Sur le calcul du taux de rendement des emprunts à amortissements constants (serial loans)

Autor(en): **Dasen, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **27 (1932)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-967503

Sur le calcul du taux de rendement des emprunts à amortissements constants (serial loans).

Par **E. Dasen**, Bâle.

I. Introduction.

Deux formules, obtenues par un simple raisonnement arithmétique, sont constamment utilisées dans la pratique des banques suisses pour la détermination du taux de rendement des valeurs mobilières à revenu fixe. Nous avons pensé qu'il y aurait quelque intérêt à comparer le taux de rendement donné par l'une et l'autre de ces formules approximatives avec celui que l'on obtient en observant les principes de la science actuarielle, qui sont à la base de la technique des opérations financières à long terme, pour la catégorie des emprunts à amortissements constants.

Rappelons que par emprunt à amortissements constants, on entend un emprunt pour lequel il est amorti chaque année une somme égale, obtenue en divisant le montant nominal de l'emprunt par la durée de celui-ci. Ce système d'amortissement est assez peu utilisé en Suisse, on compte environ une quinzaine d'emprunts de ce type cotés sur le marché officiel suisse et dont une dizaine ont été émis par des entreprises suisses. Par contre, dans les pays à finance anglo-saxonne, les emprunts à amortissements constants, nommés «serial loans», se remontrent d'une manière plus fréquente.

II. Notations.

Au cours du présent travail nous utiliserons les notations suivantes:

i_0 = taux nominal annuel d'intérêt d'un emprunt d'un nominal de 1.

i = taux de rendement annuel d'un emprunt d'un nominal de 1 (capitalisation annuelle).

n = durée de l'emprunt.

K = d'une manière générale cours d'un emprunt d'un nominal de 1.

K_n^I = valeur actuelle d'un emprunt d'un nominal de 1 remboursable dans n années exactement, dont les coupons se paient semestriellement.

K_n = valeur actuelle d'un emprunt d'un nominal de 1 amortissable annuellement par amortissements constants en n années et dont les coupons se paient semestriellement.

I_k = intérêts versés à la fin de la k^e année.

P_k = amortissement effectué à la fin de la k^e année.

i_1 = taux de rendement approximatif calculé suivant la formule (A).

i_2 = taux de rendement approximatif calculé suivant la formule (B).

Nous utiliserons encore les notations actuarielles classiques:

$$v^n = (1+i)^{-n} \qquad a_{\overline{n|}} = \sum_{k=1}^{k=n} (1+i)^{-k}$$

Nous aurons donc

$$K_n^I = 1 + \left[i_0\,(1+\varepsilon) - i\right] a_{\overline{n|}} \tag{1}$$

Conformément à la notation de MM. Huss et Hagström, la quantité ε est égale à $\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+i}-1\right)$ et permet de tenir compte du paiement semestriel des coupons.

III. Calcul de K_n.

Pour un emprunt à amortissements constants, nous aurons:

$$I_k = \frac{n-(k-1)}{n}\, i_0$$

$$P_k = \frac{1}{n}$$

Le principe fondamental des mathématiques financières nous permet d'écrire immédiatement que:

$$K_n = \sum_{k=1}^{k=n} (1+\varepsilon)\, i_0 \frac{n-(k-1)}{n} v^k + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{v^k}{n}$$

ce qui nous donne

$$K_n = (1+\varepsilon)\, i_0 \left[a_{\overline{n}|} + \frac{a_{\overline{n}|}}{n} - \frac{(va)_{\overline{n}|}}{n}\right] + \frac{a_{\overline{n}|}}{n}$$

Etant donné que

$$(va)_{\overline{n}|} = \left(1+\frac{1}{i}\right) a_{\overline{n}|} - \frac{n\, v^n}{i}$$

on obtient facilement

$$(2) \qquad \underline{K_n = \frac{i_0\,(1+\varepsilon)}{i} + \left(1 - \frac{i_0\,(1+\varepsilon)}{i}\right)\frac{a_{\overline{n}|}}{n}}$$

Cette formule peut se mettre encore sous la forme suivante:

$$K_n = \frac{i_0\,(1+\varepsilon)}{i} + \frac{1 - K_n^I}{n\,i} \tag{3}$$

Si l'on remarque qu'un emprunt à amortissements constants peut se décomposer en une série d'emprunts à échéance fixe d'un montant nominal de $\frac{1}{n}$, on peut écrire immédiatement que:

$$K_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} K_k^I \tag{4}$$

En remplaçant K_k^I par sa valeur telle qu'elle est donnée par la formule (1) on arrive facilement à la formule (2) après avoir effectué la sommation. La formule (4) est extrêmement pratique pour le calcul numérique, car en disposant d'une table de valeurs actuelles pour emprunts à échéance fixe on calcule très rapidement les nombres K_n.

IV. Les formules approximatives de la pratique bancaire.

Comme nous le disions plus haut on utilise constamment dans la pratique bancaire pour le calcul du taux de rendement d'un emprunt, deux formules obtenues par un raisonnement extrêmement simple. Ainsi pour le calcul du taux de rendement d'un emprunt à échéance fixe on utilise une des deux formules suivantes:

$$i_1' = \frac{i_0}{K} + \frac{1 - K}{n} \tag{5}$$

$$i_2' = \frac{i_0}{K} + \frac{1-K}{n\,K} \tag{6}$$

La formule (5) s'établit immédiatement. On commence par ramener à l'unité le taux nominal d'intérêt, puis on ajoute ou on soustrait suivant que le cours est au-dessous ou au-dessus du pair une quantité P égale à la prime ou à la perte au remboursement divisée par la durée qui doit s'écouler jusqu'au remboursement de l'emprunt. La formule (6) ne diffère de (5) que du fait que l'on convient de ramener à l'unité la quantité P. Au point de vue logique, la formule (6) est déjà plus satisfaisante.

En ce qui concerne les emprunts dont les titres sont remboursables par des tirages au sort, les formules pratiques utilisées sont les suivantes:

$$i_1 = \frac{i_0}{K} + \frac{1-K}{\frac{2}{3}\,n} \tag{A}$$

$$i_2 = \frac{i_0}{K} + \frac{1-K}{\frac{2}{3}\,n\,K} \tag{B}$$

Dans ces deux formules, on remarque que la prime ou la perte au remboursement est répartie uniformément non pas sur la durée entière de l'emprunt, mais sur les $\frac{2}{3}$ de celle-ci.

Ces formules pratiques font donc abstraction complète, non seulement de la notion de valeur actuelle, mais aussi du mode d'amortissement de l'emprunt et par conséquent elles donneront un taux de rendement identique pour tous les emprunts amortissables. Le fait de ne pas tenir compte du mode d'amortissement de l'emprunt a au point de vue du taux de rendement une certaine importance; l'exemple suivant illustrera ce fait.

Exemple: Déterminer le taux de rendement d'un emprunt d'un taux nominal de 5 % (coupons semestriels), d'une durée de 10 ans, dont le cours est 90 %, s'il est remboursable:

1° par des annuités constantes,

2° par des amortissements constants.

Les chiffres auxquels on arrive sont les suivants:

	Annuités constantes:	Amortissements constants:
Formule pratique (A). .	7.06 %	7.06 %
Formule pratique (B). .	7.22 %	7.22 %
Calcul technique	7.33 %	7.46 %

V. Calcul technique du taux de rendement.

Lorsque l'on se propose de déterminer le taux de rendement d'un emprunt, les quantités K, i_0 et n sont connues. Le problème qui se pose est de trouver la valeur de i, qui se trouve être racine d'une équation

$$F(i) - K = 0$$

équation algébrique de forme compliquée et de degré n se résolvant par les méthodes préconisées par la théorie générale des équations. On montre qu'avec une approximation suffisante on obtient la racine cherchée en utilisant les tables financières des fonctions actuarielles certaines et en admettant que la fonction $F(i)$ varie proportionnellement à la variable i. En supposant donc que pour $i = a$ et $i = b$ $(a < b)$ on puisse calculer rapidement $F(i)$, on convient de prendre pour valeur de la racine cherchée celle de i pour laquelle on a:

$$\frac{i - a}{b - a} = \frac{K - F(a)}{F(b) - F(a)}$$

Dans le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire celui des emprunts à amortissements constants, le taux de rendement sera donné par la formule:

$$\text{(C)} \qquad i = a + (b - a) \frac{K_n(a) - K}{K_n(a) - K_n(b)}$$

$$K_n(a) > K > K_n(b)$$

Les nombres K_n se calculent rapidement en partant des formules (3) ou (4) et en utilisant les tables existantes donnant les nombres K_n^I. Au sujet du choix de ces tables, nous devons faire la remarque ci-après:

Remarque: Parmi les tables financières donnant les nombres K_n^I, il y a lieu de distinguer entre celles qui sont calculées en définissant i comme capitalisé annuellement, c'est la définition que nous avons adoptée et qui est celle qui semble être utilisée en Suisse, Allemagne, France et Scandinavie, et les tables calculées en admettant une capitalisation semestrielle de i. Cette dernière définition du taux de rendement est celle adoptée par les auteurs des tables utilisées dans les pays anglo-saxons.

Rappelons que le taux donné par la formule (C) est celui qui est effectivement payé par l'emprunteur ou qui est effectivement retiré par une personne qui posséderait la totalité des titres de l'emprunt. A cet emprunt amortissable, on peut donc substituer un emprunt à échéance fixe ayant une durée σ (échéance moyenne, vie mathématique) se calculant par la formule

$$\sigma = \frac{\log n - \log a_{\overline{n}|}}{\log (1 + i)}$$

sur la base du taux i donné par (C).

Pour le porteur d'un titre, le taux i donné par (C) n'exprimera réellement la mesure de son opération financière que si le titre sort au tirage de rang σ. Au cas où il sortirait à un tirage de rang inférieur à σ, le taux de rendement sera supérieur ou inférieur à i suivant que le cours d'achat aura été fait au-dessous ou au-dessus du pair. Par contre si le titre sort à un tirage de rang supérieur à σ, le contraire se produira.

Mentionnons encore que le calcul des probabilités (Théorème de Tchebicheff) permet de déterminer la probabilité pour que la valeur actuelle des sommes totales à recevoir de s titres appartenant à un emprunt amortissable reste comprise entre deux limites très proches de sm pour s suffisamment grand. La quantité m est la valeur probable d'un titre et se calcule en partant du plan d'amortissement. (Pour plus de détails concernant l'application du calcul des probabilités aux opérations financières, on consultera avec intérêt l'ouvrage de M. H. Galbrun: Comptabilité des emprunts à long terme, chez Gauthier-Villars à Paris.)

VI. Taux de rendement technique et taux approximatifs.

Au début de ce travail nous nous étions proposé d'examiner l'allure des différences $i - i_1$ et $i - i_2$. Si nous voulions traiter cette question au point de vue purement analytique, c'est-à-dire déterminer deux fonctions $\varphi_1 (i - i_1)$ et $\varphi_2 (i - i_2)$ et étudier leurs propriétés au moyen des procédés habituels, nous nous trouverions en présence de difficultés non en rapport avec la valeur du résultat. Dans ces conditions, nous avons préféré recourir au calcul numérique et établir pour un certain nombre de cours et de taux susceptibles de se présenter le plus fréquemment dans la pratique quelles sont les différences $i - i_1$ et $i - i_2$. Ayant établi pour $i_0 = 0.03$, $i_0 = 0.04$, $i_0 = 0.05$, $i_0 = 0.06$ et $i_0 = 0.07$ des tableaux numériques analogues à ceux que nous donnons plus loin pour le taux nominal 5 %, nous pouvons conclure d'une manière générale que:

1° pour les emprunts cotés *au-dessous du pair*, les formules (A) et (B) ne donnent pas une bonne approximation du taux exact,

2° pour les emprunts cotés *au-dessus du pair*, la formule (A) donne une meilleure approximation du taux exact que la formule (B) et est susceptible d'être utilisée suivant la question que l'on se propose de résoudre.

Tous nos calculs ont été faits en utilisant les tables suivantes:

E. Huss & K. G. Hagström: Bond Values, Stockholm 1929.

Spitzer-Foerster: Zinseszinsen- und Rentenrechnung, Wien und Leipzig 1922.

Violeine-Arnaudeau: Nouvelles Tables pour les Calculs d'intérêts composés, Paris 1927.

Tableau I.

Taux de rendement technique i en %.

Cours en %	Durée 5	10	15	20	25	30	40	50
80	14.125	10.377	9.000	8.293	7.867	7.581	7.230	7.025
82	13.059	9.750	8.539	7.913	7.535	7.283	6.972	6.790
84	12.031	9.151	8.092	7.547	7.216	6.996	6.723	6.565
86	11.044	8.574	7.665	7.195	6.910	6.720	6.486	6.349
88	10.094	8.019	7.250	6.857	6.616	6.456	6.258	6.142
90	9.179	7.482	6.855	6.531	6.333	6.203	6.040	5.945
92	8.298	6.965	6.472	6.216	6.061	5.958	5.830	5.755
94	7.449	6.466	6.100	5.913	5.799	5.722	5.627	5.571
96	6.624	5.983	5.744	5.620	5.545	5.494	5.433	5.396
98	5.831	5.514	5.397	5.337	5.299	5.276	5.244	5.226
102	4.319	4.624	4.738	4.797	4.833	4.858	4.887	4.905
104	3.597	4.200	4.423	4.541	4.611	4.659	4.718	4.753
106	2.899	3.786	4.118	4.290	4.396	4.466	4.554	4.605
108	2.223	3.386	3.822	4.049	4.187	4.280	4.395	4.463
110	1.564	3.000	3.534	3.814	3.984	4.098	4.241	4.325

Tableau II.

Taux de rendement approximatif i_1 en % donné par la formule (A).

Cours en %	Durée							
	5	10	15	20	25	30	40	50
80	12.250	9.250	8.250	7.750	7.450	7.250	7.000	6.850
82	11.498	8.798	7.898	7.448	7.178	6.998	6.773	6.638
84	10.752	8.352	7.552	7.152	6.912	6.752	6.552	6.432
86	10.014	7.914	7.214	6.864	6.654	6.514	6.339	6.234
88	9.282	7.482	6.882	6.582	6.402	6.282	6.132	6.042
90	8.556	7.056	6.556	6.306	6.156	6.056	5.931	5.856
92	7.835	6.635	6.235	6.035	5.915	5.835	5.735	5.675
94	7.119	6.219	5.919	5.769	5.679	5.619	5.544	5.499
96	6.408	5.808	5.608	5.508	5.448	5.408	5.358	5.328
98	5.702	5.402	5.302	5.252	5.222	5.202	5.177	5.162
102	4.302	4.602	4.702	4.752	4.782	4.802	4.827	4.842
104	3.608	4.208	4.408	4.508	4.568	4.608	4.658	4.688
106	2.917	3.817	4.117	4.267	4.357	4.417	4.492	4.537
108	2.230	3.430	3.830	4.030	4.150	4.230	4.330	4.390
110	1.545	3.045	3.545	3.795	3.945	4.045	4.170	4.245

Tableau III.

Taux de rendement approximatif i_2 en % donné par la formule (B).

Cours en %	Durée							
	5	10	15	20	25	30	40	50
80	13.750	10.000	8.750	8.125	7.750	7.500	7.188	7.000
82	12.683	9.391	8.293	7.744	7.415	7.196	6.921	6.757
84	11.666	8.809	7.857	7.381	7.095	6.904	6.666	6.523
86	10.698	8.256	7.442	7.035	6.791	6.628	6.424	6.302
88	9.773	7.727	7.046	6.705	6.500	6.364	6.193	6.091
90	8.889	7.223	6.667	6.389	6.223	6.112	5.973	5.889
92	8.044	6.739	6.305	6.087	5.957	5.870	5.761	5.696
94	7.234	6.276	5.957	5.798	5.702	5.638	5.558	5.510
96	6.458	5.833	5.625	5.521	5.458	5.416	5.364	5.333
98	5.714	5.408	5.306	5.255	5.224	5.204	5.179	5.163
102	4.314	4.608	4.706	4.755	4.784	4.804	4.828	4.843
104	3.654	4.231	4.423	4.520	4.577	4.616	4.664	4.693
106	3.019	3.868	4.151	4.292	4.377	4.434	4.505	4.547
108	2.408	3.519	3.889	4.074	4.186	4.260	4.352	4.408
110	1.818	3.181	3.636	3.863	4.000	4.090	4.204	4.272

Tableau IV.

Différences: 100 $(i - i_1)$.

Cours en %	Durée							
	5	10	15	20	25	30	40	50
80	1.875	1.127	0.750	0.543	0.417	0.331	0.230	0.175
82	1.561	0.952	0.641	0.465	0.357	0.285	0.199	0.152
84	1.279	0.799	0.540	0.395	0.304	0.244	0.171	0.133
86	1.030	0.660	0.451	0.331	0.256	0.206	0.147	0.115
88	0.812	0.537	0.368	0.275	0.214	0.174	0.126	0.100
90	0.623	0.426	0.299	0.225	0.177	0.147	0.109	0.089
92	0.463	0.330	0.237	0.181	0.146	0.123	0.095	0.080
94	0.330	0.247	0.181	0.144	0.120	0.103	0.083	0.072
96	0.216	0.175	0.136	0.112	0.097	0.086	0.075	0.068
98	0.129	0.112	0.095	0.085	0.077	0.074	0.067	0.064
102	0.017	0.022	0.036	0.045	0.051	0.056	0.060	0.063
104	-0.011	-0.008	0.015	0.033	0.043	0.051	0.060	0.065
106	-0.018	-0.031	0.001	0.023	0.039	0.049	0.062	0.068
108	-0.007	-0.044	-0.008	0.019	0.037	0.050	0.065	0.073
110	0.019	-0.045	-0.011	0.019	0.039	0.053	0.071	0.080

Tableau V.

Différences: 100 $(i - i_2)$.

Cours en °/o	Durée							
	5	10	15	20	25	30	40	50
80	0.375	0.377	0.250	0.168	0.117	0.081	0.042	0.025
82	0.376	0.359	0.246	0.169	0.120	0.087	0.051	0.033
84	0.365	0.342	0.235	0.166	0.121	0.092	0.057	0.042
86	0.346	0.318	0.223	0.160	0.119	0.092	0.062	0.047
88	0.321	0.292	0.204	0.152	0.116	0.092	0.065	0.051
90	0.290	0.259	0.188	0.142	0.110	0.091	0.067	0.056
92	0.255	0.226	0.167	0.129	0.104	0.088	0.069	0.059
94	0.215	0.190	0.143	0.115	0.097	0.084	0.069	0.061
96	0.166	0.150	0.119	0.099	0.087	0.078	0.069	0.063
98	0.117	0.106	0.091	0.082	0.075	0.072	0.065	0.063
102	0.005	0.016	0.032	0.042	0.049	0.054	0.059	0.062
104	-0.057	-0.031	0.000	0.021	0.034	0.043	0.054	0.060
106	-0.120	-0.082	-0.033	-0.002	0.019	0.032	0.049	0.058
108	-0.185	-0.133	-0.067	-0.025	0.001	0.020	0.043	0.055
110	-0.254	-0.181	-0.102	-0.049	-0.016	0.008	0.037	0.053