Mathematische Untersuchungen über die in unterjährigen Raten zahlbaren Renten

Mathematische Untersuchungen über die in unterjährigen Raten zahlbaren Renten.

Von Prof. Dr. **Werner Friedli**, Bern.

Vorwort.

In der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften weist *Bohlmann* darauf hin, dass den gebräuchlichsten Näherungsformeln der Versicherungstechnik eine Abschätzung des Restgliedes mangle [1].

Wir setzten uns zum Ziel, für eine der am häufigsten gebrauchten Näherungsformeln der Praxis die Berechnung des Restgliedes durchzuführen und damit jenem Mangel abzuhelfen. Die vorliegende Untersuchung stellt eine Erweiterung und Ergänzung zweier im Druck erschienenen Arbeiten dar [2].

Dem gleichen Gegenstand ist eine im Jahre 1925 erschienene Arbeit von *J. F. Steffensen* gewidmet, betitelt «On the mathematical foundations of actuarial science». In diesem Zusammenhang interessieren uns die Schlussbemerkungen des Verfassers [3], welche sehr gut dem Standpunkt entsprechen, der uns in der Behandlung der Frage geleitet hat:

---

[1] Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Heft I D 4 *b*, S. 879.

[2] Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 13 (1918) und Heft 18 (1923).

[3] Siehe 7. Skandinaviske Matematikerkongres i København, den 31. August bis 4. September 1925. Kongresberetningen, S. 342, København 1926.

«I have only wanted to show that it is possible, and not even difficult, to find sufficiently narrow limits for the error in some of the approximative formulas most frequently employed by actuaries. There is no reason why actuarial formulas should not be established on such a basis that it is clearly seen on what foundation they rest, and what can be expected of them. When much vagueness can be avoided by comparatively little trouble, there is no justification for taking the easier course.»

Das Problem ist von Steffensen neuerdings behandelt worden in seinen Londoner-Vorträgen vom Jahre 1930 (Some recent researches in the theory of statistics and actuarial science, Cambridge, University Press, p. 26 ff.). Diese gaben unmittelbar auch den Anstoss zur Drucklegung der vorliegenden Untersuchungen, die bereits in einigen Arbeiten von Schülern der Berner Universität zitiert worden sind.

* * *

Um das Studium unserer Arbeit zu erleichtern, sei auf nachstehende kurze Inhaltsübersicht verwiesen.

Die Näherungsformel von Woolhouse

$$\bar{a}_x = a_x^{(m)} + \frac{m-1}{2m} - \frac{\mu_x + \delta}{12m^2} + R$$

wurde von Poterin du Motel durch den Rest R ergänzt, für welchen er den Ausdruck gab:

I $$R = \frac{1}{4!\, m^5} \int_0^1 t^2 (1-t)^2 \sum_0^\infty {}_n \frac{\overset{(4)}{D}_{\left(x+\frac{n+t}{m}\right)}}{D_{(x)}}\, dt$$

Diesem können wir zwei weitere Restformeln an die Seite stellen, welche wir in Anlehnung an die Bezeichnung der Restglieder der Eulerschen Summenformel als Formeln von Seliwanoff (II) und Markoff (III) bezeichnen:

$$\text{II} \qquad R = \frac{1}{720\,m^5} \sum_0^\infty {}_n \frac{D^{(4)}_{\left(x+\frac{n+\varsigma}{m}\right)}}{D_{(x)}}, \quad 0 < \varsigma < 1$$

$$\text{III} \qquad R = \theta \frac{1}{720\,m^4} \frac{-D^{(3)}_{(x)}}{D_{(x)}}, \quad 0 < \theta < 1$$

Diese Reste haben wir auf Grund des Makehamschen Gesetzes analytisch dargestellt und berechnet. Eine erste Schätzung geschah mit Hilfe des in Abschnitt V behandelten bestimmten Integrals

$$J = \int_0^1 t^{n-1} (1 - t)^m e^{-xt} \, dt,$$

das sich einerseits durch eine Reihe von $P =$ Funktionen

$$P(x, n) = \int_0^x z^{n-1} e^{-z} \, dz,$$

anderseits mit Hilfe eines speziellen hypergeometrischen Integrals durch eine Potenzreihe darstellen lässt. Das Verfahren wird sowohl auf (I) als auf (II) angewendet. Der Rest (III) ist leicht anzugeben, ist jedoch an Nebenbedingungen geknüpft, die nicht einfach sind.

Als Resultat ergab sich, dass der Rest R in zwei Schranken eingeschlossen werden kann und dass er Beträge erreicht (siehe Tabelle in Abschnitt VII), die praktisch zu vernachlässigen sind. Damit ist die Berechtigung der Woolhouseschen Näherungsformel gezeigt.

Eine zweite Schätzung war nötig für die höheren Alter. Sie wurde in Abschnitt VII mit Hilfe der unvollständigen Gammafunktion

$$Q(\lambda, k) = \int_{\lambda}^{\infty} e^{-u} u^{k-1} \, du$$

vorgenommen und führte, abgesehen von einem Proportionalitätsfaktor, auf die nämliche Schlussformel wie die Markoffsche Relation (III), wobei sich jedoch eine praktisch bequemer zu handhabende Bedingungsgleichung als bei jener ergab. Die numerische Auswertung nach dieser zweiten Schätzung zeitigte das erfreuliche Ergebnis, dass auch für die höchsten Alter der Absterbeordnung der Rest R in der Woolhouseschen Formel vernachlässigt werden darf.

Als Anwendung unserer Formeln ergaben sich im IX. Abschnitt die Restformeln in den Näherungsausdrücken der Verbindungs- und Zeitrenten, sowie der vollen, mittleren Lebenserwartung. Namentlich der Spezialfall der Zeitrenten bringt eine schöne Bestätigung der im allgemeinen Fall gefundenen Resultate, wobei bemerkenswert ist, dass die Restformeln I, II, III alle im wesentlichen auf das gleiche Ergebnis führen, nämlich dass in der Formel

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = a_{\overline{n}|} \left(1 + \frac{m-1}{2m} i - \frac{m^2-1}{12m^2} i\delta + R\right)$$

der Rest R der Ungleichung genügt

$$R < \frac{i\delta^3}{720}\left(1 - \frac{1}{m^4}\right), \text{ wo } \delta = \operatorname{Log}(1+i)$$

also solange der Zinsfuss 6 % nicht übersteigt:

$$R < 0{,}000\ 0000\ 16 \left(1 - \frac{1}{m^4}\right)$$

$$< 0{,}000\ 0000\ 16$$

I. Abschnitt.

In der Lebensversicherung spielt die vom Alter x abhängige Funktion

$$l(x) = l_x,$$

die Überlebensordnung, in allen Berechnungen eine Hauptrolle.

Solche Überlebensordnungen sind in grosser Zahl und für sehr verschiedene Gesamtheiten von Personen aufgestellt worden. Stets aber werden die Funktionswerte auf Grund der Methoden der mathematischen Statistik nur für *ganzzahlige* Werte des Argumentes x berechnet. Für die Ermittlung der einfacheren Barwerte der Versicherungstechnik genügen dieseWerte allerdings vollständig; der Mangel an Funktionswerten für gebrochene Argumentwerte macht sich jedoch fühlbar, sobald es sich um die Berechnung der kontinuierlichen und unterjährigen Barwerte handelt.

Es ist

$$(1)\ldots\quad D_x\,\mathsf{a}_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_w$$

$$\begin{aligned}(2)\ldots\quad m\,D_x\,\mathsf{a}_x^{(m)} = {} & D_x + D_{x+1\,m} + D_{x+2\,m} + \ldots + D_{x+\frac{m-1}{m}} \\ & + D_{x+1} + D_{x+1+1\,m} + D_{x+1+2\,m} + \ldots + D_{x+1+\frac{m-1}{m}} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + D_w + D_{w+1\,m} + D_{w+2\,m} + \ldots + D_{w+\frac{m-1}{m}}\end{aligned}$$

und daher

$$(3)\ldots\quad \mathsf{a}_x = \frac{1}{D_x}\sum_{0}^{w-x}{}_{\lambda}\, D_{x+\lambda}$$

$$(4)\ldots\quad \begin{cases} \mathsf{a}_x^{(m)} = \dfrac{1}{m\,D_x} \sum\limits_{0}^{m-1}{}_{\mu} \sum\limits_{0}^{w-x}{}_{\lambda} D_{x+\lambda+\frac{\mu}{m}} \\ \quad\;\; = \dfrac{1}{m\,D_x} \sum\limits_{0}^{m\,(w-x)+m-1}{}_{\lambda} D_{x+\frac{\lambda}{m}} \end{cases}$$

Der gewöhnliche Barwert a_x ist somit bekannt, wenn man die Summe (3) kennt, deren einzelnes Glied ein Produkt aus zwei Funktionen ist:

$$(5)\ldots\qquad D_{x+\lambda} = v^{x+\lambda}\, l_{x+\lambda}$$

Bei der in m unterjährigen Raten zahlbaren Rente 1, deren Barwert theoretisch durch (4) gegeben ist, zerlegt sich jedes solche Produkt in m weitere Produkte, die durch den Ausdruck gegeben sind

$$(6)\ldots\qquad D_{x+\lambda+\frac{\mu}{m}} = v^{x+\lambda+\frac{\mu}{m}} \cdot l_{x+\lambda+\frac{\mu}{m}}$$

Die praktische Schwierigkeit besteht nun darin, dass wie erwähnt, keine Funktionswerte l_x für gebrochene Argumentwerte existieren und dass die unterjährige Verzinsung (Marchzins) meistens so bemessen ist, dass sie nicht auf den Faktor $v^{x+\lambda+\frac{\mu}{m}}$, sondern auf einen Ausdruck

$$v^{x+\lambda} \cdot \varrho\left(\frac{\mu}{m}\right)$$

führt, welcher von jenem etwas abweicht.

Man ist somit gezwungen, zur Berechnung von $\mathsf{a}_x^{(m)}$ zu bestimmten Annahmen zu greifen und Näherungsformeln aufzustellen. Hierfür stehen verschiedene Wege offen:

1. man interpoliert direkt die Funktion $D_{x+\lambda}$;
2. man interpoliert sowohl $v^{x+\lambda}$ als $l_{x+\lambda}$;
3. man benützt gewisse Reihenentwicklungen.

Ein Beispiel der ersten Art bildet die wohl praktisch am meisten benutzte Formel

$$\mathrm{a}_x^{(m)} = \mathrm{a}_x - \frac{m-1}{2m},$$

welche der Auffassung entspricht, dass die Funktion $D(x)$ innerhalb eines Jahres $x/x+1$ linear verlaufe.

Beispiele der zweiten Art liessen sich beliebig viele darstellen. Wir begnügen uns mit folgenden charakteristischen Fällen

Variante	Absterbeordnung im Laufe des Jahres $x/x+1$	Marchzins im Laufe des Jahres
I	linear	exponential
II	linear	linear
III	exponential	exponential
IV	exponential	linear

Variante I führt auf den vielverwendeten Ausdruck[1])

(7) . . . $$\mathrm{a}_x^{(m)} = \alpha\, \mathrm{a}_x - \beta$$

[1]) Wir erwähnen folgende schweizerische Arbeiten, in welchen diese Formel abgeleitet bzw. angewendet wurde:

Rebstein, Witwen- und Waisenkasse der Professoren der E. T. H., Gutachten (1899), Bericht (1906).

Moser, Untersuchungen und Materialien (1901).

Kinkelin, Gutachten über Errichtung einer kantonalen Anstalt für Invaliden- und Altersversicherung im Kanton Glarus (1904).

Leubin, Versicherungstechnische Orientierung (1904).

Grieshaber, Rechnungsgrundlagen (1922).

worin
$$\alpha = \frac{i\, d\, v^{1/m}}{m^2\,(1 - v^{1/m})^2}$$

$$\beta = \frac{i\, v^{1/m} - m\,(1 - v^{1/m})}{m^2\,(1 - v^{1/m})^2}$$

Variante IV würde im einfachsten Fall auf Entwicklung folgender Reihe führen

$$(8) \ldots \quad \mathrm{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m}\left[\mathrm{a}_x + \frac{1}{D_x}\sum_0^{\infty}{}_{\lambda} D_{x+\lambda}\sum_{z=1}^{m-1}\left(1 - d\frac{z}{m}\right)(p_{x+\lambda})^{z/m}\right]$$

Wenig Beachtung scheinen die Fälle II und III gefunden zu haben, deren Ergebnisse selten Verwendung finden und die wir hier kurz ableiten.

Variante II. Bezeichnet t einen Bruchteil des Jahres, so dass

$$o \leqq t \leqq 1,$$

so wird die Berechnung von l_{x+t} zu erfolgen haben nach der Formel

$$\begin{aligned} l_{x+t} &= l_x - t\,(l_x - l_{x+1}) \\ &= (1 - t)\, l_x + t\, l_{x+1}, \end{aligned}$$

Die Berechnung von v^{x+t} nach

$$\begin{aligned} v^{x+t} &= v^x \cdot \varrho_1\,(t) \\ &= v^x\,(r - it)\, v \\ &= v^x\,(1 - dt) \end{aligned}$$

Folglich

$$D_{x+t} = [(1 - t)\, D_x + tr\, D_{x+1}]\,(1 - dt)$$

$$\sum_{x}^{w-x} D_{x+t} = N_{x+t} = [(1-t)\, N_x + tr\, N_{x+1}]\,(1-dt)$$

$$= [(1-t+tr)\, N_x - tr\, D_x]\,(1-dt)$$

$$= [(1+it)\, N_x - tr\, D_x]\,(1-dt)$$

$$\frac{N_{x+t}}{D_x} = [(1+it)\, \mathrm{a}_x - tr]\,(1-dt)$$

$$= (1+it)\,(1-dt)\,\mathrm{a}_x - tr\,(1-dt)$$

$$= (1+it)\,(1-dt)\,\mathrm{a}_x - t\,(r-it)$$

$$\sum_{0,\frac{1}{m},\frac{2}{m},\dots\frac{m-1}{m}}^{t} \frac{N_{x+t}}{D_x} = \mathrm{a}_x \cdot \sum\nolimits_{\mathrm{I}} - \sum\nolimits_{\mathrm{II}},$$

$$= m \cdot \mathrm{a}_x^{(m)}$$

Hierin ist

$$\sum\nolimits_{\mathrm{I}} = \sum_{0,\frac{1}{m},\frac{2}{m},\dots\frac{m-1}{m}} [1 + (i-d)\,t - idt^2]$$

$$= m + (i-d)\,\frac{m-1}{2} - id\,\frac{(2m-1)\,(m-1)}{6m},$$

oder wegen $i - d = id$,

$$\sum\nolimits_{\mathrm{I}} = m + id\,\frac{(m-1)\,(m+1)}{6\,m}$$

$$\sum\nolimits_{\mathrm{II}} = \sum_{0,\frac{1}{m},\frac{2}{m},\dots\frac{m-1}{m}}^{t} (tr - it^2)$$

$$= r\frac{m-1}{2} - i\frac{(2m-1)(m-1)}{6m}$$

$$= \frac{m-1}{2} + i\frac{(m-1)(m+1)}{6m}$$

Folglich

$$\mathrm{a}_x^{(m)} = \mathrm{a}_x \left[1 + id\frac{(m-1)(m+1)}{6m^2}\right] - \left[\frac{m-1}{2\mathrm{m}} + i\frac{(m-1)(m+1)}{6m^2}\right]$$

oder schliesslich

$$(9) \quad \mathrm{a}_x^{(m)} = \mathrm{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{(m-1)(m+1)}{6m^2}\, iA_x$$

Handelt es sich um die Zeitrente 1, so wird

$A_{\overline{\infty}|} = 1 - d\, a_{\overline{\infty}|} = 0$ und daher aus (9)

$a_{\overline{\infty}|}^{(m)} = a_{\overline{\infty}|} - \frac{m-1}{2m}$, wie es bei Voraussetzung des linearen Marchzinses sein soll.

Variante III. Bedeutet wiederum t einen Bruchteil des Jahres, so setzen wir voraus

$$l_{x+t} = e^{-C_x t}\, l_x$$

$$v^{x+t} = e^{-ct} \cdot v^x$$

wobei die Konstanten C_x und c aus den Grenzbedingungen

$$\operatorname*{limes}_{t=1} l_{x+t} = l_{x+1}$$

$$\operatorname*{limes}_{t=1} v^{x+t} = v^{x+1}$$

sich ergeben zu $C_x = -\operatorname{Log} p_x$

$$c = -\operatorname{Log} v,$$

so dass

$$l_{x+t} = l_x\,(p_x)^t$$

$$v^{x+t} = v^x\,v^t$$

und daraus

$$D_{x+t} = D_x\,(vp_x)^t = D_x^{1-t} \cdot D_{x+1}^t$$

Zur Bestimmung von $\mathsf{a}_x^{(m)}$ führen wir die Summation vorerst durch über t für $x =$ konstant und hernach über x.

$$\sum_t D_{x+t} = D_x \sum_{0,1/m,\,\cdots\,\frac{m-1}{m}}^{t} (vp_x)^t$$

$$= D_x \frac{1 - vp_x}{1 - (vp_x)^{1/m}}$$

$$(10) \ldots \text{ und } \quad \mathsf{a}_x^{(m)} = \frac{1}{D_x} \sum_x^{w-x} D_x \frac{1 - vp_x}{m\,[1 - (vp_x)^{1/m}]}$$

Statt dessen kann auch geschrieben werden

$$(10a) \ . \ . \ . \quad \mathsf{a}_x^{(m)} = \frac{1}{D_x} \sum x \frac{D_x - D_{x+1}}{m\,[1 - (vp_x)^{1/m}]}$$

Für den Fall der Zeitrente geht (10) über in

$$\mathsf{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_0^{\infty} {}_{\lambda}\, v^{\lambda} \frac{1 - v}{1 - v^{1/m}}$$

$$= \frac{1 - v}{m\,(1 - v^{1/m})}\, a_{\overline{\infty}|}$$

$$= \frac{1}{m\,(1 - v^{1/m})} \quad \text{wie es sein soll.}$$

Aus (10) könnten nun eine Reihe von Näherungsformeln hergeleitet werden. Zu diesem Zwecke könnte man ausgehen von der Relation

$$1 - vp_x = \frac{q_x + i}{1 + i},$$

$$= z, \text{ wo } 0 < z < 1$$

so dass

$$J = \frac{1 - vp_x}{m\left[1 - (vp_x)^{1/m}\right]} = \frac{z}{m\left[1 - (1 - z)^{1/m}\right]}$$

welcher Ausdruck in eine nach Potenzen von z fortschreitende Reihe entwickelt und alsdann in dieser Form mit D_x verknüpft werden kann, woraus durch passende Summation sich jene Näherungsformeln ergeben müssen.

Mit den an dritter Stelle genannten Reihenentwicklungen werden wir uns in dieser Arbeit eingehend befassen. Die Reihenentwicklung hat auf die praktisch gegebenen Grössen Rücksicht zu nehmen und muss eine mühelose Auswertung ermöglichen.

Verteilen sich die Ratenzahlungen gleichmässig über die Dauer eines Jahres, so ergibt sich der Grenzwert

$$\lim_{m=\infty} \mathrm{a}_x^{(m)} = \lim_{m=\infty} \frac{1}{D_x} \sum_{0}^{m(w-x)+m-1} \lambda \; \frac{1}{m} D_{x+\frac{\lambda}{m}}$$

$$= \frac{1}{D_x} \int_0^{w-x+1} D_{x+t}\, dt$$

und unter Voraussetzung eines zur x-Achse asymptotischen Verlaufs der Funktion D_x

$$(11) \ldots \quad \lim_{m=\infty} \mathsf{a}_x^{(m)} = \overline{a}_x = \frac{1}{D_x} \int_0^\infty D_{x+t}\, di$$

Der Wert dieses Integrals ergibt sich als Spezialfall aus den einzelnen Näherungsformeln für $\mathsf{a}_x^{(m)}$.

II. Abschnitt.

In allen Fällen, in welchen für die Absterbeordnung ein mathematisches Gesetz formuliert ist (sei es zur Ausgleichung der Beobachtungszahlen, sei es als Näherung), ist die Schwierigkeit in der Berechnung unterjähriger Barwerte ausgeschaltet. Wie man die Zahlen l_x für ganzzahlige Argumentwerte kennt, sind auch die benötigten Werte

$$l_{x+1/m},\ l_{x+2/m},\ \ldots\ l_{x+\lambda/m},\ \ldots$$

mathematisch bestimmt, der Barwert also präzis erfassbar. Wählen wir als einfachsten Ausdruck das Dormoysche Gesetz für die Überlebensordnung, also

$$l_x = k\, s^x,$$

so ergeben sich folgende Barwerte (nachschüssig):

$$a_x = \sum_1^\infty t\, \frac{k\,(v\,s)^{x+t}}{k\,(v\,s)^x} = \frac{v\,s}{1 - v\,s}$$

$$a_x^{(m)} = \sum_1^\infty t\, \frac{k\,(v\,s)^{x+\frac{t}{m}}}{k\,(v\,s)^x} = \frac{(v\,s)^{1/m}}{1 - (v\,s)^{1/m}}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{a}_x &= \frac{1}{(v\,s)^x} \int_0^\infty (v\,s)^{x+t}\, dt \\ &= \lim_{m=\infty} \frac{(v\,s)^{1/m}}{1 - (vs)^{1/m}} \end{aligned}\right\} = \frac{1}{\operatorname{Log} 1/v\,s}$$

III. Abschnitt.

Wir vergleichen nun die bekanntesten und daher am meisten verwendeten Näherungsformeln

$$a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m} \qquad \text{(Simpson)}^{1)}$$

$$a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_x + \delta) \quad \text{(Woolhouse)}^{2)}$$

$$a_x^{(m)} = \frac{v^{\frac{m+1}{m}}\, i^2}{m^2(1-v^{1/m})^2}\, a_x + \frac{m\, v^{1/m}\,(1-v^{1/m}) - v^{1/m}\, d}{m^2\,(1-v^{1/m})^2} \quad \text{(Lobatto)}^{3)}$$

welche im Grenzfall übergehen in

$$(1)\ \ldots \qquad \bar{a}_x = a_x + \frac{1}{2}$$

$$(2)\ \ldots \qquad \bar{a}_x = a_x + \frac{1}{2} - \frac{\mu_x + \delta}{12}$$

$$(3)\ \ldots \qquad \bar{a}_x = \frac{i d}{\delta^2}\, a_x + \frac{\delta - d}{\delta^2}$$

mit der von H. A. v. d. Belt[4]) stammenden Formel

$$(4)\ldots\ \bar{a}_x = \frac{e^q\, q^{\varepsilon-1}}{\gamma}\,\Gamma(1-\varepsilon) + \frac{1}{\gamma\,(\varepsilon - 1}\left[1 + \frac{q}{2-\varepsilon} + \frac{q^2}{(2-\varepsilon)(3-\varepsilon)} + \ldots\right]$$

---

[1]) *T. Simpson,* Select exercices for young proficients in the mathematics. London (1752), S. 283.

[2]) *W. S. B. Woolhouse,* J. I. A. XV. London (1870), S. 106.

[3]) *R. Lobatto,* Verhandl. Akad. Wetensch. Amsterdam (1) 10 (1864), S. 199.

[4]) Archief voor de Verzek. Wetenschap 8 (1906), S. 381.

Die letztere ist als *mathematisch genauer* Ausdruck des Barwertes $\bar{a}_x$ anzusprechen, sobald die Absterbeordnung dem Makehamschen Gesetz folgt

$$(5) \ \ldots \qquad l_x = k\,s^x g^{c^x}$$

Hierbei bedeuten die Konstanten γ, ε, q, Parameter, welche von den Parametern s, g, c der Überlebensordnung und der Verzinsungsintensität δ abhangen, nämlich

$$(4a) \ \ldots \qquad \begin{cases} \gamma = \operatorname{Log} c \\ q = c^x \operatorname{Log} \dfrac{1}{g} \\ \varepsilon = \dfrac{\operatorname{Log} \dfrac{1}{s} + \delta}{\operatorname{Log} c} + 1 \end{cases}$$

Wie stellen sich nun die Resultate nach den verschiedenen Formeln (1) bis (4) zu einander? Wir werten sie aus auf Grund der englischen Tafel $0^{M(5)}$, $3\frac{1}{2}\,\%$, die nach Formel (5) ausgeglichen ist. Nachstehend sind die Ergebnisse zusammengestellt; wir bleiben beim Alter 85 stehen, weil die Reihe (4) für grosse Werte von x sehr langsam konvergiert (beim Alter $x = 85$ waren schon 17 Glieder der Reihe zu berücksichtigen).

x	$\bar{a}_x$ berechnet nach der Formel				Relativer Fehler in bezug auf (4)			Absoluter Fehler in bezug auf (4)		
	(1) Simpson	(2) Wool-house	(3) Lobatto	(4) v. d. Belt	bei (1)	bei (2)	bei (3)	bei (1)	bei (2)	bei (3)
20	20,7986	20,7952	20,7950	20,7951	+0,000 168	+0,000 004	—0,000 005	—0,0035	—0,0001	+ 001
30	19,0423	19,0388	19,0384	19,0389	+0,000 179	—0,000 005	—0,000 026	—0,0034	+ 0,0001	+ 0,0005
40	16,7037	16,7001	16,6996	16,7003	+0,000 204	—0,000 012	—0,000 042	—0,0034	+ 0,0002	+ 0,0007
50	13,7815	13,7774	13,7771	13,7779	+0,000 261	—0,000 036	—0,000 059	—0,0036	+ 0,0005	+ 0,0008
60	10,4527	10,4474	10,4480	10,4476	+0,000 488	—0,000 019	+0,000 038	—0,0051	+ 0,0002	—0,0004
70	7,1136	7,1056	7,1086	7,1056	+0,001 126	+0,000 000	+0,000 422	—0,0080	0,0000	—0,0030
80	4,2705	4,2557	4,2652	4,2552	+0,003 360	+0,000 118	+0,002 350	—0,0153	—0,0005	—0,0100
85	3,1570	3,1358	3,1516	3,1338	+0,007 403	+0,000 638	+0,005 680	—0,0232	—0,0020	—0,0178

Aus dieser Übersicht entnehmen wir die bemerkenswerte Tatsache, dass Formel (1) eine ziemlich rohe, (2) eine sehr gute und (3) in den untern Altersklassen ebenfalls eine gute, in den obern weniger gute Annäherung für den Barwert a_x (und $a_x^{(m)}$) ergibt. Beschränkt man sich auf 3 Dezimalstellen, so darf die Formel von *Woolhouse* direkt als genauer Ausdruck für den Barwert angesehen werden.

Dieses Resultat stützt sich auf ein einziges Zahlenbeispiel, darf also nur als ein vorläufiges betrachtet werden. Es bleibt uns auf analytischem Wege zu zeigen übrig, dass das Ergebnis allgemeine Geltung besitzt.

IV. Abschnitt.

Um die Genauigkeit der Woolhouseschen Formel auf analytischem Wege zu prüfen, gehen wir von der Euler-Mac Laurinschen Summenformel aus. Sie stellt eine wichtige Brücke zwischen Summen- und Integralrechnung dar und eignet sich infolgedessen vortrefflich zur Aufsuchung einer Beziehung zwischen $a_x^{(m)}$ und $\overline{a}_x$. Da aber die Eulersche Summenformel eine semikonvergente Reihe darstellt, so genügt es nicht, eine Näherungsformel aufzustellen, sondern der zweite ebenso wichtige Schritt besteht darin, den Grad der Näherung, d. h. den «Rest» zu bestimmen. Angeregt durch die Bemerkung von *Bohlmann* [1]) «Diesen sämtlichen Näherungsformeln mangelt jedoch eine Abschätzung des Restgliedes. Der Praktiker beurteilt die Güte der Annäherung dadurch, wie die verschiedenen Näherungsformeln unter einander übereinstimmen» hat *Poterin du Motel* [2]) als erster einen Ausdruck für den Rest der Woolhouse-

---

[1]) Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften I, D 4 *b*, S. 879.

[2]) Encycl. sciences math. I. 4, 4, p. 527.

schen Formel aufgestellt, den wir unseren Untersuchungen zugrunde legen wollen. Diesem allgemeinen Restausdruck lassen sich zwei weitere an die Seite stellen, nämlich, wenn die Woolhousesche Formel geschrieben wird

$$(1) \ldots \quad \overline{a}_x = a_x^{(m)} + \frac{1}{2m} - \frac{1}{12m^2}(\mu_x + \delta) + R,$$

$$(\mathrm{I}) \ldots \quad R = \frac{1}{4!\,m^5}\int_0^1 t^2(1-t)^2 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{D^{(4)}_{\left(x+\frac{n+t}{m}\right)}}{D_{(x)}}\,dt \quad \text{(Poterin du Motel)}$$

$$(\mathrm{II}) \ldots \quad R = \frac{1}{720\,m^5}\sum_0^\infty{}_n \frac{D^{(4)}_{\left(x+\frac{n+\varsigma}{m}\right)}}{D_{(x)}},\ 0 < \varsigma < 1$$

(III). $R = \gamma \dfrac{1}{720\,m^4}\,\dfrac{-D^{(3)}_{(x)}}{D_{(x)}}, \quad 0 < \gamma < 1$

wobei für alle Werte $0 < z < \infty$ stets gleichzeitig gelten müssen

$$\left.\begin{array}{r} D^{(4)}_{(z)} > 0 \\ \text{und}\quad D^{(6)}_{(z)} > 0 \end{array}\right\} \text{ oder aber } \left.\begin{array}{r} D^{(4)}_{(z)} < 0 \\ D^{(6)}_{(z)} < 0 \end{array}\right\} \quad (\mathrm{III}\,a)$$

Die Formel II erhielten wir durch Anwendung der speziellen Restformel für die Eulersche Summenformel, wie sie *D. Seliwanoff* gegeben hat [1]), Formel (III) mit ihren Bedingungsgleichungen aus dem von *A. A. Markoff* [2]) stammenden Restausdruck. Die letzte Restformel hat von den drei Ausdrücken die einfachste Gestalt, die Schwierigkeiten ihrer Anwendung liegen in den Bedingungsgleichungen III *a*.

---

[1]) Differenzenrechnung, Leipzig (1904), S. 57 (14).
[2]) Differenzenrechnung, Leipzig (1896), S. 120 (21).

Zur Herleitung von (1) gehen wir aus von der von *Markoff* gegebenen Form der Eulerschen Formel [1]), wobei wir jedoch die Grenzen der Summe in der gewohnten Schreibweise angeben:

$$(2) \ldots \quad \sum_{a}^{b-h} {}_x f(x) = f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(b-h)$$

$$= \frac{1}{h} \int_a^b f(z)\, dz + A_1 (f(b) - f(a))$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ A_{m-1} h^{m-2} (f_{(b)}^{(m-2)} - f_{(a)}^{(m-2)})$$

$$+ \mathfrak{R},$$

$$(2a) \ldots \quad \mathfrak{R} = -\int_0^h \varphi_m(z) \sum_{x=a}^{x=b-h} \frac{\delta^m f(x+h-z)}{h\, \delta x^m}\, dz, \text{ wo } m \geqq 2$$

$$= -\int_0^h \varphi_m(z) \left(f_{(a+h-z)}^{(m)} + f_{(a+2h-z)}^{(m)} + \ldots + f_{(b-z)}^{(m)}\right) \frac{dz}{h}$$

Hierin ist

$$\varphi_m(z) = \frac{z^m}{m!} + A_1 \frac{h\, z^{m-1}}{(m-1)!} + A_2 \frac{h^2 z^{m-2}}{(m-2)!} + \ldots + A_{m-1} \frac{h\, z^{m-1}}{1!},$$

welche Funktion im Falle $h = 1$ *Bernoullische Funktion* $m$ten Grades heisst. Die Koeffizienten haben die Werte

$$A_1 = -1/2 \qquad A_3 = 0$$

$$A_2 = 1/12 \qquad A_4 = -1/720$$

[1]) Differenzenrechnung, S. 112.

$$A_5 = 0 \qquad\qquad A_7 = 0$$

$$A_6 = \frac{1}{30240} \qquad\qquad \text{usw.}$$

Um die Formel unsern Zwecken dienstbar zu machen, multiplizieren wir sie mit h, ersetzen $\mathfrak{R}\,h = -R$ und führen eine Laufzahl α ein.

$$(3)\ldots \quad h \sum_{a,\,a+h,\,\ldots\,b-h}^{x} f(x) = \int_a^b f(z)\,dz + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-2} A_{\alpha+1}\, h^{\alpha+1} \left[f^{(\alpha)}_{(b)} - f^{(\alpha)}_{(a)}\right] - R$$

worin

$$R = h \int_0^h \varphi_m(z) \cdot \sum_{a,\,a+h,\,a+2h,\ldots b-h}^{x} f^{(m)}(x+h-z)\,\frac{dz}{h}$$

Wir substituieren $z = ht$, so dass wegen

$$\varphi_m(ht) = h^m\,\varphi_m(t)$$

$$(3a)\ldots \quad R = h^{m+1} \int_0^1 \varphi_m(t) \cdot \sum_{a,\,a+h,\,a+2h,\ldots b-h}^{x} f^{(m)}(x+h-ht)\,dt$$

worin

$$\varphi_m(t) = \frac{t^m}{m\,!} + A_1 \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots + A_{m-1}\frac{t}{1!}$$

Zur Vereinfachung setzen wir $1 - t = t_1$, so dass

$$R = -\,h^{m+1} \int_1^0 \varphi_m(1-t_1) \sum_{a,\,a+h\ldots b-h}^{x} f^{(m)}(x+ht_1)\,dt_1$$

$$= h^{m+1} \int_0^1 \varphi_m(1-t) \sum_{a,\,a+h\ldots b-h}^{x} f^{(m)}(x+ht)\,dt$$

Nun gilt nach *Seliwanoff* [1])

$$\text{für gerades } m: \varphi_m (1 - t) = \varphi_m (t)$$

$$\text{für ungerades } m: \varphi_m (1 - t) = - \varphi_m (t),$$

also bei gleichzeitiger Ersetzung des Parameters m durch r und Einführung einer Laufzahl n:

$$(4a)\ldots \quad R = h^{r+1} \int_0^1 \varphi_r (t) \sum_0^{\frac{b-\mathrm{a}}{h}-1} n \; f^{(r)}(\mathrm{a}+nh+ht)\, dt, \text{ wenn}$$

r gerade.

$$(4b)\ldots \quad R = - h^{r+1} \int_0^1 \varphi_r (t) \sum_0^{\frac{b-\mathrm{a}}{h}-1} n \; f^{(r)}(\mathrm{a}+nh+ht)\, dt, \text{ wenn}$$

r ungerade.

* * *

Setzt man an Stelle von m in (3) ebenfalls r und alsdann *auf unseren Fall angewendet:*

$$f(x) = D(x) = v^x \, l(x)$$

$$h = \frac{1}{m}$$

$$\mathrm{a} = x$$

$$b = \infty$$

$$r = 4$$

[1]) Differenzenrechnung.

so geht (3) über in

$$\frac{1}{m}\sum_{0}^{\infty}{}_n D_{\left(x+\frac{n}{m}\right)} = \int_x^{\infty} D(z)\,dz + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=2} A_{\alpha+1}\left(\frac{1}{m}\right)^{\alpha+1} \left(D^{(\alpha)}_{(\infty)} - D^{(\alpha)}_{(x)}\right) - R$$

Setzen wir nun voraus, dass

$$D(\infty) = D'(\infty) = D''(\infty) = 0$$

und dividieren mit $D(x)$, so kommt

$$\frac{1}{m} + \frac{\sum_{1}^{\infty}{}_n D\left(x+\frac{n}{m}\right)}{D(x)} = \int_x^{\infty}\frac{D(z)}{D(x)}\,dz - \sum_{\alpha=0}^{\alpha=2} A_{\alpha+1}\left(\frac{1}{m}\right)^{\alpha+1}\frac{D^{(\alpha)}_{(x)}}{D_{(x)}} - \frac{R}{D_{(x)}}$$

Wir lösen nach dem Integral auf, ersetzen den Rest kurzerhand durch R, dann kommt

$$\bar{a}_x = a_x^{(m)} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{12m^2}\,\frac{D'(x)}{D(x)} + R$$

und schliesslich

$$(5)\ldots \qquad \bar{a}_x = a_x^{(m)} + \frac{1}{2m} - \frac{\mu_x + \delta}{12m^2} + R$$

wobei wegen $(4a)$:

$$R = \left(\frac{1}{m}\right)^5 \int_0^1 \varphi_4(t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D^{(4)}_{\left(x+\frac{n+t}{m}\right)}}{D_{(x)}}\,dt \qquad \text{oder}$$

$$(5a) \quad R = \frac{1}{4!\,m^5}\int_0^1 t^2(1-t)^2\sum_{0}^{\infty}\frac{D^{(4)}_{\left(x+\frac{n+t}{m}\right)}}{D_{(x)}}\,dt$$

Im Spezialfall $m = 1$ folgt:

$$\bar{a}_x = a_x + \frac{1}{2} - \frac{\mu_x + \delta}{12} + R' \tag{6}$$

$$R' = \frac{1}{4!}\int_0^1 t^2\,(1-t)^2 \sum_0^\infty {}_n \frac{D^{(4)}_{(x+n+t)}}{D_{(x)}}\,dt \tag{6a}$$

und durch Elimination von $\bar{a}_x$ aus (5) und (6):

$$a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_x + \delta) + (R' - R) \tag{7}$$

Dies ist die eigentliche Formel von *Woolhouse*, ergänzt jedoch durch den Restausdruck, der analytisch erfasst ist und einer genauen Untersuchung unterworfen werden kann.

Nach *Seliwanoff* kann nun das Restglied zu (3) in der Form dargestellt werden:

$$-R = A_{2K}\,h^{2K+1}\left(f^{(2K)}_{(a+\varsigma h)} + f^{(2K)}_{(a+h+\varsigma h)} + \cdots\cdots + f^{(2K)}_{(b-h+\varsigma h)}\right) =$$

$$= A_{2K}\,h^{2K+1} \sum_0^{\frac{b-a}{b}-1} {}_n\, f^{(2K)}_{(a+nh+\varsigma h)}$$

worin ς eine unbestimmte Grösse $0 < \varsigma < 1$ bedeutet. Setzen wir hierin $K = 2$ und führen im übrigen die gleichen Substitutionen durch wie oben, so erhalten wir an Stelle von (5 a) die einfachere Restformel:

$$R = \frac{1}{720m^5} \sum_0^\infty {}_n \frac{D^{(4)}_{\left(x+\frac{n+\varsigma}{m}\right)}}{D_{(x)}} \tag{8}$$

Ferner lautet der von *Markoff*[1]) angegebene Ausdruck für den Rest

$$-R = \theta\, A_{2K}\, h^{2K}\, (f_{(b)}^{(2K-1)} - f_{(a)}^{(2K-1)}),$$

wobei $0 < \theta < 1$. Vorausgesetzt ist, dass für alle Werte von z zwischen a und b beständig

$$\left.\begin{array}{r} f_{(z)}^{(2K)} > 0 \\ \text{und}\quad f_{(z)}^{(2K+2)} > 0 \end{array}\right\} \text{ oder beständig } \left.\begin{array}{r} f_{z}^{(2K)} < 0 \\ f_{(z)}^{(2K+2)} < 0 \end{array}\right\}$$

Auf unsern Fall zugespitzt ergibt dies die weitere Restformel

$$(9)\ \ldots \qquad R = \theta\, \frac{1}{720 m^4}\, \frac{-D_{(x)}^{(3)}}{D_{(x)}},$$

wobei $0 < \theta < 1$ und vorauszusetzen ist, dass für alle Werte von z zwischen x und ∞ stets gleichzeitig $D_{(z)}^{(4)} > 0$ und $D_{(z)}^{(6)} > 0$, oder aber

$$D^{(4)}\,(z) < 0 \text{ und } D^{(6)}\,(z) < 0$$

V. Abschnitt.

Wir betrachten das Integral

$$(1)\ \ldots \qquad J = \int_0^1 t^{n-1}\, (1-t)^m\, e^{-xt}\, dt,$$

in welchem wir m und n endlich und zwar $n > 1$, $m > 1$, ferner $|x| < 1$ voraussetzen wollen. Es stellt eine Erweiterung des Binetschen Integrals

---

[1]) Differenzenrechnung, S. 120, Formel 21. Wir haben noch den Faktor h zu berücksichtigen.

$$B = \int_0^1 t^{n-1}\,(1-t)^m\,dt$$

dar.

Führen wir die Substitution ein $xt = z$, so kommt

$$J = \frac{1}{x^{m+n}} \int_0^x z^{n-1}\,(x-z)^m\,e^{-z}\,dz.$$

Entwickeln wir das Binom im Integranden und integrieren hernach gliedweise (was wegen der Voraussetzung eines endlichen m gestattet ist), so folgt

$$J = \frac{1}{x^{m+n}} \int_0^x z^{n-1}\,e^{-z} \left(x^m - \binom{m}{1} x^{m-1} z + \right.$$

$$\left. + \binom{m}{2} x^{m-2} z^2 + \ldots + (-1)^m \binom{m}{m} x^0 z^m \right) dz$$

$$J = \frac{1}{x^{m+n}} \left(x^m \int_0^x z^{n-1}\,e^{-z}\,dz - \binom{m}{1} x^{m-1} \int_0^x z^n\,e^{-z}\,dz + \right.$$

$$\left. + \binom{m}{2} x^{m-2} \int_0^x z^{n+1} e^{-z} dz + \ldots\ldots + (-1)^m \binom{m}{m} \int_0^x z^{m+n-1} e^{-z} dz \right)$$

oder

$$(2)\ldots\; J = \frac{1}{x^{m+n}} \left(x^m\,P_{(x,\,n)} - \binom{m}{1} x^{m-1}\,P_{(x,\,n+1)} + \right.$$

$$\left. + \binom{m}{2} x^{m-2}\,P_{(x,\,n+2)} + \ldots\ldots + (-1)^m \binom{m}{m}\,P_{(x,\,n+m)} \right)$$

Das Integral J stellt sich also dar als eine im Parameter um die Einheit fortschreitende Summe von Funktionen von der Form

$$P(x, n) = \int_0^x z^{n-1} \cdot e^{-z} \, dz$$

also von Funktionen, welche mit den sogenannten unvollständigen Gammafunktionen P die äussere Form gemeinsam haben, jedoch einer anderen Funktionsklasse angehören [1]). (Bei der unvollständigen Gammafunktion ist x Parameter, n Argument, hier ist n Parameter und die obere Integralgrenze Argument.)

Das nämliche Integral J kann nun auch mit Hilfe einer speziellen hypergeometrischen Reihe berechnet werden. Wir entwickeln im Integralausdruck (1) die Exponentialfunktion wiederum in die bekannte (absolut konvergente) Potenzreihe, welche wir wie folgt schreiben

$$\overline{e}^{xt} = (1 - xt) + \frac{x^2 t^2}{2!}\left(1 - \frac{xt}{3}\right) + \frac{x^4 t^4}{4!}\left(1 - \frac{xt}{5}\right) + \cdot \;\cdot\;\cdot$$

$$= \sum_0^\infty {}_\nu \frac{1}{(2\nu)!} (xt)^{2\nu} \left(1 - \frac{xt}{2\nu + 1}\right),$$

folglich wird

$$(3) \quad J = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!} \int_0^1 t^{2\nu+n-1} (1 - t)^m \left(1 - \frac{x}{2\nu + 1} t\right) dt$$

Die damit durchgeführte Umordnung der Glieder und Vertauschung von Integration und Summation (gliedweise Integration) sind gestattet, weil wir es mit einer gleichmässig konvergenten Reihe zu tun haben.

[1]) Wir haben sie zum Unterschied von jenen anlässlich eines Vortrages in der Mathematischen Vereinigung Bern als *Nielsen*-Funktionen bezeichnet.

Bezeichnet man mit $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ die allgemeine hypergeometrische Reihe

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!} + \dots$$

wo $|x| < 1$ vorausgesetzt ist, so gilt für das hypergeometrische Integral

$$\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}\,dt = \frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

wobei $\left.\begin{array}{l} R(\beta) > 1 \\ R(\gamma-\beta) > 1 \end{array}\right\}$ vorausgesetzt werden muss.

Ersetzen wir x durch $\frac{x}{2\nu+1}$, worin $x < 1$ und daher um so mehr

$$\frac{x}{2\nu+1} < 1,$$

ferner

$$\alpha = -1$$

$$\beta = 2\nu + n$$

$$\gamma = 2\nu + m + n + 1$$

so kommt

$$(4) \int_0^1 t^{2\nu+n-1}(1-t)^m\left(1 - \frac{x}{2\nu+1}t\right)dt = \frac{\Gamma(2\nu+n)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(2\nu+m+n+1)} \cdot$$

$$F\left(-1, 2\nu+n, 2\nu+m+n+1, \frac{x}{2\nu+1}\right)$$

Ist α oder β eine negative ganze Zahl, so geht die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ in eine ganze rationale Funktion über, in unserem Fall

$$F\left(-1, 2\nu+n, 2\nu+m+n+1, \frac{x}{2\nu+1}\right) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{x}{2\nu+1}$$

$$= 1 - \frac{\beta}{\gamma}\frac{x}{2\nu+1}$$

$$= 1 - \frac{2\nu+n}{2\nu+m+n+1}\frac{x}{2\nu+1}$$

folglich

$$\int_0^1 = \frac{(2\nu+n-1)!\,m!}{(2\nu+m+n)!}\left(1 - \frac{2\nu+n}{2\nu+m+n+1}\frac{x}{2\nu+1}\right)$$

und somit

$$J = m!\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\left(\frac{(2\nu+n-1)!}{(2\nu+m+n)!}\frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!} - \frac{(2\nu+n)!}{(2\nu+m+n+1)!}\frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\right)$$

was einfacher geschrieben werden kann wie folgt:

$$(5) \qquad J = m!\sum_0^\infty (-1)^\nu \frac{(\nu+n-1)!}{(\nu+m+n)!}\frac{x^\nu}{\nu!}$$

oder anders dargestellt:

$$(5a) \qquad J = \Gamma(m+1)\sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu}{\nu!}\frac{\Gamma(n+\nu)}{\Gamma(m+n+\nu+1)}x^\nu$$

Die Reihe (5) bzw. (5 a) konvergiert für jeden endlichen Wert von x, denn $\lim\limits_{\nu=\infty} \left| \frac{U_{\nu+1}}{U_\nu} \right| = 0$.

Damit haben wir zwischen der in (2) angegebenen Summe von P-Funktionen und der Gammafunktion folgende Relation gefunden:

$$\frac{1}{x^{m+n}} \sum_{\nu=0}^{\nu=m} (-1)^\nu \binom{m}{\nu} x^{m-\nu} \cdot P(x, n+\nu) =$$

$$(6) \qquad = \Gamma(m+1) \sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu}{\nu\,!} \frac{\Gamma(n+\nu)}{\Gamma(m+n+\nu+1)} x^\nu$$

Sie ist durch unsere Ableitung nur für $x < 1$ und endliche, ganzzahlige Werte von m und n bewiesen. Ferner handelt es sich ausschliesslich um reelle Grössen.

VI. Abschnitt.

Wir können nun daran gehen, die in Abschnitt IV aufgestellten Restformeln I, II und III auszuwerten bzw. den Rest R abzuschätzen. Wir setzen voraus, dass die Absterbeordnung dem *Makehamschen* Gesetze folge, dass also

$$l(x) = ks^x g^{c^x}$$

und

$$D(x) = k(vs)^x g^{c^x}$$

Ferner wird

$$\mu_x = \text{Log}\,\frac{1}{s} + c^x\,\text{Log}\,c\,\text{Log}\,\frac{1}{g}$$

$$\text{und } \mu_x + \delta = \left(\frac{\text{Log}\,\frac{1}{s} + \delta}{\text{Log}\,c} + c^x \,\text{Log}\,\frac{1}{g} \right) \text{Log}\,c$$

setzen wir abkürzend

$$(1)\ldots \qquad \begin{cases} K = -\dfrac{\text{Log}\,\frac{1}{s} + \delta}{\text{Log}\,c} \\[2ex] \lambda(x) = c^x \,\text{Log}\,\dfrac{1}{g} \end{cases}$$

so wird

$$(2). \qquad \begin{cases} \mu_x + \delta = [-K + \lambda(x)] \,\text{Log}\,c \\ \mu_x' \qquad = \lambda(x) \,(\text{Log}\,c)^2 \\ \mu_x'' \qquad = \lambda(x) \,(\text{Log}\,c)^3 \\ \mu_x''' \qquad = \lambda(x) \,(\text{Log}\,c)^4 \end{cases}$$

* * *

Um die in unseren Restformeln auftretenden höheren Ableitungen der Funktion $D(x)$ zu bilden, empfiehlt es sich, die von Prof. Dr. *Ch. Moser* [1]) eingeführten «Nebenfunktionen» oder Sekundärfunktionen anzuwenden, weil sie ohne weiteres auf die Intensitäten der Sterblichkeit und Verzinsung, also auf bekannte Grössen führen.

Nach der bekannten Definition ist

$$\mu(x) = -\frac{f'_{(x)}}{f_{(x)}}$$

[1]) Vorlesungen an der Universität Bern, S.-S. 1916.

oder unter Weglassung des Arguments

$$-f' = f\,\mu$$

hieraus

$$\begin{aligned} -f'' &= f'\,\mu + \mu'\,f \\ &= f\,(\mu' - \mu^2) \\ &= f\left(\frac{d}{dx} - \mu\right)\mu \end{aligned}$$

worin $\dfrac{d}{dx} - \mu$ als Operationszeichen aufzufassen ist.

Analog ist

$$\begin{aligned} -f''' &= f\,\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} - \mu\right)\mu + f'\left(\frac{d}{dx} - \mu\right)\mu \\ &= f\left(\frac{d}{dx} + \frac{f'}{f}\right)\left(\frac{d}{dx} - \mu\right)\mu \\ &= f\left(\frac{d}{dx} - \mu\right)\left(\frac{d}{dx} - \mu\right)\mu \end{aligned}$$

Allgemein ist

$$\begin{aligned} -f^{(n)} &= f\left(\frac{d}{dx} - \mu\right)\left(\frac{d}{dx} - \mu\right)\cdots\cdot\left(\frac{d}{dx} - \mu\right)\mu \\ &= f\left(\frac{d}{dx} - \mu\right)^{n-1}\mu, \end{aligned}$$

wobei symbolisch angedeutet ist, dass die Operation $\left(\dfrac{d}{dx} - \mu\right)$ nach und nach $(n-1)$ mal angewendet werden soll. *Moser* bezeichnet als $n$te Nebenfunktion von $f(x)$ den Ausdruck

(3) $$\Delta_n = \left(\frac{d}{dx} - \mu\right)^n \mu,$$

so dass

(4) $$f^{(n)} = f(-\Delta_{n-1})$$

in Worten:

«Die $n$te Ableitung der ursprünglichen Funktion wird erhalten, indem man die ursprüngliche Funktion mit der negativen Sekundärfunktion $(n-1)$ter Ordnung multipliziert.»

In unserm Fall ist die ursprüngliche Funktion

$$f(x) = D(x) = v^x l_x$$

folglich

(5) . . . $$\begin{cases} \mu = \delta + \mu_x \\ \mu' = \mu_x' \\ \mu'' = \mu_x'' \\ \mu''' = \mu_x''', \end{cases}$$

$$\vdots$$

wo μ die Intensitätsfunktion von $D(x)$, μ_x die Sterblichkeitsintensität darstellt.

Die 4. Ableitung ist

$$(6)\ldots D^{(4)}_{(x)} = D\,(x)\,(-\varDelta_3)$$

$$= D\,(x)\left(-\left(\frac{d}{dx}-\mu\right)\left(\frac{d}{dx}-\mu\right)\left(\frac{d}{dx}-\mu\right)\mu\right)$$

Nun ist wegen

$$\varDelta_n = \left(\frac{d}{dx}-\mu\right)\varDelta_{n-1},$$

$$\varDelta_1 = \mu' - \mu^2$$

$$\varDelta_2 = \mu'' - 3\,\mu\mu' + \mu^3$$

$$\varDelta_3 = \mu''' - 4\,\mu\mu'' + 6\,\mu^2\,\mu' - 3(\mu')^2 - \mu^4,$$

in unserem Fall wegen (5):

$$\varDelta_3 = \mu_x''' - 4\,(\mu_x+\delta)\,\mu_x'' + 6\,(\mu_x+\delta)^2\,\mu_x' - 3\,\mu_x'^2 - (\mu_x+\delta)^4$$

so dass wegen (6):

$$(7)\ldots D^{(4)}_{(x)} = D(x)\,(-\mu_x''' + 4\,(\mu_x+\delta)\,\mu_x'' - 6\,(\mu_x+\delta)^2\,\mu_x' + 3\,\mu_x'^2 + (\mu_x+\delta)^4)$$

Im Fall des Makehamschen Gesetzes gilt wegen (2), wenn gleichzeitig nach Potenzen von $\lambda\,(x)$ geordnet wird:

$$(8)\ldots D^{(4)}_{(x)} = D\,(x)\,(\mathrm{Log}\,c)^4\,(\alpha + \beta\,\lambda_x + \gamma\,\lambda_x^2 + d\lambda_x^3 + \lambda_x^4)$$

Die Koeffizienten haben folgende Werte:

$$(8\,a)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha = K^4 \\ \beta = K^4 - (1+K)^4 \\ \gamma = 1 + 6\,(1+K)^2 \\ d = -2\,(3+2K) \end{array}\right.$$

und gehorchen wegen $-1 < K < 0$ den Ungleichungen

$$(8b) \quad \begin{cases} 0 < \alpha < +1 \\ -1 < \beta < +1 \\ +1 < \gamma < +7 \\ -6 < d < -2 \end{cases}$$

Nun gilt wegen (1) allgemein:

$$9) .. \quad \lambda(x+h) = c^h \cdot \lambda(x)$$

und daher

$$D^{(4)}_{(x+h)} = D_{(x+h)} (\operatorname{Log} c)^4 (\alpha + \beta \lambda_x c^h + \gamma \lambda_x^2 c^{2h} + d \lambda_x^3 c^{3h} + \lambda_x^4 c^{4h})$$

so dass

$$(10) .. \quad \frac{D^{(4)}_{(x+h)}}{D_{(x)}} = (\operatorname{Log} c)^4 e^{\lambda_x} (vs)^h e^{-\lambda_x c^h} (\alpha + \beta \lambda_x c^h + \\ + \gamma \lambda_x^2 c^{2h} + d \lambda_x^3 c^{3h} + \lambda_x^4 c^{4h})$$

oder abgekürzt:

$$(11) .. \quad \frac{D^{(4)}_{(x+h)}}{D_{(x)}} = (\operatorname{Log} c)^4 e^{\lambda_x} (vs)^h f(x, h)$$

wobei

$$(11a) .. \quad f(x, h) = e^{-\lambda_x c^h} (\alpha + \beta \lambda_x c^h + \gamma \lambda_x^2 c^{2h} + d \lambda_x^3 c^{3h} + \lambda_x^4 c^{4h})$$

Ersetzt man in (11) und (11 a) den Parameter h durch $h = \frac{n+t}{m}$, so nimmt die Restformel I die Form an:

$$(12) \quad R = \frac{(\operatorname{Log} c)^4}{4!\, m^5} e^{\lambda_x} \int_0^1 t^2 (1-t)^2 (vs)^{\frac{t}{m}} \sum_0^\infty {}_n (vs)^{\frac{n}{m}} f(x, n, t)\, dt$$

Hier setzt nun die *Schätzung* ein. Setzen wir abkürzend

$$\lambda_x \, c^{\frac{n+t}{m}} = u \tag{13}$$

so wird

$$f(x, n, t) = f(u) = e^{-u} (\alpha + \beta u + \gamma u^2 + d u^3 + u^4) \tag{14}$$

und da die Koeffizienten der ganzen rationalen Funktion in der Klammer den Ungleichungen (8 b) genügen, so gilt für jeden positiven, endlichen Wert von u

$$e^{-u} (0 - u + u^2 - 6u^3 + u^4) < f(u) < e^{-u} (1 + u + 7u^2 - 2u^3 + u^4)$$

oder

$$-36 \, \frac{1 - u + 6u^2 - u^3}{36\left(\frac{1}{u} + 1\right) + 18u + 6u^2 + \frac{3}{2}u^3 + \ldots} < f(u) < 4! \, \frac{1 + u + 7u^2 - 2u^3 + u^4}{4! + 4!u + 12u^2 + 4u^3 + u^4 + \ldots}$$

folglich

$$-36 < f(u) < 4!$$

oder

$$-\frac{3}{2} < \frac{f(u)}{4!} < 1 \tag{15}$$

Aus (15) folgt sofort

$$-\frac{3}{2} \sum_{0}^{\infty}{}_{n} (vs)^{\frac{n}{m}} < \frac{1}{4!} \sum_{0}^{\infty}{}_{n} (vs)^{\frac{n}{m}} f(x, n, t) < \sum_{0}^{\infty}{}_{n} (vs)^{\frac{n}{m}}$$

und wegen

$$0 < vs < 1$$

weiter

$$-\frac{3}{2}\frac{1}{1-(vs)^{1/m}} < \frac{1}{4}\sum_0^\infty{}_n\,(vs)^{\frac{n}{m}} f(x,n,t) < \frac{1}{1-(vs)^{1/m}}$$

Nach einem bekannten Satze über bestimmte Integrale gelten daher die Ungleichungen:

$$(16)\,.\,.\quad -\frac{3}{2}\frac{(\mathrm{Log}\,c)^4}{m^5\,(1-(sv)^{1/m})}\,e^{\lambda x}\,J < R < \frac{(\mathrm{Log}\,c)^4}{m^5\,(1-(sv)^{1/m})}\,e^{\lambda x}\,J$$

worin

$$(16a)\qquad J = \int_0^1 t^2\,(1-t)^2\,(vs)^{\frac{t}{m}}\,dt$$

Setzen wir $\qquad \varepsilon = \mathrm{Log}\frac{1}{vs}$

$$(17)\,.\,.\ \text{oder}\qquad \varepsilon = \delta + \mathrm{Log}\frac{1}{s},$$

so wird

$$J = \int_0^1 t^2\,(1-t)^2\,e^{-\frac{\varepsilon}{m}t}\,dt.$$

Der Wert dieses Integrals ergibt sich aus V, (5) für $n = 3,\ m = 2,\ x = \frac{\varepsilon}{m}$:

$$(18)\qquad J = 2!\sum_0^\infty(-1)^\nu\,\frac{(\nu+2)!}{\nu!\,(\nu+5)!}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^\nu,$$

Diese Reihe konvergiert für jeden endlichen Wert $\frac{\varepsilon}{m}$ und ist wegen ihrer raschen Konvergenz zur numerischen Berechnung des Integrals J geeignet.

(19).. Setzen wir $A_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{(\nu+2)!}{2!} \frac{5!}{(\nu+5)!}$,

so lauten unsere Ungleichungen zur Abschätzung des Restes:

$$(20) \quad -\frac{1}{20}\left(\frac{\operatorname{Log} c}{m}\right)^4 e^{\lambda x} \frac{\sum_0^\infty A_\nu \left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^\nu}{m(1-e^{-\varepsilon/m})} < R < \frac{1}{30} \cdot \left(\frac{\operatorname{Log} c}{m}\right)^4 \cdot e^{\lambda x} \frac{\sum_0^\infty A_\nu \left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^\nu}{m(1-e^{-\varepsilon/m})}$$

Diese Formel eignet sich sehr gut zur raschen Abschätzung des Restgliedes der Woolhouseschen Formel. Wir haben sie denn auch zur numerischen Berechnung des Restes (Abschnitt VII) benützt. Die Reihe im Zähler konvergiert noch rascher als die Exponentialreihe, so dass infolge des der Summe vorangehenden numerisch kleinen Faktors nur wenige Glieder der Reihe zu berechnen sind.

Lediglich der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass es gelingt, in (20) die Division der beiden unendlichen Reihen auszuführen und eine nach Potenzen von $\frac{\varepsilon}{m}$ fortschreitende Reihe zu finden, welche innerhalb eines gewissen Konvergenzkreises um 0 konvergiert.

Wir setzen abkürzend

(21) $\frac{\varepsilon}{m} = z$, sodass der Quotient in (20) lautet:

$$\frac{\sum\limits_0^\infty A_\nu z^\nu}{m(1-e^{-z})} = \frac{1}{\varepsilon} e^z \frac{z}{e^z-1} \sum_0^\infty A_\nu z^\nu$$

$$(22) \ldots \quad = \frac{1}{\varepsilon} \sum_0^\infty C_\lambda z^\lambda \cdot \sum_0^\infty \frac{B_\mu}{\mu!} z^\mu \sum_0^\infty A_\nu z^\nu$$

In (22) bedeuten die C_λ die Koeffizienten der gewöhnlichen Exponentialreihe, während die B_μ die Koeffizienten in der Reihenentwicklung von *Euler*

$$\frac{z}{e^z-1} = 1 + \frac{B_1}{1!} z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \cdots \frac{B_\mu}{\mu!} z^\mu + \cdots,$$

also die sogenannten *Bernoullischen Zahlen* bedeuten. Führt man in (22) die gliedweise Multiplikation der drei gleichmässig konvergierenden unendlichen Reihen durch, so gelangt man auf eine Reihe von der Form:

$$(23) \quad \frac{1}{\varepsilon} e^z \frac{z}{e^z-1} \sum_0^\infty A_\nu z^\nu = \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \frac{1}{3.7} \frac{z^2}{2!} + \frac{1}{2.5.7} \frac{z^4}{4!} - \frac{5}{2.3.7.11} \frac{z^6}{6!} + - \cdots\cdots\right)$$

deren Glieder sehr rasch abnehmen. Von einer eingehenden Untersuchung der Reihe wurde jedoch abgesehen.

Unter Benützung einer unbestimmten Grösse $0 < \varsigma < 1$ kann man nun (20) auf die Form bringen:

$$(24) \quad |R| = \varsigma \cdot \left(\frac{\operatorname{Log} c}{m}\right)^4 \frac{e^{\lambda x}}{20}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{42 m^2} + \frac{\varepsilon^4}{1680\, m^4} - \frac{\varepsilon^6}{66528\, m^5} + - \ldots\right)$$

Die Durchführung des Verfahrens ist auch bei der «Seliwanoffschen Restformel» III möglich. Es ergibt sich

$$-\frac{3}{2}\frac{(vs)^{\varsigma/m}}{1-(vs)^{1/m}}\frac{(\mathrm{Log}\,c)^4}{30\,m^5}e^{\lambda_x} < R^{\mathrm{II}} < \frac{(vs)^{\varsigma/m}}{1-(vs)^{1/m}}\cdot\frac{(\mathrm{Log}\,c)^4}{30\,m^5}e^{\lambda_x}$$

oder mit Benützung einer weitern unbestimmten Grösse ς'

$$(25)\ldots \qquad R^{\mathrm{II}} = \varsigma'\,\frac{(vs)^{\varsigma/m}}{1-(vs)^{1/m}}\,\frac{(\mathrm{Log}\,c)^4}{20\,m^5}\,e^{\lambda_x},$$

worin $0 < \varsigma' < 1$ und $0 < \varsigma < 1$.

* * *

Die Durchführung der Berechnung von R^{III} nach der Markoffschen Formel führt auf die einfache Schlussformel:

$$(26)\quad R^{\mathrm{III}} = \theta\,\frac{(\mathrm{Log}\,c)^3}{720\,m^4}\left((\lambda_x - K)^3 + \lambda_x\,(1 - 3\,(\lambda_x - K))\right)$$

wo $0 < \theta < 1$ und $K = \dfrac{-\varepsilon}{\mathrm{Log}\,c}$ (vgl. 1). Sie ist nur gültig,

wenn $D^{(4)}_{(z)}$ und $D^{(6)}_{(z)}$ stets gleichzeitig positiv (bzw. negativ) bleiben oder anders ausgedrückt: Die Restformel (26) ist gültig für alle Alter x, für welche die Moserschen Nebenfunktionen

$$\Delta_3 \text{ und } \Delta_5$$

angewendet auf $D_{(z)}$ für alle Werte z zwischen x und ∞ dasselbe Vorzeichen aufweisen.

VII. Abschnitt.

Bezeichnen wir mit $F_{(m)}$ den Ausdruck

$$(1) \qquad F_{(m)} = \frac{1}{30} \left(\frac{\operatorname{Log} c}{m} \right)^4 \frac{\sum_0^\infty A_\nu \left(\frac{\varepsilon}{m} \right)^\nu}{m \, (1 - e^{-\varepsilon / m})},$$

so können wir den Rest R der durch Poterin du Motel ergänzten Formel von Woolhouse IV (1) für einen bestimmten Wert des technischen Zinsfusses in folgende zwei Schranken einschliessen:

$$(2) \qquad -1{,}5 \, F_{(m)} \, e^{\lambda(x)} < R_{(m,\, x)} < F_{(m)} \, e^{\lambda(x)}$$

Der Rest wird also um so grösser ausfallen, je höher das Alter x ist, dagegen um so kleiner, je grösser die Zahl m der Ratenzahlungen ist.

Halten wir uns an das früher behandelte Beispiel, die Tafel $0^{M(5)}$, $3\tfrac{1}{2}\,\%$), so gewinnen wir folgende Übersicht:

$$\varepsilon = \operatorname{Log} \frac{1}{s} + \delta = 0{,}040\;29004$$

m	$F_{(m)}$
1	0,000 0438 006
2	0,000 0027 376
4	0,000 0001 711
12	0,000 0000 021
∞	0,000 0000 000

Widmen wir uns vorerst dem Spezialfall $m = 1$. Für die nachstehend angegebenen Argumentwerte ist der Rest $R(1, x)$ in folgende 2 Schranken eingeschlossen:

x	$e^{\lambda x}$	$R(1, x)$	
		untere Schranke (negativ)	obere Schranke (positiv)
20	1,006 989	0,0000 6616	0,0000 4411
30	1,017 242	0000 6684	0000 4456
40	1,042 856	0000 6852	0000 4568
50	1,108 499	0000 7282	0000 4855
60	1,287 694	0000 8460	0000 5640
70	1,860 194	0001 2222	0000 8148
80	4,588 674	0003 0148	0002 0099
90	42,09687	0027 6581	0018 4387
100	9706,3463	6377 1616	4251 4411

Der Rest bleibt also nach dieser Berechnung bis fast zum Alter 70 unter dem Betrag 0,0001 und berührt infolgedessen die 4. Dezimalstelle im Rentenbarwert nicht. Wenn man also vorläufig von den höchsten Altern der Absterbeordnung absieht, so muss die gewöhnliche Formel ohne Restglied als praktisch genauer Ausdruck des Barwertes $\bar{a}_x$ angesehen werden.

Vergleichen wir das Ergebnis mit dem in Abschnitt III gefundenen Resultat, so erkennen wir, dass die dort angegebenen Differenzen (Tabelle, Absoluter Fehler bei (2) in bezug auf (4)) über unsere theoretische Fehlergrenze R (1, x) hinausgehen. Es rührt dies davon her, dass die in jener Tabelle enthaltenen, für die Formel von Woolhouse geltenden Barwerte auf Grund der *Commutationswerte* berechnet wurden, also einer für praktische Zwecke hergestellten Tabelle. Dabei wurden die Zahlen l_x ausgehend von $l_{10} = 107\,324$, sowie D_x und N_x

ohne Dezimalstellen nach dem Komma angegeben und verwendet (abgesehen von den höhern Altern). Jene Tafeln sind, einem rein praktischen Zwecke dienend, auf einen möglichst geringen Zahlenumfang gestellt, während die der Makehamschen Funktion $l_{(x)} = ks^x g^{c^x}$ entsprechenden Zahlenwerte, wie sie in unsern Formeln zum Ausdruck kommen, solche «absoluter Genauigkeit» sind.

Diese Verschiedenheit der Grundzahlen — eine Illustration zu den Begriffen Approximations- und Präzisionsmathematik — bedingt die Abweichung in den Ergebnissen. Stellen wir uns zum Schluss auf den Boden der Praxis, der Approximation, so muss die Übereinstimmung der Resultate beider Methoden als durchaus befriedigend bezeichnet werden.

Wir wenden uns nun wieder dem allgemeinen Fall zu und berechnen den Wert der obern Schranke von $R(m, x)$ für die verschiedenen, in der Praxis vorkommenden Fälle $m = 2$, 4 und 12 und verschiedene Werte von x. Die untere Schranke ergibt sich durch Multiplikation der nachstehenden Zahlwerte mit dem Faktor — 1,5.

x	Obere Schranke von $R(m, x)$: $e^{\lambda(x)} F(m)$		
	$m = 2$	$m = 4$	$m = 12$
20	0,000 00276	0,000 00017	0,000 00000 (2)
30	000 00278	000 00017	000 00000 (2)
40	000 00285	000 00018	000 00000 (2)
50	000 00303	000 00019	000 00000 (2)
60	000 00353	000 00022	000 00000 (3)
70	000 00509	000 00032	000 00000 (4)
80	000 01256	000 00079	000 00001
90	000 11525	000 00720	000 00089
100	0,026 57238	0,001 66079	000 20504

Sowohl der Rest $R_{(1,\,x)}$ als auch $R_{(m,\,x)}$ erreichen somit, von den höchsten Altern abgesehen, so kleine Beträge, dass sie praktisch zu vernachlässigen sind. Umsomehr gilt dies von der Differenz

$$R(1, x) - R(m, x)$$

so dass die gewöhnliche Formel von Woolhouse

$$a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_x + \delta),$$

in welcher $R(1, x) - R(m, x) = 0$ gesetzt ist, ihre volle Berechtigung hat. Es ist lediglich eine Spezialuntersuchung für *grosse Werte von* x (also die obersten Altersstufen) nötig. Diese ist im folgenden Abschnitte durchgeführt.

Wir stellen fest, dass für $m = 12$ die obere und untere Schranke von $R(m, x)$ kleiner ist als 10^{-8}. *Es gilt also die Gleichung*

$$\bar{a}_x = a_x^{(12)} + \frac{1}{24} - \frac{\mu_x + \delta}{12^3}$$

für alle $x \leqq 80$ *mit derselben Genauigkeit, mit welcher der Logarithmus einer Zahl aus einer 8-stelligen Logarithmentafel entnommen werden kann.*

VIII. Abschnitt.

Zur Abschätzung des Restgliedes $R(m, x)$ für grosse Werte von x gehen wir aus von VI (12), indem wir zur Abkürzung setzen:

$$(1) \,.\,.\; y = \int_0^1 t^2 (1-t)^2 (vs)^{\frac{t}{m}} \sum_0^{\infty}{}_n (vs)^{n\,m} f(x, n, t)\, dt$$

so dass

$$(2) \ldots \qquad R(m, x) = \frac{(\mathrm{Log}\, c)^4}{4\,!\, m^5}\, e^{\lambda x} \cdot y$$

Im Integral y können Summation und Integration vertauscht werden. Alsdann substituieren wir:

$$(3) \ldots \qquad \lambda_x\, c^{\frac{n+t}{m}} = u, \text{ Grenzen: }$$

t	u
0	$\lambda\, c^{n/m}$
1	$\lambda\, c^{n+1\,m}$

so dass

$$\frac{n+t}{m} = \frac{1}{\mathrm{Log}\, c}\, \mathrm{Log}\, \frac{u}{\lambda}$$

$$t = \frac{1}{\mathrm{Log}\, c}\left(m\, \mathrm{Log}\, \frac{u}{\lambda} - n\, \mathrm{Log}\, c\right)$$

$$dt = \frac{m}{\mathrm{Log}\, c}\, \frac{du}{u}$$

ferner

$$(4)\ f(x, n, t) = e^{-u}(\alpha + \beta u + \gamma u^2 + d u^3 + u^4) = f(u)$$

Somit geht das Integral y über in

$$y = \frac{m}{(\mathrm{Log}\, c)^5} \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_{\lambda c^{n/m}}^{\lambda c^{n+1/m}} \left(m\, \mathrm{Log}\, \frac{u}{\lambda} - n\, \mathrm{Log}\, c\right)^2 \Bigg((n+1)\, \mathrm{Log}\, c -$$

$$- m\, \mathrm{Log}\, \frac{u}{\lambda}\Bigg)^2 e^{-\frac{\left(\mathrm{Log}\, \frac{1}{s} + \delta\right)\ (\mathrm{Log}\, u - \mathrm{Log}\, \lambda)}{\mathrm{Log}\, c}} \cdot f(u)\, \frac{du}{u}$$

oder unter Benützung des Parameters

$$k = -\frac{\operatorname{Log}\frac{1}{s} + \delta}{\operatorname{Log} c},$$

$$y = \frac{m\lambda^{-k}}{(\operatorname{Log} c)^5}\sum_0^\infty{}_n \int\limits_{\lambda c^{n/m}}^{\lambda c^{n+1/m}} \left(m \operatorname{Log}\frac{u}{\lambda} - \operatorname{Log} c\right)^2 \Big((n+1)\operatorname{Log} c -$$

$$- m \operatorname{Log}\frac{u}{\lambda}\Big)^2 u^{k-1} f(u)\, du$$

oder

$$(5) \;\ldots\quad y = \frac{m\lambda^{-k}}{(\operatorname{Log} c)^5}\sum_0^\infty{}_n \int\limits_{\lambda c^{n/m}}^{\lambda c^{n+1/m}} \psi(u)\, u^{k-1} f(u)\, du$$

wo wir die Abkürzung

$$(6) \;\ldots\quad \psi(u) = \left(\left(m \operatorname{Log}\frac{u}{\lambda} - n \operatorname{Log} c\right)^2 \Big((n+1) \operatorname{Log} c -\right.$$

$$\left. - m \operatorname{Log}\frac{u}{\lambda}\Big)^2\right)$$

eingeführt haben. Letztere Funktion dient uns zur Schätzung des Integrals. Es gilt wegen $c > 1$

$$\lambda c^{\frac{n}{m}} < u < \lambda c^{\frac{n+1}{m}}$$

somit $$c^{\frac{n}{m}} < \frac{u}{\lambda} < c^{\frac{n+1}{m}}$$

und $$\frac{n}{m}\operatorname{Log} c < \operatorname{Log}\frac{u}{\lambda} < \frac{n+1}{m}\operatorname{Log} c$$

$$n \operatorname{Log} c < m \operatorname{Log} \frac{u}{\lambda} < (n+1) \operatorname{Log} c,$$

woraus einerseits:

$$0 < m \operatorname{Log} \frac{u}{\lambda} - n \operatorname{Log} c < \operatorname{Log} c;$$

anderseits:

$$-n \operatorname{Log} c > -m \operatorname{Log} \frac{u}{\lambda} > -(n+1) \operatorname{Log} c$$

$$\operatorname{Log} c > (n+1) \operatorname{Log} c - m \operatorname{Log} \frac{u}{\lambda} > 0$$

also

$$0 < \left(m \operatorname{Log} \frac{n}{\lambda} - n \operatorname{Log} c \right)^2 < (\operatorname{Log} c)^2;$$

$$0 < \left((n+1) \operatorname{Log} c - m \operatorname{Log} \frac{u}{\lambda} \right)^2 < (\operatorname{Log} c)^2$$

so dass längs des ganzen Integrationsweges gilt

$$(6a) \ \ldots \qquad 0 < \psi(u) < (\operatorname{Log} c)^4.$$

Bezeichnet also ξ einen positiven, echten Bruch, so gilt folgende Gleichung

$$(7) \ \ldots \quad \int_{\lambda c^{\frac{n}{m}}}^{\lambda c^{\frac{n+1}{m}}} \psi(u)\, u^{k-1} f(u)\, du = \xi (\operatorname{Log} c)^4 \cdot$$

$$\cdot \int_{\lambda c^{\frac{n}{m}}}^{\lambda c^{\frac{n+1}{m}}} u^{k-1} f(u)\, du$$

vorausgesetzt, dass auf dem ganzen Wege beständig

(8) $$u^{k-1} f(u) > 0,$$

dass also die Funktion

$$u^{k-1} f(u) = u^{k-1} e^{-u} (\alpha + \beta u + \gamma u^2 + d u^3 + u^4)$$

auf dem ganzen Integrationsweg keine Wurzel aufweist.

Im Integral (7) ist nun der Integrand von der Laufzahl n *unabhängig*, so dass sich ergibt, symbolisch geschrieben:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \int_{\lambda c^{\frac{n}{m}}}^{\lambda c^{\frac{n+1}{m}}} = \int_{\lambda c^{0/m}}^{\lambda c^{1/m}} + \int_{\lambda c^{1/m}}^{\lambda c^{2/m}} + \int_{\lambda c^{2/m}}^{\lambda c^{3/m}} \cdots\cdots = \int_{\lambda}^{\infty}$$

und daher aus (4), (5) und (7)

(9) ... $$y = \xi \frac{\lambda^{-k} m}{\operatorname{Log} c} \int_{\lambda}^{\infty} u^{k-1} f(u)\, du$$

$$= \xi \frac{m \lambda^{-k}}{\operatorname{Log} c} \left(\alpha \int_{\lambda}^{\infty} u^{k-1} e^{-u}\, du \right.$$

$$+ \beta \int_{\lambda}^{\infty} u^{k} \cdot e^{-u}\, du$$

$$+ \gamma \int_{\lambda}^{\infty} u^{k+1} e^{-u}\, du$$

$$+ d \int_{\lambda}^{\infty} u^{k+2} e^{-u}\, du$$

$$\left. + \int_{\lambda}^{\infty} u^{k+3} e^{-u}\, du \right)$$

oder unter Benützung der Definitionsgleichung

$$(10)\,.\,.\qquad Q(\lambda, k) = \int_{\lambda}^{\infty} u^{k-1} e^{-u}\, du$$

$$(11)\,.\,.\qquad y = \xi \frac{m \lambda^{-k}}{\operatorname{Log} c} (\alpha\, Q(\lambda, k)$$

$$+ \beta\, Q(\lambda, k+1)$$

$$+ \gamma\, Q(\lambda, k+2)$$

$$+ d\, Q(\lambda, k+3)$$

$$+ \quad Q(\lambda, k+4))$$

womit wir das gesuchte Integral durch eine Folge von unvollständigen Gammafunktionen ausgedrückt haben.

Für die unvollständigen Gammafunktionen gleichen Parameters gilt die Rekursionsformel

$$Q(\lambda, k+1) = k\, Q(\lambda, k) + e^{-\lambda} \lambda^{k}.$$

Ihre Anwendung führt bei Gleichung (11), deren Koeffizienten α, β, γ, d nach unsern Feststellungen in Abschnitt VI lediglich von k abhangen, auf einen Ausdruck von folgender Form:

$$y = \xi \frac{m \lambda^{-k}}{\operatorname{Log} c} \left(Q(\lambda, k)\, \varphi_1(k) + e^{-\lambda} \lambda^{k} \varphi_2(k)\right)$$

so dass

$$(12)\ldots\ R = \xi \frac{(\operatorname{Log} c)^4}{4\,!\, m^4} \left(\frac{e^{\lambda} \lambda^{-k}}{\operatorname{Log} c} Q(\lambda, k)\, \varphi_1(k) + \frac{\varphi_2(k)}{\operatorname{Log} c} \right)$$

oder

$$(12a)\ldots\quad R = \xi\,\frac{(\mathrm{Log}\,c)^4}{4\,!\;m^4}\left(\overline{a}_x\cdot\varphi_1(k) + \frac{\varphi_2(k)}{\mathrm{Log}\,c}\right),$$

denn es gilt [1]):

$$\overline{a}_x = \frac{e^{\lambda}\,\lambda^{-k}}{\mathrm{Log}\,c}\,Q(\lambda, k)$$

Die Durchführung der angedeuteten Rechnung führt auf die Werte

$$(13)\ \ldots\quad \varphi_1(k) = 0$$

$$\varphi_2(k) = (\lambda - k)^3 + \lambda\,(1 - 3\,(\lambda - k))$$

so dass schliesslich

$$(14)\ldots R(m,x) = \xi\,\frac{(\mathrm{Log}\,c)^3}{4\,!\;m^4}\left((\lambda_x - k)^3 + \lambda_x(1 - 3\,(\lambda_x - k))\right).$$

$$\text{wo } 0 < \xi < 1$$

Die Ableitung ist gültig für jene Werte von $\lambda_{(x)}$ und k, für welche die Bedingung (8) erfüllt ist, welche wiederum aequivalent ist mit

$$(15)\ \ldots\quad \alpha + \beta u + \gamma u^2 + d u^3 + u^4 > 0$$

Da diese Bedingung auf dem ganzen Integrationsweg erfüllt sein muss, so kann sie auch so formuliert werden. Bedeutet u_0 die grösste positive Wurzel der Gleichung vierten Grades $u^4 + d u^3 + \gamma u^2 + \beta\, u + \alpha = 0$, so ist unsere Ableitung gültig für alle jene Werte von $\lambda\,(x)$, welche grösser als u_0 sind. Nun sind die Koeffizienten α, β, γ, d ihrerseits vom Parameter k abhängig, so dass die Bestimmung der grössten positiven Wurzel u_0 auf etwelche Schwierigkeiten stösst.

---

[1]) Vgl. hiezu unsere Arbeit: Mitteilungen Schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 13 (1918), S. 169.

Es lässt sich jedoch zeigen, dass $|d_1| + 1$ eine obere Grenze der positiven reellen Wurzeln darstellt und daher unser Ausdruck (14) gültig ist für alle Werte von x, für welche

$$\lambda_x \geqq 7 + 4k.$$

Die Ableitung gilt also in unserem Fall mindestens für alle $x \geqq 95$ und die Restformel (14) ergibt folgende spezielle Werte:

x	$\frac{1}{\xi} \cdot R(m, x)$			
	$m = 1$	$m = 2$	$m = 4$	$m = 12$
95	0,0001 468	0,0000 092	0,0000 006	0,0000 000
100	0,0006 405	0,0000 400	0,0000 026	0,0000 000

Wir schliessen daraus, dass *auch für die höchsten Alter der Absterbeordnung die Formel von Woolhouse die Barwerte $\bar{a}_x$ und $a_{(x)}^{(m)}$ sehr genau wiedergibt, dass man also den Rest R vernachlässigen darf.*

Wir weisen darauf hin, dass unsere Restformel (14) — abgesehen von einem Proportionalitätsfaktor — mit der auf Grund der Markoffschen Restformel abgeleiteten Schranke VI (26) identisch ist, wobei es uns gelungen ist, für ihre Gültigkeit eine handlichere Bedingung aufzustellen.

IX. Abschnitt.

Wir behandeln nunmehr als Anwendung unserer Resultate einige Spezialfälle.

1. *Im Spezialfall* $g = 1$ (Dormoysches Gesetz) ergibt sich statt einer Ungleichung eine Gleichung für den Rest R, indem $\lambda(x) = 0$ und daher

$$f(u) = \alpha = \frac{\left(\operatorname{Log}\frac{1}{s} + \delta\right)^4}{(\operatorname{Log} c)^4}, \text{ so dass}$$

$$(1) \qquad R = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^4}{720\,m\,(1 - e^{-\varepsilon/m})} \sum_0^\infty A_\nu \left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^\nu$$

2. *Verbindungsrenten.* Ist statt an eine einzige Person an eine Verbindung von p Personen eine in unterjährigen Raten zahlbare Leibrente auszurichten, solange als die Verbindung besteht, so wird der Barwert gefunden, indem die diskontierte Zahl D_x ersetzt wird durch

$$D_{xyz}\ldots (p \text{ Personen}) \begin{cases} = v^x\, l_x\, l_y\, l_z \ldots \\ = D_x\, l_y\, l_z \ldots . \end{cases}$$

wo $x \geqslant y \geqslant z \ldots$ vorausgesetzt sei. Die Intensitätsfunktion besteht dann aus $(p+1)$ Komponenten.

$$\mu = \mu_x + \mu_y + \mu_z + \cdots\cdots + \delta$$

Es folgt ohne weiteres

$$(2)\ldots \quad \overline{a}_{xyz}\ldots = a^{(m)}_{xyz}\ldots + \frac{1}{2m} - \frac{1}{12m^2}(\mu_x + \mu_y +$$

$$+ \mu_z + \ldots + \delta) + R(m, x, y, z \ldots)$$

worin

$$(3)\ldots \quad R(m, x, y, z\ldots) = \frac{1}{4!\,m^5}\int_0^1 t^2(1-t)^2 \sum_0^\infty n$$

$$\frac{D^{(4)}_{\left(x+\frac{n+t}{m},\; y+\frac{n+t}{m},\; z+\frac{n+t}{m},\;\ldots\right)}\, dt}{D_{(x,\,y\,z\ldots)}}$$

Bei Geltung des Makehamschen Gesetzes kann dieser Restausdruck in genau gleicher Weise wie früher geschätzt werden, indem zu setzen ist

$$(4)\ldots \qquad \lambda_{xyz\ldots} = (c^x + c^y + c^z + \ldots.) \operatorname{Log} \frac{1}{g}$$

$$(5)\ldots \qquad \varepsilon' = p \operatorname{Log} \frac{1}{s} + \delta,$$

worauf man wiederum auf die im Spezialfall der Rente auf *ein* Leben abgeleiteten Restformeln gelangt.

3. *Zeitrenten.* Die Relationen für die Bewertung der Zeitrenten folgen aus den entsprechenden für Leibrenten, indem man die Intensität der Sterblichkeit vernachlässigt, also setzt

$$(6)\ldots \qquad \mu_x = 0$$

Vorerst ergeben sich die Barwerte bei ganzjähriger Zahlungsweise der Renten wie folgt

a) Ewige Renten

$$(7)\ldots \quad \begin{cases} \bar{a}_{\overline{\infty}|} = \int\limits_0^\infty e^{-\delta t}\, dt = \dfrac{1}{\delta} \\ a_{\overline{\infty}|} = \sum\limits_0^\infty{}_t\, e^{-\delta t} = \dfrac{e^{-\delta}}{1 - e^{-\delta}} = \dfrac{1}{e^{\delta} - 1} = \dfrac{1}{i}. \end{cases}$$

b) Temporäre Renten.

$$(8)\ldots \quad \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n}|} = \bar{a}_{\overline{\infty}|} - e^{-\delta n}\, \bar{a}_{\overline{\infty}|} = (1 - e^{-\delta n})\, \bar{a}_{\overline{\infty}|} \\ a_{\overline{n}|} = a_{\overline{\infty}|} - e^{-\delta n}\, a_{\overline{\infty}|} = (1 - e^{-\delta n})\, a_{\overline{\infty}|} \end{cases}$$

Bei unterjähriger Zahlung der Renten gelten folgende Formeln

$$\bar{a}_{\overline{\infty}|} = a^{(m)}_{\overline{\infty}|} + \frac{1}{2m} - \frac{\delta}{12m^2} + R_{(m)}$$

$$\bar{a}_{\overline{\infty}|} = a_{\overline{\infty}|} + \frac{1}{2} - \frac{\delta}{12} + R(1)$$

oder wegen (7)

$$(9)\quad a^{(m)}_{\overline{\infty}|} = a_{\overline{\infty}|}\left(1 + \frac{m-1}{2m}\,i - \frac{m^2-1}{12m^2}\,i\delta + i\,(R_{(1)} - R_{(m)})\right)$$

und nach Erweiterung mit $(1 - e^{-\delta n})$, wegen (8):

$$(10)\quad a^{(m)}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}\left(1 + \frac{m-1}{2m}\,i - \frac{m^2-1}{12m^2}\,i\delta + i\,(R_{(1)} - R_{(m)})\right)$$

In diesem Fall ist man für den Rest nicht auf eine Schätzung angewiesen, sondern kann ihn *genau* darstellen. Für $\mu_x = 0$ wird

$$D_{(x)} = e^{-\delta x}$$

$$D^{(4)}_{(x)} = e^{-\delta x}\,\delta^4$$

$$\frac{D^{(4)}_{\left(x+\frac{n+t}{m}\right)}}{D_{(x)}} = e^{-\delta\frac{n+t}{m}} \cdot \delta^4$$

Somit nach der Restformel $(5a)$ von Abschnitt IV:

$$R_{(m)} = \frac{\delta^4}{4!\,m^5}\int_0^1 t^2\,(1-t)^2\, e^{-\delta\frac{t}{m}} \sum_0^\infty{}_n\, e^{-\delta\frac{n}{m}}\,dt$$

$$= \frac{\delta^4}{4!\,m^5}\,\frac{J}{1 - e^{-\delta/m}},$$

wo J wieder das früher behandelte Integral darstellt. Damit ist der Rest genau bestimmt. Zur numerischen Berechnung können wir die Division der Potenzreihen wie im allgemeinen Fall durchführen, so dass sich ergibt

$$R_{(m)} = \frac{\delta^3}{30.4!\, m^4} e^{\frac{\delta}{m}} \frac{\frac{\delta}{m}}{e^{\frac{\delta}{m}}-1} \sum_0^\infty A_\nu \left(\frac{\delta}{m}\right)^\nu$$

$$= \frac{\delta^3}{720 m^4}\left(1 - \frac{\delta^2}{42 m^2} + \frac{\delta^4}{1680 m^4} - \frac{\delta^6}{66528\, m^6} + \ldots\right),$$

$$R_{(1)} = \frac{\delta^3}{720}\left(1 - \frac{\delta^2}{42} + \frac{\delta^4}{1680} - \frac{\delta^6}{66528} + - \ldots.\right),$$

folglich

$$(11)\ldots\ i\,(R_{(1)} - R_{(m)}) = \frac{i\delta^3}{720}\left(\left(1 - \frac{1}{m^4}\right)\left(1 - \frac{1}{m^6}\right)\frac{\delta^2}{42} + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{1}{m^8}\right)\frac{\delta^4}{1680} - \left(1 - \frac{1}{m^{10}}\right)\frac{\delta^6}{66528} + - \ldots.\right)$$

Dieser Rest kann übrigens direkt durch das Integral ausgedrückt werden:

$$(11a)\ldots\ i\,(R_{(1)} - R_{(m)}) = \frac{i\,\delta^4}{4!}\int_0^1 t^2 (1-t)^2 \left[\frac{e^{-\delta t}}{1 - e^{-\delta t}} - \right.$$

$$\left. - \frac{e^{-\frac{\delta t}{m}}}{m^5\left(1 - e^{-\frac{\delta}{m}}\right)}\right] dt.$$

Weil $D_{(x)} = e^{-\delta x}$, so wird ferner

$$(12)\ldots \quad \begin{cases} D^{(4)}_{(x)} = e^{-\delta x}\,\delta^4 > 0 \\ D^{(6)}_{x} = e^{-\delta x}\,\delta^6 > 0 \end{cases}$$

Die Markoffschen Bedingungen sind also erfüllt, so dass die nach ihm benannte Restformel in diesem Fall lautet:

$$R_{(m)} = \theta \frac{1}{720 m^4} \frac{-D^{(3)}_{(x)}}{D_{(x)}}$$

$$= \theta \frac{\delta^3}{720 m^4}$$

$$R_{(1)} = \theta' \frac{\delta^3}{720}, \text{ folglich}$$

$$(13)\ldots \quad i(R_{(1)} - R_{(m)}) = \theta'' \frac{i\,\delta^3}{720}\left(1 - \frac{1}{m^4}\right)$$

wo θ'' eine unbestimmte Grösse $0 < \theta'' < 1$.

Die nach Seliwanoff benannte Formel

$$R_{(m)} = \frac{1}{720\, m^5} \sum_0^\infty {}_n \frac{D^{(4)}_{\left(x + \frac{n+\varsigma}{m}\right)}}{D_{(x)}}$$

ergibt

$$R_{(m)} = \frac{\delta^4}{720\, m^5} \sum_0^\infty e^{-\frac{\delta\,(n+\varsigma)}{m}}$$

$$= \frac{\delta^4}{720\, m^5}\, e^{-\frac{\delta\,\varsigma}{m}} \frac{1}{1 - e^{-\delta/m}}$$

$$= \frac{\delta^3}{720\, m^4}\, e^{\frac{\delta}{m}(1-\varsigma)} \frac{\delta/m}{e^{\delta/m} - 1}$$

$$R_{(m)} = \frac{\delta^3}{720\, m^4} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-\varrho)^\nu \left(\frac{\delta}{m}\right)^\nu}{\nu\,!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n\,!} \left(\frac{\delta}{m}\right)^n$$

$$= \frac{\delta^3}{720 m^4} \left(1 - \left(\varrho - \frac{1}{2}\right) \frac{\delta}{m} - \left(\frac{\varrho(1-\varrho)}{2} - \frac{1}{12}\right)\left(\frac{\delta}{m}\right)^2 \ldots\right)$$

$$R_{(1)} = \frac{\delta^3}{720} \left(1 - \left(\varrho' - \frac{1}{2}\right)\delta - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

so dass

$$(14) \ldots \; i\,(R_{(1)} - R_{(m)}) = \frac{i\,\delta^3}{720} \left(\left(1 - \frac{1}{m^4}\right) - \ldots\right)$$

In diesem Spezialfall führen also die drei Restformeln von Poterin du Motel, Seliwanoff und Markoff im wesentlichen auf das gleiche Resultat, nämlich

$$(15) \ldots \quad \underline{i\,(R_{(1)} - R_{(m)}) < \frac{i\,\delta^3}{720} \left(1 - \frac{1}{m^4}\right)}$$

Nun gelten praktisch die Grenzen

$$0 < \; i \; < 0{,}1$$

$$0 < \; \delta^3 \; < 0{,}001$$

$$0 < \frac{i\,\delta^3}{720} < \frac{10^{-7}}{0{,}72}$$

$$(16) \ldots \text{ also } i\,(R_{(1)} - R_{(m)}) < 0{,}000\,00014 \left(1 - \frac{1}{m^4}\right)$$

Die am meisten gebräuchlichen Zinsfüsse liegen jedoch unter 10 %. Solange der Zinsfuss 6 % nicht übersteigt, gilt

$$0 < i < 0{,}06$$

$$0 < \delta^3 < (5{,}827)^3 \cdot 10^{-6}$$

$$(17) \ldots \; i\,(R\,(1) - R\,(m)) < 0{,}000\,0000\,16 \left(1 - \frac{1}{m^4}\right)$$

Für die praktisch am meisten gebräuchlichen Zinsfüsse liefert also die Formel

$$(18) \qquad a_n^{(m)} = a_n \left(1 + \frac{m-1}{2m}\, i - \frac{m^2-1}{12\, m^2}\, i\,\delta\right)$$

einen bis auf mindestens 7 Dezimalstellen genauen Barwert.

Louis Maingie erhält in seinem Buche über die Theorie des Zinsfusses [1]) durch direkte Anwendung der Eulerschen Summenformel die Näherungsformel:

$$\begin{matrix}\text{(Formel 52} \\ \text{bei Maingie)}\end{matrix} \ldots \; a_{\overline{n|}}^{(m)} = a_{\overline{n|}} + \frac{m-1}{2m}(1 - v^n) -$$

$$- \frac{\delta\,(m^2-1)}{12\, m^2}(1 - v^n),$$

ohne jedoch den naheliegenden Übergang auf unsern Ausdruck (18) zu machen und ohne sich auf eine Untersuchung des Restes einzulassen. Der Autor bemerkt daran anschliessend folgendes:

«Lorsqu'une grande précision n'est pas éxigée, on peut même négliger le dernier terme de (52). Cette formule est commode; elle donne

[1]) *L. Maingie*, La théorie de l'Intérêt et ses Applications, Bruxelles (1911), S. 47.

$$a^{(2)}_{\overline{n|}} = a_{\overline{n|}} + 0{,}25\,(1 - v^n)$$

$$a^{(4)}_{\overline{n|}} = a_{\overline{n|}} + 0{,}375\,(1 - v^n)$$

$$a^{(12)}_{\overline{n|}} = a_{\overline{n|}} + 0{,}458\,(1 - v^n)$$

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = a_{\overline{n|}} + \frac{1}{2}\,(1 - v^n) »$$

An diese Bemerkung anknüpfend sei noch kurz bewiesen, dass die von Maingie genannte Näherungsformel, welche wir schreiben können

$$(19) \ldots \qquad a^{(m)}_{\overline{n|}} = a_{\overline{n|}} \left(1 + \frac{m-1}{2m}\, i\right)$$

unter gewissen Voraussetzungen nicht nur zu ausreichend genauen, sondern zu den *praktisch richtigen* Resultaten führt. Bekanntlich berechnen die Sparkassen den Marchzins *linear*. Wird eine periodische Einzahlung von jährlich 1 gemacht, die in m unterjährigen Raten von $\frac{1}{m}$ entrichtet wird und für welche der Zins am *Ende des Jahres* zum Kapital geschlagen wird, so wachsen die m Raten mit ihren Zinsen in einem Jahr an auf

$$s^{(m)}_{\overline{1|}} = \frac{1}{m}\left(\left(1 + \frac{m-1}{m}\, i\right) + \left(1 + \frac{m-2}{m}\, i\right) + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(1 + \frac{1}{m}\, i\right) + 1\right)$$

$$= 1 + \frac{m-1}{2m}\, i, \text{ so dass}$$

$$a^{(m)}_{\overline{n|}} = s^{(m)}_{\overline{1|}} \cdot a_{\overline{n|}},$$

womit Formel (19) bewiesen ist.

Es ist in diesem Zusammenhang von Interesse, die viel benützten Formeln

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\left(r^{\frac{m-1}{m}} + r^{\frac{m-2}{m}} + \ldots + 1\right)\ddot{s}_{\overline{n}|}$$

und

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\left(r^{\frac{m-1}{m}} + r^{\frac{m-2}{m}} + \ldots + 1\right)a_{\overline{n}|},$$

d. h.

$$(20)\ldots\quad \begin{cases} \ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} = \dfrac{i}{m\,(r^{1/m} - 1)}\,\ddot{s}_{\overline{n}|} \\ \text{und} \\ a_{\overline{n}|}^{(m)} = \dfrac{i}{m\,(r^{1/m} - 1)}\,a_{\overline{n}|} \end{cases}$$

mit unseren, aus der Spezialisierung der Eulerschen Formel gewonnenen Relationen zu vergleichen. Wir haben zu diesem Zwecke den Ausdruck

$$\ddot{s}_{\overline{1}|}^{(m)} = \frac{i}{m\,((1+i)^{1/m} - 1)}$$

in eine nach Potenzen von i fortschreitende Reihe zu entwickeln. Soll diese lauten

$$\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 i^2 + \ldots + \alpha_n i^n + \ldots,$$

so gilt

$$1 = \frac{1}{m}\left(\binom{\frac{1}{m}}{1} + \binom{\frac{1}{m}}{2} i + \binom{\frac{1}{m}}{3} i^2 + \ldots + \binom{\frac{1}{m}}{\lambda+1} i^{\lambda} + \ldots\right) \cdot$$
$$\cdot\,(\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 i^2 + \cdots + \alpha_n i^n + \cdots)$$

woraus

$$\frac{1}{m}\binom{\frac{1}{m}}{1}\alpha_0 = 1$$

$$\frac{1}{m}\binom{\frac{1}{m}}{1}\alpha_1 + \frac{1}{m}\binom{\frac{1}{m}}{2}\alpha_0 = 0$$

$$\frac{1}{m}\binom{\frac{1}{m}}{1}\alpha_2 + \frac{1}{m}\binom{\frac{1}{m}}{2}\alpha_1 + \frac{1}{m}\binom{\frac{1}{m}}{3}\alpha_0 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und damit

$$\alpha_0 = 1$$

$$\alpha_1 = \frac{m-1}{2m}$$

$$\alpha_2 = -\frac{(m-1)(m+1)}{12\,m^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

so dass

$$\vartheta_{\overline{1}|}^{(m)} = 1 + \frac{m-1}{2m}\,i - \frac{(m-1)(m+1)}{12\,m^2}\,i^2 + R$$

und infolgedessen

$$(21)\ldots\begin{cases} \bar{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = \left(1 + \dfrac{m-1}{2m} i - \dfrac{(m-1)(m+1)}{12 m^2} i^2 + R\right) \bar{a}_{\overline{n}|} \\ a^{(m)}_{\overline{n}|} = \left(1 + \dfrac{m-1}{2m} i - \dfrac{(m-1)(m+1)}{12 m^2} i^2 + R\right) a_{\overline{n}|} \end{cases}$$

wo der Rest R durch eine Potenzreihe darstellbar ist. Interessant ist nun der Vergleich mit (18). Wir haben eine schöne Bestätigung unserer frühern Resultate, indem mit grosser Genauigkeit gilt

$$\frac{m^2-1}{12 m^2} i\,\delta = \frac{m^2-1}{12 m^2} i^2$$

* * *

4. *Volle Lebenserwartung.* Wenn wir die Verzinsung vernachlässigen, also $\delta = 0$ setzen, so geht die Formel

$$\bar{a}_x = a_x + \frac{1}{2} - \frac{\mu_x + \delta}{12} + R_{(1,\,x)}$$

über in

$$(22)\ldots \qquad \mathring{e}_x = e_x + \frac{1}{2} - \frac{\mu_x}{12} + R_{(x)}$$

worin $\mathring{e}_x$ die volle Lebenserwartung oder volle mittlere Lebensdauer einer Person (x) und e_x die mittlere Lebensdauer darstellt. Diese Relation, ohne den Rest, findet sich bereits in der Arbeit von *Woolhouse* [1]). Der Rest ist darstellbar durch

[1]) J. I. A., XV, S. 112, Formel 23.

$$(23) \ldots \quad R_{(x)} = \frac{1}{4!} \int_0^1 t^2 (1-t)^2 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{l^{(4)}_{(x+n+t)}}{l_{(x)}} \, dt$$

wo $l^{(4)}_{(x)}$ die vierte Ableitung der Funktion $l_{(x)}$ nach x bedeutet.

Die vielgebrauchte Näherungsformel für $\mathring{e}_x$ lautet

$$\mathring{e}_x = e_x + 1/2,$$

sie ergibt also einen Betrag, der um nahezu $\frac{\mu_x}{12}$ zu gross ist. Abgesehen von den höchsten Altern ist die Näherung ausreichend.

Im Falle des Makehamschen Gesetzes ist der Rest $R_{(x)}$ durch die Grenzen bestimmt, welche sich durch Spezialisierung unserer Restformeln ergeben. Wir können uns mit diesem Hinweis begnügen.

In analoger Weise findet man die volle mittlere Dauer einer Verbindung durch Spezialisierung unserer Ausdrücke (2) und (3) am Anfang dieses Abschnittes.

Im Spezialfall $s = 1$ (d. h. wenn das Gompertzsche Gesetz gilt, $l_x = kg^{c^x}$) ergeben sich Beziehungen zum Integrallogarithmus; denn in diesem Fall ist die volle mittlere Lebensdauer durch diese Funktion darstellbar.

Zusammenstellung der Literaturnachweise des Textes.

Mitteilungen schweizerischer Versicherungsmathematiker, 13 (1918) und 18 (1923).

Encyclopédie des sciences mathématiques, I, 4, 4 (1911).

Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, I D 4 *b* (1901).

Archief voor de Verzekerings Wetenschap, 8 (1906).

Journal of the Institute of Actuaries, J. I. A. XV. (1870).

A. A. Markoff, Differenzenrechnung, Leipzig (1896).

D. Seliwanoff, Differenzenrechnung, Leipzig (1904).

Prof. Dr. Moser, Vorlesungen an der Universität Bern (S.-S. 1916).

— Untersuchungen und Materialien (1901).

L. Maingie, Théorie de l'intérêt, Bruxelles (1911).

N. Nielsen, Handbuch einer Theorie der Gammafunktion, Leipzig (1906).

7. Skandinaviske Matematikerkongres i København, den 31. August bis 14. September 1925. Kongresberetningen, S. 342, København (1926).

J. F. Steffensen, Some recent researches in the theory of statistics and actuarial science, Cambridge, University Press, p. 26 ff. (1930).

Inhaltsübersicht.