)=\overline{a}_2(y, \delta_2)$$

wenn man mit (δ_1, δ_2) *die Verzinsungsintensitäten bezeichnet und*

(III) $$y=mx+n$$

$$\delta_2=\frac{\delta_1}{m}-r$$ setzt.

Umgekehrt sind Gleichungen (II) *und* (III) *erfüllt, so folgt daraus notwendigerweise die Gültigkeit von Gleichung* (I).

Wie man nun leicht sieht, brauchen zwei vollständige Systeme von Leibrenten gar nicht auf Grund von Makeham-Gompertzschen Absterbeordnungen konstruiert zu sein, damit sie gemäss Gleichung (II) und (III) miteinander verknüpft sind. Vielmehr zeigt uns Gleichung (I) die Operationen, welche auf die Sterblichkeitsintensitätsfunktion einer beliebigen Absterbeordnung angewendet werden müssen, um aus derselben die Sterblichkeitsintensitätsfunktionen der sämtlichen andern Absterbeordnungen zu erhalten, deren vollständige Systeme von Leibrenten gemäss Gleichung (I) mit dem System der Ausgangsabsterbeordnung verknüpft sind. Diese Operationen bestehen einfach darin, dass zuerst die unabhängige Variable x der Ausgangsabsterbeordnung, das Alter, einer ganzen linearen Funktion unterworfen wird und dann ebenso die Intensitätsfunktion selbst. Zwar muss der Ähnlichkeitsmodul für diese beiden ganzen linearen Transformationen derselbe sein und darf nicht den Wert Null annehmen. Diese Konstruktion hängt von drei Parametern (m, n, r) ab. Man erkennt leicht, dass die Gesamtheit dieser Konstruktionen, welche durch Variation der Parameter entsteht, ohne dass sie den Wert Null annimmt, eine dreidimensionale, kontinuierliche *Gruppe* bildet. Wir können uns ungenau auch kurz so ausdrücken:

Alle Absterbeordnungen, deren zugehörige Systeme gemäss Gleichung (I, II, III) gegenseitig verknüpft sind, bilden eine Gruppe. Eine solche Gruppe ist durch Angabe einer ihrer Sterblichkeitsintensitätsfunktionen eindeutig bestimmt. Jede Sterblichkeitsintensitätsfunktion bildet also einen «Representanten» für ihre Gruppe. Wir wollen uns durch Beispiele verständlich machen.

1. Alle Absterbeordnungen, deren Sterblichkeitsintensitätsfunktionen eine Konstante ist, bilden eine Gruppe in unserm Sinne. Denn es ist ohne weiteres er-

sichtlich, dass irgend zwei Konstante als $\mu_1(x)$ und $\mu_2(y)$ Gleichung (I) genügen.

2. Moivre setzte

$$l(x) = C_1\,(x - w_1)$$

oder

$$\mu(x) = \frac{1}{x - w_1}$$

Wir behaupten: Alle Absterbeordnungen von dieser Form bilden eine Untergruppe von einer Gruppe in unserm Sinn.

Beweis: Es sei $\mu_1(x) = \frac{1}{x - w_1}$ und $\mu_2(y) = \frac{1}{y - w_2}$

Setzt man $y = x + w_2 - w_1$, so ist $\mu_2(y) = \mu_1(x)$

d. h. Gleichung (I) ist wirklich erfüllt. Denn in diesem Fall besitzen unsere Parameter einfach folgende Werte: $m = 1$, $n = w_2 - w_1$, $r = 0$. Man erhält diese Untergruppe, indem man m und r festhält und n variert.

3. Achard [1]) verallgemeinerte die Moivresche Hypothese, indem er setzte

$$l(x) = C\,(x - w)^m$$

Wir wollen m den Grad der verallgemeinerten Moivreschen Absterbeordnung nennen. Dann behaupten wir: Alle Absterbeordnungen von demselben Grade bilden eine Untergruppe von einer Gruppe in unserm Sinn.

Beweis: Es sei $\mu_1(x) = \frac{m}{x - w_1}$

$$\mu_2(y) = \frac{m}{y - w_2}$$

[1]) Achard, Note sur le changement de taux dans le calcul des annuités viagères, Bulletin de l'Institut des Actuaires Français, Tome second (1902), p. 38—42.

Setzt man wie bei Moivre $y = x + w_2 - w_1$, so ergibt sich der Beweis wie vorhin.

4. Wir behaupten: Alle Gompertz-Makehamschen Absterbeordnungen bilden eine Gruppe in unserm Sinn. Der Beweis folgt später.

5. Ebenso kann man die allgemeinen Absterbeordnungen von Quiquet nach Gruppen in unserm Sinn ordnen. Die Gruppen ergeben sich, wenn man die Differentialgleichung berücksichtigt, welche die Sterblichkeitsintensitätsfunktionen von Quiquet befriedigen.

Diese Beispiele dürften genügen, um zu sehen, dass das Ordnungsprinzip nach den Gesetzen von Blaschke-Gram für die Einteilung der Absterbeordnungen ein sehr strenges ist. Eine Gruppe umfasst «wenige» und dafür gegenseitig sehr eng verwandte Absterbeordnungen. Das ist der Grund, dass ihre zugehörigen vollständigen Systeme von Leibrenten so eng miteinander verknüpft sind. Es muss das Ziel unserer Untersuchungen sein, die Gruppen möglichst weit zu gestalten und die Beziehungen solcher «weitern» Gruppen aufzusuchen. Die allgemeinste Aufgabe dieser Art besteht darin, die Absterbeordnungen durch mathematische Eigenschaften so zu charakterisieren, dass man auf Grund dieser Eigenschaften die Beziehungen ihrer Systeme ermitteln kann. Man bemerkt, dass diese Aufgabe das sogenannte Zinsproblem als Spezialfall enthält und in dieser allgemeinen Formulierung wohl kaum lösbar ist. Wohl aber ist es eine schöne Aufgabe, die Gruppen allgemeiner, universeller zu gestalten. Wir hoffen, bei späterer Gelegenheit darauf zurückkommen zu können.

Die Makehamschen Absterbeordnungen als Gruppe.

Weil zwei Systeme, welche auf Grund von Makehamschen Absterbeordnungen berechnet wurden, den Blaschke-Gramschen Bedingungen genügen, müssen die zugehörigen Sterblichkeitsintensitätsfunktionen Gleichung (8) befriedigen. Man kann dies durch eine elementare Rechnung bestätigen, indem man (m, n, r) gemäss Gleichung (6) aus den Konstanten der beiden Absterbeordnungen erhält. Zudem ist diese Beziehung bekannt, siehe Jörgensen S. 202. Wir behaupten nun:

Sofern man aus einer Makehamschen Sterblichkeitsfunktion gemäss Gleichung $(8b)$ eine andere Sterblichkeitsfunktion konstruiert, so muss dieselbe notwendigerweise ebenfalls eine Makehamsche sein.

Umgekehrt, ergibt diese Konstruktion eine Makehamsche Sterblichkeitsintensitätsfunktion, so muss auch die Ausgangsfunktion eine solche sein.

Diese Behauptungen sind mit der bereits aufgestellten Behauptung äquivalent, dass alle Makehamschen Absterbeordnungen in unserm Sinn eine Gruppe bilden. Ihr Beweis ergibt sich einfach aus der Bemerkung, dass man gemäss Gleichung (8) nach Wahl der Grössen (m, n, r) aus einer Makehamschen Intensitätsfunktion eindeutig eine andere Intensitätsfunktion erhält. Indem man nur den Grössen m, n und r eine Form gemäss Gleichung (6) erteilt, in denen q_2, s_2, r_2 zunächst Unbekannte sind, bekommt auch die neue Sterblichkeitsintensitätsfunktion die Makehamsche Form. Nun sind aber Gleichung (6) sowohl in Bezug auf die Grössen $\log q_1$, $\log\log \frac{1}{g_1}$ $\log s_1$ als auch $\log q_2$, $\log\log \frac{1}{g_2}$, $\log s_2$ linearer Natur. Dem setzt man

$$\left.\begin{aligned} \log q_i &= x_i \\ \log\log\frac{1}{g_i} &= y_i \\ \log s_i &= z_i \end{aligned}\right\} i = 1,\ 2$$

so erhält man aus Gleichung (6)

$$9. \qquad \left\{\begin{aligned} x_1 - mx_2 &= 0 \\ y_1 - y_2 - nx_2 &= 0 \\ rx_1 - x_2z_1 + z_2x_1 &= 0 \end{aligned}\right.$$

D.h. sobald die Grössen (x_1, y_1, z_1, m, n, r) gegeben sind, so lassen sich die Grössen (x_2, y_2, z_2) gemäss Gleichung (9) eindeutig bestimmen, indem die Determinante dieses Gleichungssystems den Wert $mx_1 \neq 0$ besitzt. Die Konstanten der neuen Makehamschen Sterblichkeitsintensitätsfunktion und damit sie selbst sind also nach Wahl der Grössen (m, n, r) eindeutig bestimmt.

Ganz analog lässt sich die Umkehrung unserer Behauptung beweisen.

Wie bekannt, hat die Konstante g bei den in der Praxis nach Makeham ausgeglichenen Sterbetafeln immer einen Wert kleiner als 1. Wir können beifügen, dass man bei einer Makehamschen Intensitätsfunktion, welche dieser Bedingung genügt, durch Transformation gemäss Gleichung (8) mittelst reellen (m, n, r) immer wieder eine Makehamsche Funktion bekommt, deren g ebenfalls kleiner als 1 ist. Will man eine Makehamsche Funktion mit einem g grösser als 1 erhalten, so muss die Grösse $n \log s_2$ in der Form $a + \pi i$ gewählt werden, wo i die imaginäre Einheit bedeutet.

Bern, den 28. Dezember 1923.