

**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker  
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of  
Swiss Actuaries

**Band:** 22 (1927)

**Artikel:** Aus der Praxis der Pensionsversicherung

**Autor:** Friedli, Werner

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-550793>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 08.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## B. Wissenschaftliche Mitteilungen.

---

### Aus der Praxis der Pensionsversicherung.

Von Dr. **Werner Friedli**, Bern.

---

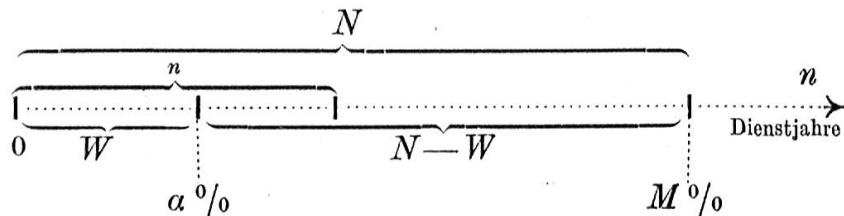
Eine an die Versicherungsmathematiker ziemlich häufig herantretende Frage ist die folgende: Welche *Rentenskala* kann bei der Errichtung einer Pensionskasse oder bei der Reorganisation einer solchen in Aussicht genommen werden, wenn an finanziellen Mitteln ein Fonds  $F$  und eine gleichbleibende Durchschnittsprämie  $P_{\Delta}$  (Gehaltsprozente) zur Verfügung stehen? Dabei nehmen wir an, es handle sich um eine «ausgebaute Kasse», welche neben mit dem Dienstalter steigenden Invalidenpensionen auch Renten an Witwen und Waisen und an altershalber zurücktretende Mitglieder sowie allfällige sonstige Leistungen wie Abfindungen während einer Wartefrist, Sterbegelder u. dgl. gewährt.

Zur Lösung der gestellten Frage wird der einzelne Praktiker nach Wahl geeigneter Rechnungsgrundlagen verschieden vorgehen. Der eine wird vorerst für eine bestimmte Rentenskala die versicherungstechnische Bilanz aufstellen, deren Ergebnis ihm anzeigt, ob die Skala zu hoch oder zu niedrig angesetzt ist; alsdann erfolgt eine passende Änderung der Skala und erneute Prüfung anhand der Bilanz. Ein anderer Experte wird mit Durchschnittszahlen (mittleres Alter, Dienst- und Eintrittsalter, mittlere Besoldung usw.) operieren und mit einiger Erfahrung leicht die Rentenskala passend festlegen; aber auch in diesem Falle hat eine richtige technische Bilanz, welche erst die Frage endgültig entscheidet, zu folgen.

Zweckmässiger scheint uns ein Verfahren zu sein, bei welchem man vorerst geeignete Grundwerte berechnet, mit deren Hilfe die Frage alsdann eine nahezu eindeutige Antwort findet, wobei Bestimmung der Rentenskala und Aufstellung der Bilanz in *einer* Operation erledigt werden können. Wir wollen sie als «*Grundwert-Methode*» bezeichnen. Um nicht zu viele Formeln aufstellen zu müssen, zeigen wir sie nur am Beispiel der Invalidenpensionen, fügen jedoch ausdrücklich bei, dass sie unverändert gilt, wenn ein ausgebautes Versicherungssystem vorliegt oder wenn für männliche und weibliche Kassenmitglieder etwas abweichende Bestimmungen (anderes Rücktrittsalter u. dgl.) zu Recht bestehen.

**Bezeichnungen**

- $z$  . . . . . Alter des Mitgliedes am Stichtag.
- $n$  . . . . . Dienstalter des Mitgliedes am Stichtag.
- $x = z - n$  Eintrittsalter des Mitgliedes.
- $\omega$  . . . . . statutarisches Rücktrittsalter des Mitgliedes  
(z. B.  $\omega = x + 35$  bzw.  $\omega = 65$ ).
- $B$  . . . . . Versicherte Besoldung des Mitgliedes.
- $\alpha$  . . . . . Anfangssatz der Rentenskala (Minimum)
- $M$  . . . . . Endsatz der Rentenskala (Maximum).
- $W$  . . . . . Wartefrist (von beispielsweise 5 Dienstjahren).
- $N$  . . . . . «Länge» der Skala (von beispielsweise 35 Dienstjahren).



Im weitern bezeichnet  $\beta$  die jährliche, gleichmässige Steigerung des Rentensatzes zwischen Maximum und

Minimum,  $m$  das Verhältnis von Maximum zu Minimum, so dass

$$\beta = \frac{M - \alpha}{N - W} \quad (1)$$

$$m = \frac{M}{\alpha} \quad (2)$$

Unter Verwendung der Kommutationszahlen lässt sich alsdann die Anwartschaft des aktiven Mitgliedes ( $z, n$ ) auf Invalidenrente in der gebräuchlichen Schreibweise wie folgt darstellen:

$$\left. \begin{aligned} \leq W; \frac{B}{100} \bar{A}_{z,n}^{ai} &= \frac{1}{D_z^a} \left\{ \alpha N_{z+W-n}^{ai} + \beta (S_{z+1+W-n}^{ai} - S_{\omega+1}^{ai}) \right\} \frac{B}{100} \\ > W; \frac{B}{100} \bar{A}_{z,n}^{ai} = \\ &= \frac{1}{D_z^a} \left\{ [\alpha + (n - W) \beta] N_z^{ai} + \beta (S_{z+1}^{ai} - S_{\omega+1}^{ai}) \right\} \frac{B}{100} \end{aligned} \right\} (3)$$

Dabei ist der einfacheren Berechnung zuliebe auch schon die Belastung durch die Altersinvalidenrente und Anwartschaft auf Invalidenrente *nach* dem Rücktrittsalter  $\omega$  einkalkuliert. Die Bilanzkomponente für Belastung durch Altersrenten würde also nur noch die Anwartschaft auf Rente an den das Alter  $\omega$  überlebenden Aktiven umfassen.

Im folgenden lassen wir den Index  $ai$  der Einfachheit halber auf der Seite.

Wir führen nun als wichtige Hilfsgrösse ein

$$I = \frac{B}{100} \frac{1}{D_z^a} \quad (4)$$

einen Ausdruck, der vorerst für alle Mitglieder zu berechnen ist. Dann ergibt sich die Gesamtbelastung durch

Anwartschaften der Aktiven auf Invalidenrente aus dem Ansatz:

$$\sum \frac{B}{100} \bar{A}_{z,n} = \alpha \sum N_z \cdot I + \beta \left[ \sum (n-W) N_z \cdot I + \sum (S_{z+1} - S_{\omega+1}) I \right] \quad (5).$$

Für  $n < W$  hat das Glied mit dem Faktor  $(n - W)$  wegzufallen, und es ist in den Kommutationszahlen  $z$  durch  $z + W - n$  zu ersetzen.

Als *Grundwerte* bezeichnen wir die Produkte

$$N_z \cdot I \quad \text{und} \quad (n - W) \cdot N_z \cdot I \quad \text{sowie} \quad (S_{z+1} - S_{\omega+1}) \cdot I,$$

ihre auf alle Mitglieder ausgedehnten Summen als Grundwertsummen. Zur Abkürzung der Rechenarbeit darf bei einem grossen Mitgliederbestand eine Zusammenfassung in Gruppen benachbarter Alters- und Dienstalterskombinationen stattfinden.

Eine zu (5) parallele Formel gilt für die Belastung durch anwartschaftliche Witwenpensionen.

Bei der Ermittlung der *Altersrenten*-Belastung hat man dem statutarischen Rücktrittsalter  $\omega$  Rechnung zu tragen. Alle Mitglieder, deren rechnermässiges Eintrittsalter vor dem Grenzalter

$$x_0 = \omega - N$$

liegt, werden das Maximum der Rente beziehen, so dass für sie

$$\frac{B}{100} A_{z,n}^{aa} = M \cdot \sum N_{\omega}^{aa} \cdot I, \quad x < x_0,$$

für die übrigen ist statt  $M$  die reduzierte Altersrente

$$M - (z - n - x_0) \beta$$

in Anrechnung zu bringen, so dass die Gesamtbelastung durch alle Mitglieder aus der Gleichung folgt:

$$\sum \frac{B}{100} A_{z,n}^{aa} = M \sum N_{\omega}^{aa} \cdot I - \beta \sum_{z-n > x_0} (z-n-x_0) N_{\omega}^{aa} \cdot I \quad (6)$$

Auch hier sind die 2 Grundwertsummen einfach festzustellen. Die erste derselben tritt auch beim *Barwert des Einheitsbeitrages* (1%) wieder auf, nämlich

$$\begin{aligned} E &= \sum \frac{B}{100} \bar{a}_{z|\omega-z|}^{aa} \\ &= \sum N_z^{aa} \cdot I - \sum N_{\omega}^{aa} \cdot I \\ &\quad * \quad * \quad * \end{aligned}$$

In der Anwendung der Grundwertformeln sind nun verschiedene Fälle möglich, von denen wir zwei herausgreifen:

1. Das Maximum der Rentenskala ist vorgeschrieben (z. B. 70 % des versicherten Gehalts). Man bestimme das Minimum und damit den Verlauf der Skala (Fig. 1).

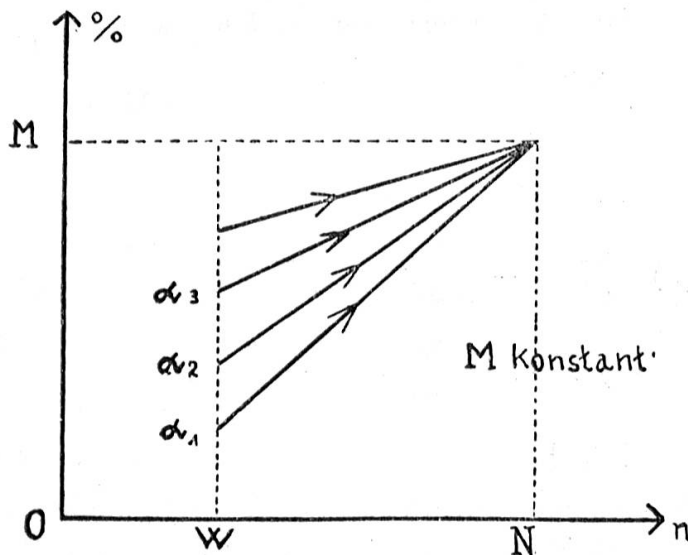


Fig. 1.

2. Sowohl Minimum wie Maximum der Rente sind unbestimmt, es ist lediglich vorgeschrieben, dass das Maximum in einem bestimmten Verhältnis zum Minimum stehe (Fig. 2).

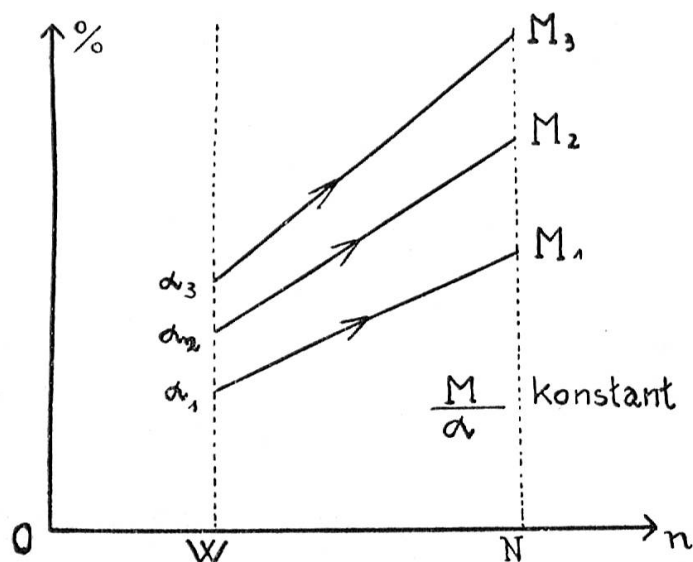


Fig. 2.

Fall 1. Gesucht ist  $a$  (und damit  $\beta$ ), während  $M$  gegeben ist. Aus Gleichung (5) folgt wegen (1):

$$\sum \frac{B}{100} \bar{A}_{z,n} = \frac{1}{N-W} (ac_1 + Mc_2) \quad (8)$$

wobei die Konstanten bedeuten

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= (N-W) \sum N_z \cdot I - \sum (n-W) N_z \cdot I - \sum (S_{z+1} - S_{w+1}) I \\ c_2 &= \sum (n-W) N_z \cdot I + \sum (S_{z+1} - S_{w+1}) \cdot I, \end{aligned} \right\} (9)$$

also auf einfache Weise aus den Grundwertsummen folgen.

Wir nehmen an, wir hätten die zu (8) analogen Formeln für alle Rentenarten (Invaliden, Witwen und Waisen, Altersrentner) aufgestellt. Die Formel für die Total-

belastung durch die (noch unbekannt) Kassenleistungen wird lauten

$$A = \frac{1}{N - W} (\alpha \cdot C_1 + M \cdot C_2), \quad (10)$$

wobei die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  durch Zusammenfassung aus den verschiedenen Komponenten  $c_1$  bzw.  $c_2$  entstanden sind.

Dieser Belastung stehen an Mitteln gegenüber der Fonds  $F$  und der Barwert der Beiträge, vermindert um den Barwert der von der Rentenskala unabhängigen Kassenleistungen  $K$  (Abfindungen, Sterbegelder u. dgl.), so dass die fundamentale Gleichung lautet

$$A = F + P_{\Delta} \cdot E - K$$

oder

$$\alpha C_1 + M C_2 = (N - W) (F + P_{\Delta} \cdot E - K) \quad (11)$$

Aus dieser linearen Gleichung ergibt sich der gesuchte Anfangsrentensatz eindeutig zu:

$$\alpha = \frac{(N - W) (F + P_{\Delta} \cdot E - K) - M C_2}{C_1} \quad (12)$$

Ebenso einfach hätte sich wegen der Symmetrie der Ausdrücke das Rentenmaximum  $M$  aus bestimmt vorgeschriebenem Minimum  $\alpha$  ergeben.

*Fall 2.* Das Verhältnis  $m = \frac{M}{\alpha}$  ist bestimmt gegeben,

während  $\alpha$  (und damit  $M$ ) gesucht ist.

Wegen  $M = \alpha m$  folgt  $\beta = \alpha \frac{m - 1}{N - W}$

und damit

$$\sum \frac{B}{100} \bar{A}_{z, n} = \frac{\alpha}{N - W} c_3 \quad (13)$$



worin die Konstante  $c_3$  bedeutet

$$c_3 = (N-W) \sum N_z \cdot I + (m-1) \left( \sum (n-W) N_z \cdot I + \sum (S_{z+1} - S_{\omega+1}) I \right), \quad (14)$$

also wiederum auf sehr einfache Weise mit den Grundwertsummen zusammenhängt. Wir erkennen dabei, dass die einfachsten Fälle für  $m$  sind

$m = 1$ , wodurch  $c_3 = (N-W) \sum N_z \cdot I$  (Konstante Rente).

$m = 2$ , wodurch  $c_3 =$

$$= (N-W) \sum N_z \cdot I + \sum (n-W) N_z \cdot I + \sum (S_{z+1} - S_{\omega+1}) \cdot I.$$

Wiederum ergibt sich nun eine einfache Formel für die Belastung aus den verschiedenen Rentenarten

$$A = \frac{\alpha}{N-W} C_3 \quad (15)$$

und aus der Gleichung zwischen Leistung und Gegenleistung der gesuchte Rentensatz

$$\alpha = \frac{(N-W) (F + P_\Delta \cdot E - K)}{C_3} \quad (16)$$

Die Lösung für Fall 2 ist wiederum eindeutig und ergibt sich übrigens auch direkt aus Gleichung (11), in welcher  $M = \alpha m$  zu setzen ist:

$$\begin{aligned} \alpha (C_1 + m C_2) &= (N-W) (F + P_\Delta \cdot E - K) \\ \alpha &= \frac{(N-W) \cdot (F + P_\Delta \cdot E - K)}{C_1 + m C_2} \end{aligned} \quad (16a)$$

so dass  $C_3 = C_1 + m C_2$

\* \* \*

Fassen wir die Ergebnisse dieser Untersuchung kurz zusammen: Die Grundwertmethode besteht in der Einführung einer Hilfsgrösse  $I$ , in der Auflösung der Be-

lastungsbarwerte in die einzelnen Glieder durch Bildung der Grundwerte, deren Summen als Koeffizienten in dem die Gesamtbelastung des Mitgliederbestandes darstellenden Ausdruck auftreten. Ihre Verwendung zur Lösung der eingangs gestellten Frage ist zweckmässig, weil das Resultat ein nahezu eindeutiges wird. Wir sagen «nahezu», weil man die gefundenen Werte für  $\alpha$ ,  $M$ ,  $\beta$  passend *aufgerundet* wird. Ein weiterer Vorteil der Grundwertmethode liegt darin, dass auch nach der Aufrundung der Sätze, z. B.  $\alpha \rightarrow \alpha'$ , die Gesamtbelastung sofort bekannt ist, indem rückwärts

$$A' = \frac{\alpha'}{N - W} (C_1 + mC_2)$$

bzw.

$$A' = \frac{1}{N - W} (\alpha' C_1 + M C_2)$$

wobei die Grundwertsummen *unverändert* bleiben. Es kann infolgedessen auch sofort die Bilanz aufgestellt werden, wobei man noch weitere Untersuchungen über allfällige sichere Gewinn- oder Verlustwartungen ohne weiteres zu berücksichtigen in der Lage ist. Ferner ersieht man, dass bei Kenntnis der Grundwertsummen beliebige Variationen der gleichmässig steigenden Rentenskala auf ihre Auswirkung hin geprüft werden können, ohne dass für den ganzen Versicherungsbestand ein einziger Barwert neu zu berechnen ist.

