Tables pour le calcul de la vie mathématique d'emprunts dont les amortissements varient en progression arithmétique de raison égale au premier

Tables pour le calcul de la vie mathématique d'emprunts dont les amortissements varient en progression arithmétique de raison égale au premier.

Par **E. Dasen**, Bâle.

Bien qu'il n'existe pas actuellement sur le marché officiel suisse des emprunts dont les amortissements varient en progression arithmétique de raison égale au premier amortissement, l'élaboration de projets financiers pour l'émission d'emprunts à long terme nécessite quelquefois la considération d'emprunts de ce type. Vu le manque de tables financières donnant les valeurs intrinsèques de ce genre d'obligations, nous avons pensé qu'il y aurait quelque utilité à construire une table permettant de connaître la vie mathématique de ces obligations, étant donné qu'il devient alors facile, avec l'aide d'une table de valeurs intrinsèques pour obligations à échéance fixe, de résoudre rapidement les principaux problèmes techniques que peut poser une question d'émission.

L'exemple numérique suivant fera mieux saisir l'utilité de nos tables.

Exemple: Quel est en % le cours d'émission d'un emprunt du type considéré, dont le taux nominal est 5 % et si le taux effectif doit être 5½ %? On suppose un service semestriel des intérêts et annuel de l'amortissement. La durée de l'emprunt est 23 ans.

Solution.

On obtiendra ce cours en calculant la formule:

$$[A] \quad \frac{i_0}{i}\left[1+\frac{1}{2}(\sqrt{1+i}-1)\right]+\left\{1-\frac{i_0}{i}\left[1+\frac{1}{2}(\sqrt{1+i}-1)\right]\right\}\cdot\frac{(va)_{\overline{n}|}}{\frac{n\,(n+1)}{2}}$$

avec

$$i_0 = 0.05$$
$$i = 0.055$$
$$n = 23$$

$$(va)_{\overline{n}|} = \left(1+\frac{1}{i}\right)a_{\overline{n}|} - \frac{n\,v^n}{i}$$

L'usage de nos tables évitera le calcul de cette expression. Une règle de trois nous donnera le résultat cherché.

En effet, la vie mathématique de l'emprunt considéré est d'après les tables ci-après égale à

14.81 années.

D'autre part, dans une table pour valeurs intrinsèques d'obligations à échéance fixe[1]), intérêts semestriels, on trouve que pour un taux nominal de 5 %, un taux effectif 5½ % et une durée de

1° 15 ans le cours est 95.66 %;

2° 14 ans le cours est 95.86 %.

Une simple interpolation linéaire suffira donc à nous donner le cours cherché, soit 95.70 %. Dans le cas présent, le calcul de l'expression (A) nous conduit à un résultat identique; les différences qui pourraient se produire dans les centièmes n'ont aucune importance, étant donné que les conclusions actuarielles d'un projet

---

[1]) Huss & Hagström: «Bond Values» Stockholm 1929.

financier d'emprunt sont soumises aux modifications nécessitées par la technique bancaire.

D'un autre côté, en mettant en rapport la valeur de la vie mathématique des emprunts de la catégorie envisagée avec celle pour emprunts remboursables par annuités constantes et par amortissements constants (serial loan), ainsi qu'avec la vie mathématique telle qu'on la détermine très souvent dans la pratique bancaire, nous verrons quelle est la remarque que l'on peut tirer de cette comparaison.

Partie technique.

i_0 = taux nominal;

i = taux effectif (capitalisation annuelle);

K_n = valeur actuelle d'un emprunt d'un nominal de 1, dont les amortissements varient en progression arithmétique de raison égale au premier et d'une durée n;

$K^1_{\overline{n|}}$ = valeur actuelle d'un emprunt d'un nominal de 1, remboursable dans n années exactement.

P_k = amortissement effectué à la fin de la k^e période;

I_k = intérêts payés à la fin de la k^e période;

$\sigma_1 = \frac{2}{3} n$;

σ_2 = vie mathématique d'un emprunt dont les amortissements varient en progression arithmétique de raison égale au premier;

σ_3 = vie mathématique d'un emprunt remboursable par annuités constantes;

σ_4 = vie mathématique d'un emprunt dont les amortissements sont constants.

$$K^1_{\overline{n}|} = 1 + (i_0 - i)\, a_{\overline{n}|}$$

(Le service des intérêts est supposé être effectué annuellement en fin de période.)

$$\nu^n = (1+i)^{-n} \qquad a_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{k=n} (1+i)^{-k}$$

Calcul de K_n:

Les principes des mathématiques financières nous permettent d'écrire:

(1) $$K_n = \sum_{k=1}^{k=n} P_k\, \nu^k + \sum_{k=1}^{k=n} I_k\, \nu^k$$

avec:

$$P_k = \frac{2\,k}{n\,(n+1)}$$

$$I_k = i_0 \left[1 - \frac{k\,(k-1)}{n\,(n+1)} \right]$$

Calcul de la valeur actuelle des P_k:

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_k\, \nu^k = \frac{2}{n\,(n+1)} \sum_{k=1}^{k=n} k\, \nu^k$$

Comme:

$$(va)_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{k=n} k\, \nu^k = \left(1 + \frac{1}{i}\right) a_{\overline{n}|} - \frac{n\,\nu^n}{i}$$

nous aurons:

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} P_k \, v^k = \frac{2\,(va)_{\overline{n|}}}{n\,(n+1)}$$

Calcul de la valeur actuelle des I_k:

$$\sum_{k=1}^{k=n} I_k \, v^k = i_0 \sum_{k=1}^{k=n} v^k - \frac{i_0}{n\,(n+1)} \sum_{k=1}^{k=n} k^2 \, v^k + \frac{i_0}{n\,(n+1)} \sum_{k=1}^{k=n} k \, v^k$$

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} I_k \, v^k = i_0 \, a_{\overline{n|}} + \frac{i_0\,(va)_{\overline{n|}}}{n\,(n+1)} - \frac{i_0}{n\,(n+1)} M$$

avec

$$M = \sum_{k=1}^{k=n} k^2 \, v^k$$

Calcul de la somme M:

Pour évaluer cette somme M, nous utiliserons la méthode indiquée par Maingie dans son chapitre sur les rentes variables dans son ouvrage: «La théorie de l'intérêt et ses applications.»

Cet auteur fait remarquer que:

$$\frac{d^m \, a_{\overline{n|}}}{d\,\delta^m} = (-1)^m \sum_{k=1}^{k=n} k^m \, e^{-k\,\delta}$$

Par conséquent en posant $m = 2$, c'est-à-dire en dérivant deux fois l'expression

$$a_{\overline{n|}} = \frac{1 - e^{-n\,\delta}}{e^{\delta} - 1},$$

nous obtiendrons la somme cherchée M. En effectuant ce calcul de dérivation on obtient les deux équations

$$\begin{cases} i \dfrac{d\, a_{\overline{n}|}}{d\,\delta} + (1+i)\, a_{\overline{n}|} = n\, \nu^n \\[2ex] i \dfrac{d^2\, a_{\overline{n}|}}{d\,\delta^2} + 2\,(1+i) \dfrac{d\, a_{\overline{n}|}}{d\,\delta} + (1+i)\, a_{\overline{n}|} = -\, n^2\, \nu^n \end{cases}$$

En éliminant maintenant $\dfrac{d\, a_{\overline{n}|}}{d\,\delta}$ entre ces deux équations et en se rappelant l'expression de $(va)_{\overline{n}|}$, on obtient facilement:

$$\frac{d^2\, a_{\overline{n}|}}{d\,\delta^2} - 2\,\frac{1+i}{i}\,(va)_{\overline{n}|} + \frac{1+i}{i}\, a_{\overline{n}|} = -\,\frac{n^2\, \nu^n}{i}$$

Nous aurons donc:

$$M = 2\left(1 + \frac{1}{i}\right)(va)_{\overline{n}|} - \left(1 + \frac{1}{i}\right) a_{\overline{n}|} - \frac{n^2\, v^n}{i}$$

La formule (3) prend donc la forme suivante:

$$\sum_{k=1}^{k=n} I_k\, \nu^k = i_0\, a_{\overline{n}|} + \frac{i_0}{n\,(n+1)}\,(va)_{\overline{n}|} - \frac{2\, i_0}{n\,(n+1)}\,(va)_{\overline{n}|} - \frac{2\, i_0}{i\, n\,(n+1)}\,(va)_{\overline{n}|}$$

$$+ \frac{i_0}{n\,(n+1)}\, a_{\overline{n}|} + \frac{i_0}{i\, n\,(n+1)}\, a_{\overline{n}|} + \frac{i_0\, n\, \nu^n}{n+1}$$

En simplifiant cette formule on obtient:

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} I_k\, \nu^k = \frac{i_0}{i} - \frac{2\, i_0}{i\, n\,(n+1)}\,(va)_{\overline{n}|}$$

Sur la base des résultats (2) et (4), nous aurons finalement

$$K_n = \frac{i_0}{i} + \frac{2\,(va)_{\overline{n}|}}{n\,(n+1)} - \frac{2\,i_0\,(va)_{\overline{n}|}}{i\,n\,(n+1)}$$

formule que nous mettrons sous la forme

$$(5) \qquad \underline{K_n = \frac{i_0}{i} + \left(1 - \frac{i_0}{i}\right) \frac{(va)_{\overline{n}|}}{s}} \qquad\qquad s = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Calcul de la vie mathématique σ_2.

Etant donné la définition de la vie mathématique, σ_2 sera obtenu en résolvant l'équation

$$1 + (i_0 - i)\, a_{\overline{\sigma_2}|} = \frac{i_0}{i} + \left(1 - \frac{i_0}{i}\right) \frac{(va)_{\overline{n}|}}{s}$$

on obtient facilement:

$$(6) \qquad \underline{\sigma_2 = \frac{\log s - \log\, (va)_{\overline{n}|}}{\log\, (1+i)}}$$

σ_2 se présente donc comme une fonction indépendante du taux nominal i_0, il en est de même de σ_4, mais par contre pas de σ_3 (voir Huss et Hagström, pages 192 et 193).

Un examen des listes de valeurs de placements en obligations publiées par nos banques, nous montre que le calcul effectué pour obtenir le taux de rendement i des valeurs à revenu fixe remboursables par des tirages au sort, est fait généralement en prenant comme vie mathématique une quantité σ_1 égale au $\frac{2}{3}$ de la durée de l'emprunt.

Il nous semble donc intéressant de rapprocher en un tableau quelques valeurs des fonctions σ_1, σ_2, σ_3 et σ_4 afin de les comparer. C'est ce que nous avons fait dans le tableau I ci-après en prenant $i_0 = 0.05$ et les valeurs des fonctions σ_3 et σ_4 dans l'ouvrage «Bond Values» de MM. Huss et Hagström.

La remarque que l'on peut faire en examinant notre tableau I est que le procédé pratique de détermination de la vie mathématique donne une bonne approximation de σ_2, mais par contre doit être nettement mis de côté pour la détermination de σ_3 et σ_4. Il est donc assez curieux de constater que le procédé pratique constamment utilisé dans nos banques, s'applique en première approximation assez bien à un type d'emprunt amortissable non coté sur le marché suisse.

Tableau I.

n \ i	0.04				0.06				0.07				0.08			
n	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
5	3.33	3.64	3.06	2.96	3.33	3.62	3.04	2.94	3.33	3.61	3.03	2.93	3.33	3.61	3.02	2.92
10	6.67	6.88	5.74	5.34	6.67	6.82	5.66	5.26	6.67	6.79	5.62	5.22	6.67	6.76	5.58	5.18
15	10.00	10.07	8.54	7.63	10.00	9.93	8.37	7.46	10.00	9.87	8.28	7.37	10.00	9.80	8.19	7.29
20	13.33	13.19	11.46	9.85	13.33	12.96	11.15	9.54	13.33	12.84	10.99	9.39	13.33	12.72	10.84	9.24
25	16.67	16.26	14.50	11.99	16.67	15.89	14.01	11.51	16.67	15.70	13.77	11.28	16.67	15.51	13.53	11.06
30	20.00	19.27	17.65	14.05	20.00	18.73	16.95	13.37	20.00	18.46	16.60	13.05	20.00	18.19	16.26	12.74
35	23.33	22.22	20.90	16.03	23.33	21.48	19.96	15.13	23.33	21.21	19.49	14.70	23.33	20.73	19.02	14.29
40	26.67	25.11	24.27	17.94	26.67	24.13	23.04	16.78	26.67	23.64	22.43	16.24	26.67	23.16	21.82	15.73
45	30.00	27.93	27.73	19.77	30.00	26.69	26.18	18.34	30.00	26.07	25.42	17.68	30.00	25.46	24.66	17.06
50	33.33	30.69	31.29	21.54	33.33	29.15	29.40	19.81	33.33	28.39	28.45	19.03	33.33	27.65	27.52	18.29

Vie mathématique des titres d'emprunts dont les amortissements varient en progression arithmétique de raison égale au premier amortissement.

Tables donnant les valeurs de la fonction $\sigma_2(i, n)$.

n \ i	0.025	0.03	0.035	0.04	0.045	0.05	0.055	0.06	0.065	0.07	0.075	0.08
1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
2	1.66	1.66	1.66	1.66	1.66	1.66	1.66	1.66	1.66	1.66	1.66	1.66
3	2.33	2.33	2.32	2.32	2.32	2.32	2.32	2.32	2.32	2.31	2.31	2.31
4	2.99	2.99	2.98	2.98	2.98	2.98	2.97	2.97	2.97	2.97	2.96	2.96
5	3.65	3.64	3.64	3.64	3.63	3.63	3.62	3.62	3.61	3.61	3.61	3.61
6	4.31	4.30	4.29	4.28	4.28	4.28	4.27	4.27	4.26	4.26	4.25	4.24
7	4.96	4.95	4.94	4.94	4.93	4.93	4.92	4.91	4.90	4.90	4.89	4.88
8	5.62	5.61	5.60	5.59	5.58	5.57	5.56	5.55	5.54	5.53	5.52	5.51
9	6.27	6.26	6.25	6.24	6.22	6.21	6.20	6.19	6.18	6.16	6.15	6.14
10	6.93	6.91	6.89	6.88	6.87	6.85	6.84	6.82	6.81	6.79	6.78	6.76
11	7.58	7.56	7.54	7.52	7.50	7.49	7.47	7.45	7.43	7.41	7.40	7.38
12	8.23	8.20	8.18	8.16	8.14	8.12	8.10	8.08	8.06	8.03	8.01	7.99
13	8.87	8.85	8.82	8.80	8.77	8.75	8.72	8.70	8.67	8.65	8.62	8.60
14	9.52	9.49	9.46	9.43	9.40	9.38	9.35	9.32	9.29	9.26	9.23	9.20
15	10.17	10.13	10.10	10.07	10.03	10.00	9.97	9.93	9.90	9.87	9.83	9.80
16	10.81	10.77	10.74	10.71	10.66	10.62	10.58	10.65	10.51	10.47	10.43	10.39
17	11.45	11.41	11.37	11.33	11.28	11.24	11.20	11.15	11.11	11.07	11.02	10.98
18	12.10	12.05	12.00	11.95	11.90	11.86	11.81	11.76	11.71	11.66	11.61	11.57
19	12.74	12.68	12.63	12.57	12.52	12.47	12.41	12.36	12.31	12.25	12.20	12.14
20	13.37	13.31	13.26	13.19	13.14	13.08	13.02	12.96	12.90	12.84	12.78	12.72

21	14.01	13.95	13.88	13.81	13.75	13.68	13.62	13.55	13.49	13.42	13.35	13.29
22	14.65	14.58	14.50	14.43	14.36	14.29	14.21	14.14	14.07	14.00	13.92	13.85
23	15.28	15.20	15.12	15.04	14.97	14.89	14.81	14.73	14.65	14.57	14.49	14.41
24	15.91	15.83	15.74	15.66	15.57	15.48	15.40	15.31	15.22	15.14	15.05	14.96
25	16.54	16.45	16.36	16.26	16.17	16.08	15.98	15.89	15.80	15.70	15.61	15.51
26	17.17	17.07	16.97	16.87	16.77	16.67	16.57	16.47	16.36	16.26	16.16	16.06
27	17.80	17.69	17.58	17.48	17.37	17.26	17.15	17.04	16.93	16.82	16.71	16.60
28	18.43	18.31	18.19	18.08	17.96	17.84	17.72	17.61	17.49	17.37	17.25	17.13
29	19.05	18.93	18.80	18.68	18.55	18.42	18.24	18.17	18.04	17.92	17.79	17.66
30	19.68	19.54	19.41	19.27	19.14	19.00	18.87	18.73	18.59	18.46	18.32	18.19
31	20.30	20.16	20.01	19.87	19.72	19.58	19.43	19.29	19.14	19.00	18.85	18.70
32	20.92	20.77	20.61	20.46	20.31	20.15	19.99	19.84	19.68	19.53	19.37	19.22
33	21.54	21.38	21.21	21.05	20.88	20.72	20.56	20.39	20.22	20.06	19.89	19.73
34	22.16	21.98	21.81	21.64	21.46	21.29	21.11	20.93	20.76	20.58	20.41	20.23
35	22.77	22.59	22.41	22.22	22.04	21.85	21.66	21.48	21.29	21.10	20.92	20.73
36	23.39	23.19	23.00	22.80	22.61	22.41	22.21	22.01	21.82	21.62	21.42	21.23
37	24.00	23.80	23.59	23.38	23.17	22.97	22.76	22.55	22.34	22.13	21.92	21.72
38	24.61	24.40	24.18	23.96	23.74	23.52	23.30	23.08	22.86	22.64	22.42	22.20
39	25.22	24.99	24.76	24.53	24.30	24.07	23.84	23.61	23.37	23.12	22.91	22.68
40	25.83	25.59	25.35	25.11	24.86	24.62	24.37	24.13	23.88	23.64	23.40	23.16
41	26.44	26.18	25.93	25.68	25.42	25.16	24.91	24.65	24.39	24.14	23.88	23.63
42	27.04	26.78	26.51	26.24	25.97	25.70	25.43	25.16	24.89	24.63	24.36	24.09
43	27.65	27.37	27.09	26.81	26.52	26.24	25.96	25.68	25.39	25.11	24.83	24.56
44	28.25	27.96	27.66	27.37	27.07	26.78	26.48	26.18	25.89	25.59	25.30	25.01
45	28.85	28.54	28.24	27.93	27.62	27.31	27.00	26.69	26.38	26.07	25.77	25.46
46	29.45	29.13	28.81	28.48	28.16	27.83	27.51	27.19	26.87	26.54	26.23	25.91
47	30.05	29.71	29.38	29.04	28.70	28.36	28.02	27.68	27.35	27.01	26.68	26.35
48	30.64	30.30	29.94	29.59	29.24	28.88	28.53	28.18	27.83	27.48	27.13	26.79
49	31.24	30.87	30.51	30.14	29.77	29.45	29.04	28.67	28.30	27.94	27.58	27.22
50	31.83	31.45	31.07	30.69	30.30	29.92	29.54	29.15	28.77	28.39	28.02	27.65