Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 27 (1932)

Artikel: Zur Frage des Beharrungszustandes

Autor: Saxer, Walter

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967500

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zur Frage des Beharrungszustandes.

Von Prof. Dr. **Walter Saxer,** Zürich.

Wer die letzten Jahrgänge der Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker durchblättert, wird bemerken, dass eine Reihe von Abhandlungen die Frage des sogenannten Beharrungszustandes behandeln. Sämtliche neueren Arbeiten verdanken wir Herrn *Moser* [1]) in Bern und seinen Schülern, von denen ich in diesem Zusammenhang vor allem die Herren *Friedli, H. Wyss* und *E. Zwinggi* nenne, während die ersten Überlegungen über diesen Fragenkreis wohl von Herrn *Schaertlin* [2]) stammen. Es sei mir gestattet, auf eine, wie mir scheint in diesem Zusammenhang interessante und meines Wissens noch nicht völlig abgeklärte Frage hinzuweisen. Ihre Beantwortung wird nicht in hohe mathematische Sphären führen, trotzdem wird sie die Frage nach dem Beharrungszustand ganz wesentlich klären.

§ 1.

Wir betrachten eine Gesamtheit von versicherten Personen, die einer beliebigen, jedoch festen, d. h. von der Zeit unabhängigen Ausscheideordnung unterworfen

[1]) Vgl. insbesondere *Moser:* Beiträge zur Darstellung von Vorgängen und des Beharrungszustandes bei einer sich erneuernden Gesamtheit; diese Zeitschrift, 21. Heft, 1926, S. 1—24.

[2]) Vgl. *G. Schaertlin:* Die Altersversorgung der eidgenössischen Beamten; Zeitschrift für schweiz. Statistik, 1889, S. 273-311.

sei. Über diese Gesamtheit treffen wir die folgenden Voraussetzungen:

I. Das *Alter* x eines Versicherten erfülle die Ungleichung

$$a \leqq x < \omega$$

Beispiel: $a = 20$, $\omega = 70$, wie bei einer Pensionskasse.

II. Die Anzahl dieser Gesamtheit sei konstant und betrage H, d. h. ausscheidende Personen sollen ersetzt werden, und zwar erfolge der Eintritt beim Beginn des Jahres. Das Eintrittsalter kann beliebig sein, muss jedoch die unter I genannte Ungleichung erfüllen. Nach der Terminologie von Moser handelt es sich also um eine sich *erneuernde Gesamtheit*. Immerhin, das sei hier hervorgehoben, ist es nicht eine *kontinuierlich* sich erneuernde Gesamtheit, wie sie Moser allein betrachtet, sondern, wie oben bemerkt, eine *diskontinuierliche*, jährlich sich erneuernde Gesamtheit.

Es erhebt sich die Frage, ob diese Gesamtheit gegen einen gewissen Grenzzustand, genannt *Beharrungszustand*, konvergiere samt den ihr verknüpften Vorgängen. Will man diese Frage beantworten, so muss man zunächst genau definieren, was man darunter versteht, eine Gesamtheit habe ihren Beharrungszustand erreicht. Eine eindeutige Definition liegt für unsere Gesamtheit meines Wissens bis heute noch nicht vor. Es war das Ziel der vorliegenden Abhandlung, diesen Begriff festzulegen, seine Tragweite zu untersuchen und gewisse mit seiner Definition eng verwandte Fragen abzuklären. Zunächst treffen wir die folgenden Bezeichnungen für die Darstellung der Ausscheideordnung. r_k bezeichne die Wahrscheinlichkeit, dass ein $a + k - 1$jähriger das Jahr $a + k$ als Aktiver er-

lebt, q_k sei die betreffende Ausscheidewahrscheinlichkeit, d. h.

$$r_k + q_k = 1. \tag{1}$$

Im Interesse einer einfacheren Darstellung treffen wir die irrelevante Voraussetzung, dass $r_1 > r_2 > r_3 \ldots$, wie dies im allgemeinen in der Praxis der Fall ist. Die Anzahl der $a + k -$ 1jährigen Aktiven im Zeitpunkt t betrage $l_k^{(t)}$. Gemäss Bedingung (II) muss unabhängig von t die folgende Gleichung erfüllt sein:

$$l_1^{(t)} + l_2^{(t)} + \ldots . + l_{\omega-a}^{(t)} = H. \tag{2}$$

Definition A: Eine Gesamtheit befindet sich im Beharrungszustand, wenn ihre Anzahl und Struktur nach dem Alter konstant bleibt, d. h. nicht nur die Zahl H, sondern auch die Zahlen $l_1^{(t)}, l_2^{(t)}, \ldots . l_{\omega-a}^{(t)}$ *sind konstante, von t unabhängige Grössen.*

Eine sich erneuernde Gesamtheit, die sich im Beharrungszustand befindet, werden wir im folgenden kurz als eine *stationäre Gesamtheit* bezeichnen.

Diese Definition ist sehr eng, aber wir werden nachher einsehen, warum der Beharrungszustand nicht durch weniger scharfe Forderungen festgelegt werden konnte.

Zunächst kann man leicht alle diejenigen Altersstrukturen beschreiben, die für stationäre Gesamtheiten überhaupt in Betracht fallen. Es gilt nämlich der

Satz (1): Bei einer stationären Gesamtheit müssen die zugehörigen l_k *die folgenden Ungleichungen erfüllen:*

$$r_1 l_1 \leqq l_2, \; r_2 l_2 \leqq l_3, \; \ldots . \; r_{\omega-a-1} l_{\omega-a-1} \leqq l_{\omega-a}. \tag{3}$$

Umgekehrt stellt jede solche Struktur eine stationäre Gesamtheit dar.

Beweis: Gemäss der Bedingung (II) müssen die im Laufe eines Jahres Ausgeschiedenen beim Beginn des darauffolgenden Jahres ersetzt werden. Abgesehen von der Ungleichung (1) kann das Eintrittsalter der Neueintretenden beliebig gewählt werden. Der Beweis des Satzes (1) beruht nun einfach darin, dass wir folgendes zeigen: Sofern Ungleichungen (3) befriedigt sind, kann das Alter der Neueintretenden immer so gewählt werden, dass die Gesamtheit stationär bleibt. Im entgegengesetzten Fall ist diese Möglichkeit ausgeschlossen. Zunächst treffen wir die folgende Bezeichnung: Der Beginn unserer Betrachtung der Gesamtheit sei mit 0 gekennzeichnet. Nach Ablauf des ersten Jahres, d. h. bei Beginn des zweiten Jahres, betrage die Anzahl der $a+k-1$jährigen Neueintretenden $z_k^{(2)}$, allgemein beim Beginn des t-Jahres $z_k^{(t)}$. Nun bestehen offenbar die folgenden Beziehungen:

$$(4)\quad l_1^{(2)} = z_1^{(2)},\ l_2^{(2)} = r_1\, l_1^{(1)} + z_2^{(2)}, \ldots .\ l_k^{(2)} = r_{k-1}\, l_{k-1}^{(1)} + z_k^{(2)},$$
$$\ldots .\ l_{\omega-a}^{(2)} = r_{\omega-a-1}\, l_{\omega-a-1}^{(1)} + z_{\omega-a}^{(2)}.$$

Soll die Gesamtheit stationär sein, schliessen wir auf Grund der Definition (A):

$$l_1^{(1)} = l_1^{(2)},\ l_2^{(1)} = l_2^{(2)}, \ldots .\ l_k^{(1)} = l_k^{(2)}, \ldots\ l_{\omega-a}^{(1)} = l_{\omega-a}^{(2)}.$$

D. h. gemäss Gleichung (4):

$$(5)\quad z_1^{(2)} = l_1^{(1)} = l_1,\ z_2^{(2)} = l_2^{(2)} - r_1\, l_1^{(1)} = l_2^{(1)} - r_1\, l_1^{(1)} = l_2 - r_1\, l_1,$$
$$\ldots .\ z_k^{(2)} = l_k - r_{k-1}\, l_{k-1}, \ldots .$$

Sind die Ungleichungen (3) befriedigt, so erhält man eindeutig bestimmte Zahlen $z_k^{(2)} \geqq 0$. Wären die Ungleichungen (3) nicht befriedigt, so bekäme man teilweise negative Werte für die $z_k^{(2)}$, was offenbar für unsere

Zwecke sinnlos wäre. Gleichzeitig geht aus dieser Betrachtung hervor, dass die sogenannten *Erneuerungszahlen* z_k jedes Jahr genau gleich gewählt werden müssen, wenn die Gesamtheit stationär bleiben soll. Es gilt der

Satz 2: Im Falle einer stationären Gesamtheit ist die Anzahl und Struktur nach Alter der pro Jahresanfang Neueintretenden eindeutig bestimmt und konstant. Gibt man umgekehrt eine sich erneuernde Gesamtheit mit einem jährlichen Neuzugang von konstanter Anzahl und Struktur, so ist sie stationär.

Der Beweis dieses Satzes ist in den obigen Bemerkungen enthalten. Dagegen möchten wir noch folgendes festhalten: Gleichungen (5) gestatten die eindeutige Berechnung der Erneuerungszahlen aus den Zahlen l_k. Umgekehrt erhält man folgendes Gleichungssystem zur Bestimmung der Zahlen l_k aus den Zahlen z_k:

$$
\begin{aligned}
(6)\quad & l_1 = z_1 \\
& l_2 = z_2 + r_1 z_1 \\
& \vdots \\
& l_k = z_k + r_{k-1} z_{k-1} + r_{k-1} r_{k-2} z_{k-2} + \ldots + r_{k-1} \ldots r_1 z_1. \\
& \vdots
\end{aligned}
$$

Schliesslich weisen wir auf eine praktisch wichtige Bemerkung hin. In der Praxis kennt man im Falle einer stationären Gesamtheit sowohl die Zahlen l_k als auch die Zahlen z_k. Es lassen sich deshalb z. B. aus den Gleichungen (5) die Zahlen r_k berechnen, d. h. man kann mit Hilfe der Struktur und der Erneuerungszahlen einer stationären Gesamtheit ihre Ausscheideordnung bestimmen.

Endlich möchten wir auf einen Spezialfall einer stationären Gesamtheit hinweisen, der schon mehrfach in der Literatur und ganz besonders in den letzten Jahren behandelt wurde [1]). Es sollen in den Ungleichungen (3) die Gleichheitszeichen gültig sein. Dann modifizieren sich Gleichungen (3) und (5) in der folgenden Weise:

$$(7a) \quad r_1 l_1 = l_2,\ r_2 l_2 = l_3,\ \ldots\ r_{\omega-a-1}\, l_{\omega-a-1} = l_{\omega-a},$$

$$(7b) \qquad z_1 = l_1,\ z_k = 0, \text{ wobei } 2 \leqq k \leqq \omega - a.$$

Diese Gesamtheit hat also eine Altersstruktur von der folgenden Beschaffenheit: Irgend zwei benachbarte Jahrgänge verhalten sich in ihren Anzahlen genau wie die entsprechenden Jahrgänge der diese Gesamtheit beherrschenden Ausscheideordnung. Gleichungen (7*b*) zeigen, dass in diesem Fall alle Neueintretenden das gleiche Alter besitzen, und zwar ist dasselbe gleich dem Minimalalter der in der betreffenden Gesamtheit überhaupt vorkommenden Alter. Wir treffen nun die folgende

Definition B: Eine stationäre Gesamtheit wird als natürliche stationäre Gesamtheit bezeichnet, wenn zwei benachbarte Jahrgänge sich verhalten wie die zwei entsprechenden Jahrgänge der diese Gesamtheit beherrschenden Ausscheideordnung.

Eine natürliche stationäre Gesamtheit ist gegenüber einer allgemeinen stationären Gesamtheit durch zwei Extremaleigenschaften ausgezeichnet, was wir in einem Satz formulieren wollen.

---

[1]) Vgl. *W. Friedli:* Bevölkerungsstatistische Grundlagen zur Alters- und Hinterlassenenversicherung in der Schweiz. Bern 1928, insbesondere S. 38—41. — *H. Wyss:* Lage, Entwicklung und Beharrungszustand der eidgenössischen Versicherungskasse; diese Zeitschrift, 24. Heft, 1929, insbesondere S. 46 ff.

Satz 3: Von sämtlichen stationären Gesamtheiten von gleicher Ausscheideordnung und gleicher Anzahl besitzt die natürliche, stationäre Gesamtheit das geringste Durchschnittsalter und die kleinste totale Anzahl der pro Jahr Ausscheidenden.

Beweis: Er ergibt sich ohne weiteres aus der Bemerkung, dass das Eintrittsalter der bei einer natürlichen stationären Gesamtheit Neueintretenden gleich dem Minimalalter ist.

Praktisch ist es in der Regel so, dass das Alter der Neueintretenden zwischen gewissen Schranken $a \leqq x \leqq b$ liegt, z. B. bei einer Pensionskasse zwischen 20 und 40. Gemäss den Gleichungen (4) wird dann eine solche stationäre Gesamtheit erst die natürliche Altersstruktur vom Alter $b + 1$ an aufweisen. Denn in den vorhergehenden Jahrgängen wird dieselbe durch die Neueintretenden fortlaufend gestört. Wie jedoch die vorhergehenden Ausführungen zeigen, lässt sich dieser Fall genau so einfach wie eine im Totalen natürliche, stationäre Gesamtheit behandeln.

§ 2.

Wir haben den Beharrungszustand einer sich erneuernden Gesamtheit dadurch definiert, dass wir konstante Altersstruktur verlangten. Unter anderem haben wir aus dieser Definition geschlossen, dass die Anzahl der pro Jahr Ausscheidenden konstant ist. Nun stellen wir die umgekehrte

Frage: Eine Gesamtheit von konstanter Ausscheideordnung und konstanter Anzahl sei so beschaffen, dass die Anzahl der pro Jahr Ausscheidenden oder also die Anzahl der per Jahresanfang Neueintretenden konstant ist. Kann man daraus schliessen, dass es sich in diesem Fall um eine stationäre Gesamtheit handelt?

Diese Fragestellung hat uns überhaupt den Anlass zur vorliegenden Untersuchung gegeben. Wir werden durch die Konstruktion eines Gegenbeispieles von sehr allgemeinem Typus beweisen, dass man die Frage verneinen muss. Damit ist dann nachträglich die sehr strenge Definition des Beharrungszustandes gerechtfertigt. Bei der Konstruktion dieses Beispieles halten wir uns an die in den Gleichungen (1), (2) und (4) gewählten Bezeichnungen.

Die totale Anzahl der im ersten Jahre Ausscheidenden beträgt:

$$l_1^{(1)} q_1 + l_2^{(1)} q_2 + l_3^{(1)} q_3 + \ldots . + l_n^{(1)} q_n,$$

wobei $n = \omega - a$ und > 3 vorausgesetzt werde.

Die Erneuerungszahlen bei Beginn des zweiten Jahres seien $z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \ldots . z_n^{(2)}$, so dass die Gesamtheit bei Beginn des zweiten Jahres folgende Struktur aufweist:

$$l_1^{(2)} = z_1^{(2)},\ l_2^{(2)} = r_1\, l_1^{(1)} + z_2^{(2)},\ \ldots .\ l_n^{(2)} = r_{n-1}\, l_{n-1}^{(1)} + z_n^{(2)}.$$

Die totale Anzahl der im zweiten Jahre Ausscheidenden beträgt:

$$q_1\, z_1^{(2)} + q_2\, (r_1\, l_1^{(1)} + z_2^{(2)}) + \ldots . + q_n\, (r_{n-1}\, l_{n-1}^{(1)} + z_n^{(2)}).$$

Weil die Gesamtheit eine konstante Anzahl besitzen soll, muss die Summe der beim Beginn des zweiten Jahres Neueintretenden gleich der totalen Anzahl der im ersten Jahre Ausgeschiedenen sein. Wir erhalten die Gleichung (8):

$$(8)\quad l_1^{(1)} q_1 + l_2^{(1)} q_2 + \ldots + l_n^{(1)} q_n = z_1^{(2)} + z_2^{(2)} + \ldots + z_n^{(2)}.$$

Wir verlangen, dass die Anzahl der pro Jahr Ausscheidenden konstant bleibt, speziell soll also im zweiten

Jahr dieselbe Anzahl ausscheiden wie im ersten Jahr. Damit erhalten wir die Gleichung

$$q_1 z_1^{(2)} + q_2 (r_1 l_1^{(1)} + z_2^{(2)}) + \ldots + q_n (r_{n-1} l_{n-1}^{(1)} + z_n^{(2)}) = z_1^{(2)} + \ldots z_n^{(2)}$$

oder:

$$(9) \quad q_2 r_1 l_1^{(1)} + \ldots + q_n r_{n-1} l_{n-1}^{(1)} = z_1^{(2)} r_1 + z_2^{(2)} r_2 + \ldots + z_n^{(2)} r_n.$$

Die Zahlen $l_1^{(1)} \ldots l_n^{(1)}$ müssen sicher so gewählt werden, dass Gleichungen (8) und (9) positive Lösungen $z_k^{(2)}$ besitzen. Diese Bedingung muss nicht nur von der Struktur im 1. Jahr, sondern überhaupt für die Struktur der Gesamtheit in jedem folgenden Jahr gefordert werden. Wie können diese Bedingungen erfüllt werden? Um eine etwas einfachere Formulierung zu erhalten, legen wir den Erneuerungszahlen noch die Bedingung auf

$$z_n^{(t)} = 0,$$

d. h. die zukünftigen Neueintretenden können alle Eintrittsalter, abgesehen vom letzten Jahrgang, besitzen. Gleichungen (8) und (9) schreiben sich dann in der folgenden Weise:

$$(10) \quad k_1 = l_1^{(t)} q_1 + l_2^{(t)} q_2 + \ldots + l_n^{(t)} q_n = z_1^{(t+1)} + \ldots + z_{n-1}^{(t+1)},$$

$$(11) \quad k_2 (t) = q_2 r_1 l_1^{(t)} + \ldots + q_n r_{n-1} l_{n-1}^{(t)} = r_1 z_1^{(t+1)} + \ldots + r_{n-1} z_{n-1}^{(t+1)}.$$

k_1 ist infolge der Forderung der konstanten Anzahl der jährlich Ausscheidenden unabhängig von t.

Gleichungen (10) und (11) müssen für alle positiven ganzzahligen t-Werte positive Lösungen besitzen, wenn unsere Bedingungen erfüllt sein wollen. Dazu gelten noch folgende Beziehungen:

$$(12) \quad l_1^{(t+1)} = z_1^{(t+1)}, \; l_2^{(t+1)} = r_1 l_1^{(t)} + z_2^{(t+1)}, \; \ldots \; l_{n-1}^{(t+1)} = r_{n-2} l_{n-2}^{(t)} + z_{n-1}^{(t+1)}.$$

Wir haben von der gegebenen Ausscheideordnung gefordert, dass

$$r_1 > r_2 > r_3 \ldots > r_{n-1}.$$

Wenn also Gleichungen (10) und (11) positive z_k-Lösungen besitzen sollen, müssen folgende Ungleichungen erfüllt sein:

$$k_2(t) < r_1 \left(z_1^{(t+1)} + \ldots + z_{n-1}^{(t+1)}\right) = r_1 k_1,$$

$$k_2(t) > r_{n-1} \left(z_1^{(t+1)} + \ldots + z_{n-1}^{(t+1)}\right) = r_{n-1} k_1,$$

d. h.

$$r_{n-1} k_1 < k_2(t) < r_1 k_1. \tag{13}$$

Zunächst stellen wir fest, dass wir von dieser Ungleichung bereits sehr viele Lösungen kennen, denn alle stationären Gesamtheiten müssen natürlich diese Ungleichheiten erfüllen, da für solche unsere Forderungen erfüllt sind. Um nachher die Konstruktion unseres Gegenbeispieles erläutern zu können, ist eine geometrische Ausdrucksweise bequem. Wir betrachten die Werte $l_1^{(t)}, \ldots, l_{n-1}^{(t)}$ als Koordinaten eines Punktes $P_l^{(t)}$ im n—1 dimensionalen l-Raum, ebenso die Werte $z_1^{(t+1)}, \ldots z_{n-1}^{(t+1)}$ als Koordinaten eines Punktes $P_z^{(t+1)}$ im n—1 dimensionalen z-Raum. Ungleichung (13) verlangt, dass die zugehörigen Punkte im l-Raum in einem Parallelstreifen, d. h. zwischen zwei Parallelebenen, liegen, die durch folgende Gleichungen charakterisiert sind:

$$q_2 r_1 l_1^{(t)} + \ldots + q_n r_{n-1} l_{n-1}^{(t)} - r_1 k_1 = 0$$

$$q_2 r_1 l_1^{(t)} + \ldots + q_n r_{n-1} l_{n-1}^{(t)} - r_{n-1} k_1 = 0.$$

Ein Teilraum R_s von diesem Parallelstreifen wird von allen denjenigen Punkten gebildet, die stationäre

Gesamtheiten darstellen, die also den Ungleichungen (3) genügen.

Es werde nun eine solche Gesamtheit gewählt, die der Ungleichung (13) genügt — der zugehörige Punkt im l-Raum befindet sich demnach im ausgezeichneten Parallelstreifen. Zunächst stellt nun, ganz abgesehen von dieser Bedingung, das Lösungsgebilde, das zu den Gleichungen (10) und (11) gehört, im z-Raum eine n—3 dimensionale Hyperebene dar. Ist unsere Bedingung (13) erfüllt, so wird diese Hyperebene mit dem durch die Bedingung $z_k > 0$ für $k = 1, \ldots, n-1$ ausgezeichneten Teilraum des z-Raumes sicher koinzidieren, wie man mit Leichtigkeit feststellt. D. h. alle diejenigen Punkte unserer Hyperebene, die sich in diesem Teilraum befinden, stellen mögliche Lösungen für unsere Gleichungen (10) und (11) dar. Mittels der Translation (12), die sich im Falle einer stationären Gesamtheit auf die Identität reduziert, erhält man die auf $l_1^{(t)}, l_2^{(t)}, \ldots l_{n-1}^{(t)}$ folgenden Werte $l_1^{(t+1)}, l_2^{(t+1)}, \ldots l_{n-1}^{(t+1)}$ oder also den auf $P_l^{(t)}$ folgenden Punkt $P_l^{(t+1)}$. $P_l^{(t+1)}$ muss natürlich immer noch im interessanten Parallelstreifen liegen, wenn unsere Bedingungen erfüllt sein sollen. Schliesslich stellen wir noch fest, dass diese Gleichungen (10) und (11) eine lineare und stetige, natürlich nicht ein-eindeutige Abbildung des l-Raumes auf den z-Raum vermitteln, Gleichung (12) hingegen eine lineare stetige, ein-eindeutige Abbildung des z-Raumes auf den l-Raum.

Um nun unser Gegenbeispiel zu konstruieren, gehen wir in der folgenden Weise vor: Wir wählen im Teilraum R_s des interessanten Parallelstreifens einen innern Punkt $P_l^{(1)}$, so dass mit ihm noch eine Kugel mit diesem Punkt als Zentrum und einem nicht verschwindenden Radius zu R_s gehört. Damit ist eine ganz bestimmte Gesamtheit $l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, \ldots l_{n-1}^{(1)}$ festgelegt, zu der nach § 1

eindeutig bestimmte Zahlen $z_1^{(2)}, \ldots z_{n-1}^{(2)}$ gehören würden, sofern wir eine stationäre Gesamtheit konstruieren wollten. Statt dessen betrachten wir alle z-Punkte, die als Lösungen der Gleichungen (10) und (11) überhaupt in Betracht fallen und einen Teil $T_z^{(2)}$ einer Hyperebene darstellen, der sicher den soeben erwähnten z-Punkt enthält, und zwar im allgemeinen als inneren Punkt. Mittels der Translation (12) geht $T_z^{(2)}$ in einen Teil $T_l^{(2)}$ einer Hyperebene mit $P_l^{(1)}$ als innern Punkt über, in welchem nun $P_l^{(2)}$ liegen muss. Infolge der Stetigkeit unserer vorkommenden Abbildungen können wir dafür sorgen, dass $P_l^{(2)}$ immer noch im Innern von R_s liegt. Auf $P_l^{(2)}$ können wir nun genau gleich schliessen usw. Offenbar kann man nun das Verfahren so gestalten, dass die Punkte $P_l^{(t)}$ immer innerhalb von R_s liegen, ohne deshalb festbleiben zu müssen. Denn durch geeignete Richtungsänderungen bei der Wahl der z-Lösungen können wir dafür sorgen, dass die $P_l^{(t)}$-Punkte nicht gegen den Rand des interessanten Parallelstreifens konvergieren.

§ 3.

Eine Gesamtheit von konstanter Anzahl sei gegeben, die sich nicht im Beharrungszustande befinde. Es ist klar, dass diese Gesamtheit nicht nach dem Beharrungszustand konvergieren wird, wenn man die Erneuerungszahlen nicht zweckmässig wählt. *Zwinggi* [1]) hat z. B. bewiesen, dass dies der Fall ist, wenn alle zukünftigen Neueintretenden dasselbe Alter besitzen. Man erhält damit schliesslich eine natürliche, stationäre Gesamtheit. Eine genauere Diskussion zeigt jedoch, dass dieses Verfahren sehr langsam konvergiert. *Man*

[1]) *Zwinggi:* Zum Problem der Erneuerung; Blätter für Versicherungsmathematik, Bd. 31, Heft 1, 1931, S. 18—27.

kann die Frage aufwerfen, ob es eine Methode für die Wahl der Erneuerungszahlen gebe, um eine konstante Gesamtheit möglichst rasch in eine natürliche stationäre Gesamtheit überzuführen. Diese Frage lässt sich mit Leichtigkeit entscheiden und bejahen.

Es bedeute wieder $l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, \ldots l_n^{(1)}$ die Anfangsgeneration, wobei

$$l_1^{(1)} + l_2^{(1)} + \ldots + l_n^{(1)} = H.$$

Zu dieser Zahl H gehört eine wohlbestimmte Altersstruktur, sofern es sich um eine natürliche Gesamtheit handelt. Wir bezeichnen dieselbe mit $l_1, l_2, \ldots l_n$, wobei

$$l_2 = r_1 l_1, \; l_3 = r_2 l_2, \; \ldots \; l_n = r_{n-1} l_{n-1}$$

und
$$H = l_1 + l_2 + \ldots + l_n.$$

Stellt die Anfangsgeneration keine natürliche Gesamtheit dar, so gibt es einen kleinsten Index k, so dass

$$l_k^{(1)} > l_k.$$

Es ist nun klar, dass der natürliche Zustand nicht erreicht wird, solange diese $l_k^{(1)}$-Generation noch aktiv ist. D. h. es vergehen mithin mindestens $n—k$ Jahre, bis die gegebene Gesamtheit in eine natürliche Gesamtheit überführt ist. Umgekehrt kann man leicht die Erneuerungszahlen so wählen, dass die Überführung einer konstanten Gesamtheit in eine natürliche Gesamtheit wirklich in $n—k$ Jahren stattfindet. Man wähle zu diesem Zwecke die Erneuerungszahlen in den einzelnen Jahren so, dass die jüngeren Jahrgänge als die obige kritische k-Generation nie grösser sind als die betreffenden Zahlen l_i der natürlichen Gesamtheit. Da nach $n—k$ Jahren diese Generation ausgestorben ist,

erfüllen auf Grund unserer Bedingung alle Zahlen die Ungleichung

$$l_i^{(1+n-k)} \leqq l_i, \text{ wobei } 1 \leqq i \leqq n.$$

Zudem wurde die Anzahl des Bestandes konstant gehalten, so dass gilt

$$l_1^{(1+n-k)} + l_2^{(1+n-k)} + \ldots + l_n^{(1+n-k)} = l_1 + \ldots + l_n = H.$$

Aus den obigen Ungleichungen und dieser Gleichung folgt

$$l_i^{(1+n-k)} = l_i, \text{ wobei } 1 \leqq i \leqq n.$$

Zürich, den 5. Januar 1932.