Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 28 (1933)

Artikel: Zur begründenden Darstellung des ferneren Risikos verwickelter Versicherungsformen

Autor: Koeppler, Hans

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-967438

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zur begründenden Darstellung des ferneren Risikos verwickelter Versicherungsformen [1].

Von **Hans Koeppler**, Berlin.

Einleitendes über die einzelne Versicherung.

Betrachtet wird das fernere Risiko einer Personenversicherung, bei der stets angenommen wird, dass der Versicherte durch zwei verschiedene Arten von Ereignissen betroffen werden kann. Sämtliche Ereignisse seien von der Beschaffenheit, dass sie einander ausschliessen. Die Ereignisse der einen Art mögen von einem x-Jährigen mit den Wahrscheinlichkeiten ${}_{0|}p_x^{(1)}$, ${}_{1|}p_x^{(1)}$, ${}_{2|}p_x^{(1)}$, $\ldots$, ${}_{n-1|}p_x^{(1)}$, die Ereignisse der anderen Art mit den Wahrscheinlichkeiten ${}_{0|}p_x^{(2)}$, ${}_{1|}p_x^{(2)}$, ${}_{2|}p_x^{(2)}$, $\ldots$, ${}_{n-1|}p_x^{(2)}$ im 1., 2., 3., $\ldots$, n-ten Jahre, vom Ausgangspunkt der Betrachtung ab gerechnet, zu erwarten sein. Die Beharrungswahrscheinlichkeit, dass keines der zu erwartenden Ereignisse innerhalb der n Versicherungsjahre eintritt, dass also der Versicherte innerhalb der Versicherungsdauer von n Jahren nicht aus der Gruppe der Versicherungsfähigen ausgeschieden wird, werde durch ${}_np_x^{(3)}$ bezeichnet. Sämtliche Wahrscheinlichkeiten unterliegen der gemeinsamen Bedingung

[1]) Dieser Aufsatz ist der einerseits umgearbeitete und andrerseits sehr verkürzte zweite Teil der unter der gleichen Überschrift im 14. Heft dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit, der seinerzeit nicht mehr veröffentlicht werden konnte.

$$\sum_{t=1}^{t=n} {}_{t-1|}p_x^{(1)} + \sum_{t=1}^{t=n} {}_{t-1|}p_x^{(2)} + {}_np_x^{(3)} = 1.$$

Wenn man

$${}_{t-1|}p_x^{(1)} + {}_{t-1|}p_x^{(2)} = {}_{t-1|}p_x^{(1)+(2)}$$

setzt, so hat ${}_{t-1|}p_x^{(1)+(2)}$ die Eigenschaft, der Gleichung

$${}_{t-1|}p_x^{(1)+(2)} = {}_{t-1}p_x^{(3)} - {}_tp_x^{(3)}$$

zu genügen.

Im einfachsten Fall ist die Versicherung von der Beschaffenheit, dass beim Eintritt eines der Ereignisse der einen Art innerhalb der Dauer von n Jahren die für diesen Fall vereinbarten Summen $S_t^{(1)}$ fällig werden. Wenn ausserdem noch im Beharrungsfalle nach Ablauf der n Jahre die Summe $S_n^{(3)}$ zur Auszahlung kommen soll, so wird die einmalige Prämie dieser Versicherung nach der Formel

$$\mathfrak{A}_x^I = \sum_{t=1}^{t=n} {}_{t-1|}p_x^{(1)}\, v^t\, S_t^{(1)} + {}_np_x^{(3)}\, v^n\, S_n^{(3)}$$

bemessen. Wird ausserdem von dem Eintreffen der Ereignisse der anderen Art die Auszahlung der Summen $S_t^{(2)}$ abhängig gemacht, dann ist zur Berechnung der einmaligen Prämie die Formel

$$\mathfrak{A}_x^{II} = \sum_{t=1}^{t=n} {}_{t-1|}p_x^{(1)}\, v^t\, S_t^{(1)} + \sum_{t=1}^{t=n} {}_{t-1|}p_x^{(2)}\, v^t\, S_t^{(2)} + {}_np_x^{(3)}\, v^n\, S_n^{(3)}$$

zu verwenden. Bei den sogenannten temporären Versicherungen fällt der Barwert der Erlebensfalleistung fort. Der Barwert der Beharrungsrente $a_{x\overline{n}|}$, welcher zur Berechnung der Jahresprämien

$$P_x^I = \frac{\mathfrak{A}_x^I}{\mathsf{a}_x} \quad \text{und} \quad P_x^{II} = \frac{\mathfrak{A}_x^{II}}{\mathsf{a}_x}$$

dient, wird nach der Formel

$$\mathsf{a}_{x\,\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{t=n} {}_{t-1|}p_x^{(3)}\, v^{t-1}$$

ermittelt. Durch Anwendung der Beziehung

$$v^{t-1} = \mathsf{a}_{\overline{t}|} - \mathsf{a}_{\overline{t-1}|},$$

in welcher $\mathsf{a}_{\overline{t}|} = \dfrac{1 - v^t}{1 - v}$ den Barwert der Zeitrente 1 von t-jähriger Dauer bedeutet, findet man die zweite Form für den Rentenbarwert

$$\mathsf{a}_{x\,\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{t=n} {}_{t-1|}p_x^{(1)+(2)}\, \mathsf{a}_{\overline{t}|} + {}_np_x^{(3)}\, \mathsf{a}_{\overline{n}|}.$$

Sind bereits k Jahre der Versicherungsdauer verflossen, ohne dass eines der versicherten Ereignisse eingetreten ist, so muss die Prämienreserve ${}_xV_k$ vorhanden sein, die bekanntermassen nach der Formel

$${}_xV_k = \mathfrak{A}_{x+k} - P_x\, \mathsf{a}_{x+k}$$

berechnet wird. Diese kann mit Benutzung der zweiten Form des Barwerts der Beharrungsrente, wenn man die vereinfachenden Bezeichnungen

$${}_{t-1|}p_{x+n}^{(1)} = p_{t-1}^{(1)}, \quad {}_{t-1|}p_{x+n}^{(2)} = p_{t-1}^{(2)}, \quad {}_{n-k}p_{x+k}^{(3)} = p_{n-k}^{(3)}$$

$$\left.\begin{array}{l} v^t\, S_{k+t}^{(1)} - P_x^I\, \mathsf{a}_{\overline{t}|} \\ v^t\, S_{k+t}^{(1)} - P_x^{II}\, \mathsf{a}_{\overline{t}|} \end{array}\right\} = a_t \qquad \left.\begin{array}{l} -P_x^I\, \mathsf{a}_{\overline{t}|} \\ v^t\, S_{k+t}^{(2)} - P_x\, \mathsf{a}_{\overline{t}|} \end{array}\right\} = b_t$$

$$\left.\begin{array}{l} v^{n-k}\, S_n^{(3)} - P_x^I\, \mathsf{a}_{\overline{n-k}|} \\ v^{n-k}\, S_n^{(3)} - P_x^{II}\, \mathsf{a}_{\overline{n-k}|} \end{array}\right\} = c_{n-k}$$

einführt, in der für beide Versicherungsformen geltenden Form

$$_xV_k = \sum_{t=1}^{t=n-k} p_{t-1}^{(1)}\, a_t + \sum_{t=1}^{t=n-k} p_{t-1}^{(2)}\, b_t + p_{n-k}^{(3)}\, c_{n-k}$$

dargestellt werden. Indem man auf beiden Seiten $_xV_k$ kürzt und zur weiteren Vereinfachung

$$a_t - {}_xV_k = \alpha_t, \quad b_t - {}_xV_k = \beta_t, \quad c_{n-k} - {}_xV_k = \zeta_{n-k}$$

setzt, erhält man die auf Null reduzierte Gleichung der Barwerte der Gewinne und Verluste

$$_xG_k = \sum_{t=1}^{t=n-k} p_{t-1}^{(1)}\, \alpha_t + \sum_{t=1}^{t=n-k} p_{t-1}^{(2)}\, \beta_t + p_{n-k}^{(3)}\, \zeta_{n-k} = 0,$$

die wir für die λte Versicherung einfach durch G_λ bezeichnen wollen. Durch Quadrieren der Beträge α_t, β_t und ζ_{n-k} ergibt sich für das mittlere Risikoquadrat der ferneren Dauer

$$M_k^2 = \sum_{t=1}^{t=n-k} p_{t-1}^{(1)}\, \alpha_t^2 + \sum_{t=1}^{t=n-k} p_{t-1}^{(2)}\, \beta_t^2 + p_{n-k}^{(3)}\, \zeta_{n-k}^2,$$

das für die λte Versicherung einfach durch M_λ^2 bezeichnet werde. Setzt man hierin die Werte von α_t, β_t, ζ_{n-k} ein, so erhält man nach Auflösung der Quadrate das mittlere Risikoquadrat in der Form

$$\begin{aligned} M_k^2 &= \sum_{t=1}^{t=n-k} p_{t-1}^{(1)}\, a_t^2 + \sum_{t=1}^{t=n-k} p_{t-1}^{(2)}\, b_t^2 + p_{n-k}^{(3)}\, c_{n-k}^2 - {}_xV_k^2 \\ &= {}_xQ_k^2 - {}_xV_k^2, \end{aligned}$$

für die in bezug auf die λte Versicherung einfach

$$M_\lambda^2 = Q_\lambda^2 - V_\lambda^2$$

geschrieben werde.

Wir flechten noch ein, dass der Index x, der allgemein als das Zeichen des Beitrittsalters eines einzelnen Lebens verwendet wird, auch die erweiterte Bedeutung haben kann, als Zeichen der Beitrittsalter oder des mittleren Beitrittsalters verbundener Leben angesehen zu werden.

A. Das Quadrat des mittleren Risikos der ferneren Dauer.

Man bilde für s voneinander unterschiedene Versicherungen die generierende Funktion

$$X = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} Z_\lambda = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} \left(\sum_1^{\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\,\lambda)}\, u^{\alpha\,(t,\,\lambda)} + \sum_1^{\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\,\lambda)}\, u^{\beta\,(t,\,\lambda)} + p^{(3)}_{\nu_\lambda}\, u^{\zeta_{\nu_\lambda}} \right), \quad \text{(I)}$$

in welcher $n - k = \nu$ gesetzt ist, und λ anzeige, dass die betreffenden Grössen für den λten Vertrag gelten. Diese generierende Funktion kann in die Reihe

$$X = \Sigma\, P_{(K)} \cdot u^K \qquad \text{(II)}$$

umgeformt werden, in welcher $P_{(K)}$ die Wahrscheinlichkeit darstellt, dass die auf den Zeitpunkt der Betrachtung durch Diskontierungen zurückgeführte Gebarung

$$\begin{aligned} K = {} & \alpha_{(t_1,\,1)} + \alpha_{(t_2,\,2)} + \alpha_{(t_3,\,3)} + \ldots \\ & + \beta_{(t_1,\,1)} + \beta_{(t_2,\,2)} + \beta_{(t_3,\,3)} + \ldots \\ & + \zeta_{\nu_1} + \zeta_{\nu_2} + \zeta_{\nu_3} + \ldots \end{aligned}$$

eintreffen werde. Aus der Poissonschen Entwicklung geht hervor, dass für jede Versicherung die Gewinn- und Verlustbeträge nur immer eines einzigen Versicherungsjahres auftreten, sofern sie nicht ganz ausfallen. Über die generierenden Funktionen geben z. B. die schon in meinen früheren Aufsätzen zitierten Werke von Meyer-Czuber und Sabudski-Ritter von Eberhard Aufschluss.

Differentiiert man (I) und (II) nach u, so erhält man aus (I)

$$\frac{dX}{du} = X \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \frac{1}{Z_\lambda} \left(\sum_1^{\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\lambda)}\, \alpha_{(t,\lambda)}\, u^{\alpha(t,\lambda)-1} + \right.$$

$$\left. + \sum_1^{\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\lambda)}\, \beta_{(t,\lambda)}\, u^{\beta(t,\lambda)-1} + p^{(3)}_{\nu_3}\, \zeta_{\nu_\lambda}\, u^{\zeta\nu_\lambda-1} \right)$$

und aus (II)

$$\frac{dX}{du} = \Sigma\, P_{(K)}\, K\, u^{K-1}.$$

Nach der schon auf Laplace zurückzuführenden Berechnungsweise erhält man, weil

$$\lim_{u=1} X = \lim_{u=1} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} Z_\lambda = 1,$$

einerseits

$$\lim_{u=1} \frac{dX}{du} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \left(\sum_1^{\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\lambda)}\, \alpha_{(t,\lambda)} + \sum_1^{\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\lambda)}\, \beta_{(t,\lambda)} + p^{(3)}_{\nu_\lambda}\, \zeta_{\nu_\lambda} = 0 \right) \quad \text{(III)}$$

und andrerseits

$$\lim_{u=1} \frac{dX}{du} = \Sigma\, P_{(K)}\, K,$$

so dass sich

$$\Sigma\, P_{(K)}\, K = 0 \qquad \text{(IV)}$$

ergibt, während aus der Grundgleichung

$$\Sigma\, P_{(K)} = 1 \qquad \text{(V)}$$

folgt. Den Nachweis, dass «mittlerer Gewinn und Verlust einander gleich sind», hat schon Prof. Dienger für Lebensversicherungen in einem kurzen Aufsatz erbracht, der in der Rundschau der Versicherungen von Masius, Jahrgang XXVII, Leipzig 1877, erschienen ist.

Verwendet man statt der Beträge $\alpha_{(t,\lambda)}$, $\beta_{(t,\lambda)}$, ζ_{ν_λ} die um ${}_xV_k$ grösseren Beträge $a_{(t,\lambda)}$, $b_{(t,\lambda)}$, c_{ν_λ}, so findet man auf dem beschriebenen Wege

$$\Sigma\, P_{(\mathfrak{K})}\, \mathfrak{K} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \left(\sum_{1}^{\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\lambda)}\, a_{(t,\lambda)} + \sum_{1}^{\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\lambda)}\, b_{(t,\lambda)} + p^{(3)}_{\nu_\lambda}\, c_{\nu_\lambda} \right)$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} V_\lambda, \qquad \text{(VI)}$$

d. h. die Summe der Erwartungswerte aller Grössen $\mathfrak{K}$, welche sich aus den Grössen $a_{(t,\lambda)}$, $b_{(t,\lambda)}$ und c_{ν_λ} zusammensetzen lassen, ergibt die Summe der $k$ten Reserven. Im übrigen sei auf den früheren Aufsatz des Verfassers aufmerksam gemacht.

Für s gleiche Verträge hatte der Verfasser schon eine eingehende Untersuchung des mittleren ferneren Risikoquadrates unter Berücksichtigung aller überhaupt möglichen Abweichungen in seinem früheren Aufsatz gegeben. Die folgenden Betrachtungen sind als eine Ver-

allgemeinerung der Darstellung des Herrn Dr. Gruder [1]) anzusehen. Bildet man die zweiten Differentialquotienten der mit Verwendung der Grössen $a_{(t,\lambda)}$, $b_{(t,\lambda)}$, c_{ν_λ} gebildeten generierenden Funktion Y und geht dann zur Grenze $u = 1$ über, so erhält man einerseits

$$\lim_{u=1} \frac{d^2 Y}{d u^2} = \left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} V_\lambda\right)^2 - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} V_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} (Q_\lambda^2 - V_\lambda^2)$$

und andrerseits

$$\lim_{u=1} \frac{d^2 Y}{d u^2} = \Sigma\, P_{(\mathfrak{K})}\, \mathfrak{K}\,(\mathfrak{K}-1) = \Sigma\, P_{(\mathfrak{K})}\, \mathfrak{K}^2 - \Sigma\, P_{(\mathfrak{K})}\, \mathfrak{K}.$$

Da aber

$$\Sigma\, P_{(\mathfrak{K})}\, \mathfrak{K} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} V_\lambda \quad \text{und} \quad Q_\lambda^2 - V_\lambda^2 = M_\lambda^2,$$

so findet man

$$\Sigma\, P_{(\mathfrak{K})}\, \mathfrak{K}^2 = \left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} V_\lambda\right)^2 + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} M_\lambda^2. \qquad \text{(I)}$$

Das ist aber der mittlere Wert der Quadrate aller nur möglichen Werte von a, b und c. Will man das Quadrat der mittleren Abweichung von der Gesamtreserve sämtlicher Versicherungen berechnen, so muss man die Gleichung

$$\Sigma\, P_{(\mathfrak{K})} \left(\mathfrak{K} - \sum_1^s V_\lambda\right)^2 = \Sigma\, P_{(\mathfrak{K})}\, \mathfrak{K}^2 - 2\,\Sigma\, P_{(\mathfrak{K})}\, \mathfrak{K} \sum_1^s V_\lambda + \\ + \Sigma\, P_{(\mathfrak{K})} \left(\sum_1^s V_\lambda\right)^2$$

---

[1]) Transactions of the ninth international Congress of Actuaries, Vol. II, Stockholm 1930.

Den mittleren Fehler bei n Versuchen mit je zwei sich ändernden, zusammen 1 betragenden Wahrscheinlichkeiten hat bereits Timerding in der «Analyse des Zufall» (Braunschweig 1915. Das Urnenschema) nach dieser Methode berechnet.

bilden, aus der man leicht

$$\Sigma\, P_{(\mathfrak{K})} \left(\mathfrak{K} - \sum_{1}^{s} V_\lambda \right)^2 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} (Q_\lambda^2 - V_\lambda^2) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} M_\lambda^2 \quad \text{(II)}$$

findet. Rechnet man dagegen mit den Grössen $\alpha_{(t,\lambda)}$, $\beta_{(t,\lambda)}$, ζ_{ν_λ}, so ergibt sich für die Grenzwerte der zweiten Differentialquotienten der generierenden Funktion, weil an Stelle der Reserven V_λ die Gleichungen der Hoffnungswerte der Gewinn- und Verlustbeträge $G_\lambda = 0$ entstehen,

$$\lim_{u=1} \frac{d^2 X}{d u^2} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \left(\sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p_{(t-1,\lambda)}^{(1)}\, \alpha_{(t,\lambda)}^2 + \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p_{(t-1,\lambda)}^{(2)}\, \beta_{(t,\lambda)}^2 + p_{\nu_\lambda}^{(3)}\, \zeta_{\nu_\lambda}^2 \right)$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} M_\lambda^2$$

und

$$\lim_{u=1} \frac{d^2 X}{d u^2} = \Sigma\, P_{(K)}\, K^2,$$

so dass man

$$\Sigma\, P_{(K)}\, K^2 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} M_\lambda^2 \qquad \text{(III)}$$

erhält. Man erkennt hieran, dass das Quadrat der mittleren Abweichung von der Gesamtreserve gleich dem Quadrat des mittleren Risikos der ferneren Dauer ist.

B. Anwendung des Tschebyscheffschen Theorems.

Die Gleichungen (II) und (III) des vorigen Abschnittes liefern eine überraschend bequeme Handhabe, den Satz von Tschebyscheff zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Gesamtverlustes oder eines Gesamtgewinnes aus der ferneren Dauer zu verwenden. Wir

benutzen dabei die Darstellung des Tschebyscheffschen Satzes, wie sie bei Sabudski-Ritter von Eberhard (s. a. a. O.) gegeben wird [1]). Aus den Gleichungen (II) und (III) lassen sich die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma P_{(\mathfrak{K})}\left(\frac{\mathfrak{K}-\Sigma V_\lambda}{\gamma\sqrt{2}\sqrt{\Sigma M_\lambda^2}}\right)^2=\frac{1}{2\gamma^2} \\ \text{und}\quad &\Sigma P_{(K)}\left(\frac{K}{\gamma\sqrt{2}\sqrt{\Sigma M_\lambda^2}}\right)^2=\frac{1}{2\gamma^2} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

herleiten, in denen

$$\frac{\mathfrak{K}-\Sigma V_\lambda}{\gamma\sqrt{2\Sigma M_\lambda^2}}=U \quad \text{und} \quad \frac{K}{\gamma\sqrt{2\Sigma M_\lambda^2}}=U \qquad \text{(II)}$$

gesetzt werde. Man kann nun die Zerlegung

$$\sum_1 P\cdot U^2+\sum_2 P\cdot U^2+\sum_3 P\cdot U^2=\frac{1}{2\gamma^2} \qquad \text{(III)}$$

vornehmen. Die erste Summe links vom Gleichheitszeichen gilt für die Werte von U, welche zwischen dem grössten negativen Wert und -1 liegen. Die zweite Summe enthält die Werte von U, welche zwischen -1 und $+1$ liegen. Die dritte Summe umfasst sämtliche Werte von U, welche grösser als 1 sind. Wird die mittlere Summe fortgelassen, so entsteht die Ungleichung

$$\sum_1 P\cdot U^2+\sum_2 P\cdot U^2<\frac{1}{2\gamma^2} \qquad \text{(IV)}$$

[1]) Von anderen Voraussetzungen ausgehend benutzt diese Beweisform auch Medolaghi in seinem dem VI. internationalen Kongress für Versicherungswissenschaft (Wien 1909) gewidmeten Beitrag «La theoria del rischio e le sue applicazioni».

Da in dieser Ungleichung U^2 immer der Ungleichung $U^2 > 1$ genügt, so wird die linke Seite noch kleiner, wenn man $U^2 = 1$ setzt. Es besteht daher noch mit grösserer Berechtigung die Ungleichung

$$\sum_1 P + \sum_3 P < \frac{1}{2\gamma^2}. \tag{V}$$

Subtrahiert man nun die Ungleichung (V) von der Gleichung

$$\sum_1 P + \sum_2 P + \sum_3 P = 1, \tag{VI}$$

welche in Analogie zur Gleichung (III) aus

$$\Sigma P = 1$$

gebildet ist, so folgt, wenn man $\sum_2 P = \mathfrak{W}$ setzt,

$$\mathfrak{W} > 1 - \frac{1}{2\gamma^2}. \tag{VII}$$

Da nun aber $\mathfrak{W}$ die Wahrscheinlichkeit für die Summe derjenigen Werte von U^2 ist, welche kleiner als 1 sind und aus U^2 die Ungleichungen

$$-\gamma\sqrt{2\Sigma M_\lambda^2} < \mathfrak{K} - \Sigma V_\lambda < +\gamma\sqrt{2\Sigma M_\lambda^2}$$
$$-\gamma\sqrt{2\Sigma M_\lambda^2} < K < +\gamma\sqrt{2\Sigma M_\lambda^2}$$

hergeleitet werden können, so kann erstens mit der Wahrscheinlichkeit (VII) gefolgert werden, dass die Abweichung von der Summe der Nettoreserven $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} V_\lambda$ innerhalb der Grenzen $\pm\gamma\sqrt{2\Sigma M_\lambda^2}$ liegen werde. Zweitens kann man mit der Wahrscheinlichkeit (VII) an-

nehmen, dass die Abweichung von der rechnungsmässigen Gebarung $\Sigma G_\lambda = 0$ sich innerhalb der gleichen Grenzen halten werde. Im Anschluss hieran sei auch auf Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Band II, Nr. 354: «Die wahrscheinlichkeitstheoretische Bedeutung des mittleren Risikos eines Versicherungsbestandes» hingewiesen.

C. Die Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeit mittels eines Fourierschen Ausdrucks.

Durch Entwicklung der generierenden Funktion wurde im Abschnitt A für die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Beträge k, wobei k sowohl K wie auch $\mathfrak{K}$ bedeuten kann, die Beziehung

$$\Sigma P_{(k)} = 1 \tag{I}$$

berechnet. Multiplizieren wir diese mit dem bekannten Diskontinuitätsfaktor

$$\frac{d\,u}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(k-u)\,x\,i}\, d\,x, \tag{II}$$

so erhalten wir die Wahrscheinlichkeit $P_{(k)}\ d\,k$ eines Betrages zwischen k und $k + d\,k$. Diese ist nicht ganz richtig, weil sich k nicht kontinuierlich ändert. Im vorliegenden Fall kann hierüber aber hinfortgesehen werden. Lässt man auf beiden Seiten das Differential $d\,u$ fort, so erhält man den dem Fourierschen Doppelintegral sehr ähnlichen Funktionsausdruck

$$P_{(u)} = \frac{1}{2\,\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} P_{(k)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(k-u)\,x\,i}\, d\,x, \tag{III}$$

welcher für ein kontinuierliches k in das bekannte Fouriersche Doppelintegral übergeht.

Der Ausdruck (III) lässt sich in der Form schreiben:

$$P_{(u)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u x i} (\Sigma P_{(k)} e^{k x i}) \, d x \qquad \text{(IV)}$$

Setzt man für $e^{k x i}$ die Exponentialreihe und bricht diese nach der zweiten Potenz ab, so erhält man nach Einführung der im Abschnitt A gezeigten Summen

$$\Sigma P_{(k)} = 1, \quad \Sigma P_{(k)} \cdot k = \begin{cases} 0 \\ a \end{cases}, \quad \Sigma P_{(k)} k^2 = m^2$$

den Näherungsausdruck

$$P_{(u)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + a x i - \frac{1}{2} m^2 x^2\right) e^{-u x i} \, d x.$$

Beachtet man ferner, dass man

$$\left(1 + a x i - \frac{1}{2} m^2 x^2\right) = e^{ln \left(1 + a x i - \frac{1}{2} m^2 x^2\right)}$$

setzen kann und wendet auf den Exponenten die für kleine Werte von x statthafte Näherungsgleichung

$$ln \left(1 + a x i - \frac{1}{2} m^2 x^2\right) = a x i - \frac{1}{2} (m^2 - a^2) x^2$$

an, so ergibt sich der bekannte Laplacesche Näherungsausdruck

$$P_{(u)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} (m^2 - a^2) x^2 - (u - a) x i} \, d x, \qquad \text{(V)}$$

welcher, weil stets

$$m^2 - a^2 = \mathfrak{M}^2 \quad \text{und} \quad u - a = \Delta$$

ist, die bekannte Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P_{(\Delta)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{2}\,\mathfrak{M}}\, e^{-\frac{\Delta^2}{2\mathfrak{M}^2}} \tag{VI}$$

liefert.

Aus der Formel (VI) findet man z. B. (in Anlehnung an Poisson)

$$\sum_{\Delta=-K}^{\Delta=K} P_{(\Delta)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\mathfrak{M}^2 x^2} \sum_{\Delta=-K}^{\Delta=K} e^{-\Delta z i}\, dz.$$

Wendet man die aus der einfachen Rechtecksformel sich ergebende Näherungsformel

$$\sum_{k=0}^{k=b-a} y_{a+k} = \int_a^b y_x\, dx + \frac{1}{2}(y_a + y_b)$$

an, so folgt

$$\sum_{\Delta=-K}^{\Delta=K} e^{-\Delta z i} = \int_{-K}^{K} e^{-\Delta z i} d\Delta + \frac{1}{2}(e^{-Kzi} + e^{Kzi}).$$

Da nun aber

$$\int_{-K}^{K} e^{-\Delta z i}\, d\Delta = \frac{e^{Kzi} - e^{-Kzi}}{z i},$$

so erhält man mittels der bekannten Formeln

$$\frac{1}{2i}(e^{Kzi} - e^{-Kzi}) = \sin Kz \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}(e^{-Kzi} + e^{Kzi}) = \cos Kz$$

die leicht weiter zu behandelnde Formel

$$\sum_{\Delta=-K}^{\Delta=K} P_{(\Delta)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\mathfrak{M}^2 z^2} \frac{\sin Kz}{z}\, dz + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\mathfrak{M}^2 z^2} \cos Kz\, dz. \quad \text{(VII)}$$

Bei Verzicht auf grössere Genauigkeit kann man bekanntlich mit der Wahrscheinlichkeit

$$\Phi_{(\gamma)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt$$

erwarten, dass der gegenwärtige Wert der voraussichtlichen Ausgaben um den Betrag

$$\pm \gamma \sqrt{2}\, \mathfrak{M}$$

von der rechnungsmässigen Summe der Barwerte der Gewinne und Verluste

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} G_\lambda = 0$$

oder von der rechnungsmässigen Summe der Prämienreserven

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} V_\lambda$$

abweichen werde.

D. Die Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeit nach der französischen Methode unter Berücksichtigung der Forschungen von Poisson und Dienger.

Während das Tschebyscheffsche Theorem keine Bedingung über die Anzahl der Verträge stellt, fordert die

französische Methode eine hinreichend grosse Anzahl von Verträgen.

Um mit Hilfe des Laplace-Poissonschen Integrals

$$P_{(K)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X\, e^{-Kzi}\, dz \qquad \text{(A)}$$

die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes K aus sämtlichen Vertragsarten zu bestimmen, hat man für die erzeugende Funktion X zu setzen:

$$X = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} \left(\sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\lambda)}\, e^{\alpha(t,\lambda)zi} + \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\lambda)}\, e^{\beta(t,\lambda)zi} + p^{(3)}_{\nu_\lambda}\, e^{\zeta\nu_\lambda zi} \right).$$

Diese geht aus der generierenden Funktion des Abschnittes A hervor, indem man $u = e^{zi}$ setzt.

Die Wahrscheinlichkeit eines für den Zeitpunkt der Betrachtung berechneten Gesamtbedarfs an Prämienreserve, der die rechnungsmässige um K überschreite, so dass die Gleichung

$$\mathfrak{K} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} V_\lambda + K$$

besteht, wird durch den Ausdruck

$$P_{(\mathfrak{K})} = P_{(K)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y\, e^{-\mathfrak{K}zi}\, dz \qquad \text{(B)}$$

dargestellt, in welchem die erzeugende Funktion Y durch den Ausdruck

$$Y = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} \left(\sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\lambda)}\, e^{a(t,\lambda)zi} + \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\lambda)}\, e^{b(t,\lambda)zi} + p^{(3)}_{\nu_\lambda}\, e^{b\nu_\lambda zi} \right)$$

gegeben ist. Durch eine einfache Umformung überzeugt man sich, dass die Gleichung

$$Y e^{-\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} v_\lambda z i} = X$$

besteht, wonach beide Berechnungen zu den gleichen Ergebnissen führen müssen.

Die Umgestaltung der durch die Formeln (A) und (B) gegebenen Verlust- oder Gewinnwahrscheinlichkeit in das Exponentialgesetz kann durch die auf Laplace zurückzuführenden Umformungen erfolgen, deren sich Laurent und Küttner wie auch der Verfasser in seinen früheren Aufsätzen bedient haben. Eine allgemeinere Darstellung hat der Verfasser in seinem Aufsatz «Zur Berechnung des Risikos der ferneren Dauer von kontinuierlich berechneten Versicherungen mit zwei verschiedenen Möglichkeiten des Ausscheidens [1])» angewendet. Die dort für kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsfolgen gegebenen Herleitungen lassen sich natürlich auch bei Jahresintervallen verwenden und wohl auch noch etwas anders gestalten. Eine Anwendung des Poissonschen Theorems auf einen Bestand von Invaliditätsrenten ist vom Verfasser gegeben worden [2]), ehe er Gelegenheit hatte, die seltenen und schwer zu erhaltenden Abhandlungen von Prof. Dienger [3]) kennen zu

---

[1]) Giornale di Matematica finanziaria, Serie II, Vol. II.

[2]) Die Berechnung des Risikos der Invaliditätsrenten, Archief voor de Verzekeringswetenschap en aanverwante vakken. Deel XVII, Afl. 5 1919.

[3]) 1. Über den wahrscheinlichen und den mittleren Gewinn oder Verlust im Laufe eines Jahres bei der einfachen Lebensversicherung, Annalen des gesamten Versicherungswesens, Leipzig 1872.

2. Der mittlere Gewinn oder Verlust bei der Lebens-Versicherung für die ganze Versicherungsdauer, Rundschau der Versicherungen, begründet von Dr. E. A. Masius, Leipzig 1877.

lernen, die sich aber nur auf einfache Lebensversicherungen beziehen.

In dieser Arbeit soll die Theorie der komplexen Zahlen ohne die von Poisson benutzte Moivresche Zerlegung $e^{\pm a z i} = \cos a z \pm i \sin a z$ angewendet werden. Einer ähnlichen Darstellung hatte sich der Verfasser bereits in dem oben erwähnten Aufsatz im Giornale di Matematica finanziaria bedient. Diese wie die folgende Darstellung darf wohl als wesentlich einfacher gegenüber der Poissonschen angesehen werden.

In dem Ausdruck (B), dessen generierende Funktion

$$Y = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} Z_\lambda$$

ist, hat der λte Faktor der letzteren die Form

$$Z_\lambda = \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\lambda)}\, e^{a_{(t,\lambda)} z i} + \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\lambda)}\, e^{b_{(t,\lambda)} z i} + p^{(3)}_{\nu_\lambda}\, e^{c_{\nu_\lambda} z i}.$$

Entwickelt man diesen Faktor nach der Maclaurinschen Reihe bis zur zweiten Potenz von z, so erhält man zunächst

$$Z_\lambda = Z_{\lambda(0)} + z\, Z'_{\lambda(0)} + \frac{z^2}{2} Z''_{\lambda(0)}. \qquad \text{(I)}$$

Nun findet man aber

$$Z_{\lambda(0)} = 1 \qquad \text{(II)}$$

$$Z'_\lambda = i \left[\sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\lambda)}\, e^{a_{(t,\lambda)} z i}\, a_{(t,\lambda)} + \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\lambda)}\, e^{b_{(t,\lambda)} z i}\, b_{(t,\lambda)} + p^{(3)}_{\nu_\lambda}\, e^{c_{\nu_\lambda} z i}\, c_{\nu_\lambda} \right]$$

$$\left.\begin{aligned} Z'_{\lambda(0)} &= i \left[\sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\lambda)}\, a_{(t,\lambda)} + \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\lambda)}\, b_{(t,\lambda)} + p^{(3)}_{\nu_\lambda}\, c_{\nu_\lambda} \right] \\ &= i \cdot V_\lambda \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

und ferner

$$Z''_\lambda = i^2 \left[\sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\lambda)}\, e^{a_{(t,\lambda)} z i}\, a^2_{(t,\lambda)} + \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\lambda)}\, e^{b_{(t,\lambda)} z i}\, b^2_{(t,\lambda)} + p^{(3)}_{\nu_\lambda}\, e^{c_{\nu_\lambda} z i}\, c^2_{\nu_\lambda} \right]$$

$$\left.\begin{aligned} Z''_{\lambda(0)} &= -\left[\sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\lambda)}\, a^2_{(t,\lambda)} + \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\lambda)}\, b^2_{(t,\lambda)} + p^{(3)}_{\nu_\lambda}\, c^2_{\nu_\lambda} \right] \\ &= -Q^2_\lambda. \end{aligned}\right\} \quad \text{(IV)}$$

Man kann daher dem Faktor Z_λ die komplexe Näherungsform

$$Z_\lambda = \left(1 - \frac{1}{2} Q^2_\lambda z^2\right) + V_\lambda z i \qquad \text{(V)}$$

geben. Das einfachste wäre es natürlich, die Näherungsfunktion nach Laplace in die Exponentialform

$$Z_\lambda = e^{V_\lambda z i - \frac{1}{2} Q^2_\lambda z^2} \qquad \text{(V a)}$$

umzuwandeln, wodurch alle weitläufigen Berechnungen vermieden werden können. Dennoch soll mit Rücksicht auf die interessante Seite dieser Untersuchungen nach Poisson bzw. Moivre

$$\left.\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} Q^2_\lambda z^2 &= \varrho_\lambda \cos \varphi_\lambda \\ V_\lambda z &= \varrho_\lambda \sin \varphi_\lambda \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI)}$$

gesetzt werden. Bekanntlich ist dann näherungsweise

$$\left.\begin{aligned} \varrho^2_\lambda &= \left(1 - \frac{1}{2} Q^2_\lambda z^2\right)^2 + (V_\lambda z)^2 \\ &= 1 - (Q^2_\lambda - V^2_\lambda)\, z^2 = 1 - M^2_\lambda z^2 \\ &\text{oder auch in weiterer Annäherung} \\ \varrho^2_\lambda &= e^{-M^2_\lambda z^2} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(V)}$$

Zieht man auf beiden Seiten die Quadratwurzel, so folgt

$$\varrho_\lambda = e^{-\frac{1}{2} M_\lambda^2 z^2}. \qquad \text{(VI)}$$

Andrerseits ergibt sich

$$Z_\lambda = \varrho_\lambda (\cos \varphi_\lambda + i \sin \varphi_\lambda) = \varrho_\lambda e^{\varphi_\lambda i} \qquad \text{(VI } a\text{)}$$

so dass man zu dem Näherungswert

$$Z_\lambda = e^{-\frac{1}{2} M_\lambda^2 z^2 + \varphi_\lambda i}$$

gelangt. Die weitere Aufgabe besteht in der Ermittlung geeigneter Näherungswerte für die Amplitüden φ_λ. Man kann dabei auf verschiedene Weise vorgehen. Die beliebteste Methode ist wohl die Berechnung von Tangens. Nach dieser ist

$$\operatorname{tg} \varphi_\lambda = \frac{V_\lambda z}{1 - \frac{1}{2} Q_\lambda^2 z^2} = V_\lambda z \left[1 + \left(\frac{1}{2} Q_\lambda^2 z^2 \right) + \left(\frac{1}{2} Q_\lambda^2 z^2 \right)^2 + \ldots \right],$$

und wenn man über den zweiten Grad von z nicht hinausgeht,

$$\operatorname{tg} \varphi_\lambda = V_\lambda z.$$

Da nun bekanntlich für einen kleinen Winkel φ_λ

$$\varphi_\lambda = \operatorname{tg} \varphi_\lambda \qquad \text{(VII)}$$

gesetzt werden kann, so erhält man den Näherungswert

$$\varphi_\lambda = V_\lambda z. \qquad \text{(VIII)}$$

Durch die Einführung des Näherungswerts von φ_λ kommt man erneut zu dem Näherungswert (V a) des Faktors Z_λ und erhält so für die generierende Funktion Y den bekannten Näherungswert

$$Y = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} \varrho_\lambda \, e^{\varphi_\lambda i} = e^{-\frac{1}{2}\sum M_\lambda^2 z^2 + \sum V_\lambda z i},$$

in dem man noch zur Abkürzung

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} M_\lambda^2 = \mathfrak{M}^2$$

setze. Führt man den letzteren in die Formel für $P_{(\mathfrak{K})}$ ein, dabei die Bedeutung von $\mathfrak{K}$ im Auge behaltend, so ergeben sich bei gleichzeitiger Ausdehnung der Integralgrenzen bis $-\infty$ und $+\infty$ die bekannten Ausdrücke

$$P_{(K)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\mathfrak{M}^2 z^2 - K z i} \, d z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\mathfrak{M}^2 z^2} \cos K z \, d z. \quad \text{(XI)}$$

Die Umformung des Ausdrucks (A) führt infolge der Bedingungsgleichung $G_\lambda = 0$ zu den Ergebnissen

$$\varrho_\lambda^2 = \left[1 - \frac{1}{2}\left(\sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p_{(t-1,\lambda)}^{(1)} \alpha_{(t,\lambda)}^2 + \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p_{(t-1,\lambda)}^{(2)} \beta_{(t,\lambda)}^2 + p_{\nu_\lambda}^{(3)} c_{\nu_\lambda}^2\right)\right]$$
$$= 1 - M_\lambda^2 z^2$$

und

$$\varphi_\lambda = 0,$$

so dass sich die Formel (XI) sogleich ergibt.

E. Die Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeit durch die Fouriersche Differentialgleichung.

Zur Umformung des Laplace-Poissonschen Wahrscheinlichkeitsdrucks (A) des Abschnittes D in die Exponentialfunktion hat der Verfasser noch einen Weg

unter Heranziehung der Fourierschen Differentialgleichung der Wärmeleitung gefunden. Bei s gleichen Fällen ist der Rechnungsgang ganz einfach. Liegen aber s voneinander unterschiedene Versicherungen vor, so wird eine Hilfsrechnung notwendig, die zunächst erledigt werden soll. Für die generierende Funktion X setzt man U^s, dann wird

$$s \, ln \, U = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} ln \, Z_\lambda$$

und

$$ln \, U = \frac{1}{s} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} ln \, Z_\lambda .$$

Man kann nun die Differentiation

$$\frac{d X}{d s} = \frac{d U^s}{d s} = U^s \, ln \, U = X \frac{1}{s} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} ln \, Z_\lambda \qquad \text{(I)}$$

ausführen. Für $ln \, Z_\lambda$ verwende man den durch Anwendung der Maclaurinschen Reihe sich ergebenden Näherungswert

$$ln \, Z_\lambda = ln \, Z_{\lambda(0)} + z \frac{Z'_{\lambda(0)}}{Z_{\lambda(0)}} + \frac{z^2}{2} \frac{Z''_{\lambda(0)} \, Z_{\lambda(0)} - (Z'_{\lambda(0)})^2}{(Z_{\lambda(0)})^2}$$

$$= Z'_{\lambda(0)} \, z + \frac{1}{2} \left[Z''_{\lambda(0)} - (Z'_{\lambda(0)})^2 \right] z^2 .$$

Wie wir im vorigen Abschnitt sahen, ergibt sich

$$Z'_\lambda = G_\lambda = 0 \quad \text{und} \quad Z''_{\lambda(0)} - (Z'_{\lambda(0)})^2 = - M^2_\lambda ,$$

so dass man zu dem Näherungswert

$$\frac{dX}{ds} = X\left(-\frac{1}{2s}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} M_\lambda^2 z^2\right) \qquad \text{(II)}$$

gelangt. Die Differentiation des Ausdrucks (A) nach s liefert daher den Näherungswert

$$\frac{d\,P_{(K)}}{d\,s} = -\frac{\mathfrak{M}^2}{2\,s}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\,e^{-Kzi}z^2\,dz. \qquad \text{(III)}$$

Differentiiert man dagegen den Ausdruck (A) zweimal nach K, so folgt

$$\frac{d^2\,P_{(K)}}{d\,K^2} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\,e^{-Kzi}\,z^2\,dz. \qquad \text{(IV)}$$

Durch Vergleichen der Ausdrücke (III) und (IV) kommt man, wenn man noch $\frac{\mathfrak{M}^2}{s} = \mathfrak{M}_0^2$ setzt, zu der bekannten partiellen Differentialgleichung

$$\frac{d\,P_{(K)}}{d\,s} = \frac{\mathfrak{M}_0^2}{2}\,\frac{d^2\,P_{(K)}}{d\,K^2}, \qquad \text{(V)}$$

deren einfachste Lösung bekanntlich

$$P_{(K)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{2s}\,\mathfrak{M}_0}\,e^{-\frac{K^2}{2s\mathfrak{M}_0^2}} \qquad \text{(VI)}$$

ist. Diese geht in den üblichen Ausdruck

$$P_{(K)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{2}\,\mathfrak{M}}\,e^{-\frac{K^2}{2\mathfrak{M}^2}}$$

über, wenn man den Wert von $\mathfrak{M}_0$ substituiert.

Soll der Ausdruck (B) des Abschnitts D nach diesem Verfahren behandelt werden, so empfiehlt es sich, zunächst die Transformation

$$Y e^{-\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} V_\lambda z i} = X$$

vorzunehmen.

F. Weitere Untersuchungen über das Risiko der ferneren Dauer.

Der Umstand, dass das Hattendorffsche, später von Mack und Rothauge bearbeitete Risiko auf die Form des sonst üblichen, schon von Bremiker aufgestellten Risikos gebracht werden kann, veranlasste den Verfasser zu der Untersuchung, ob es nicht noch andere Arten des ferneren Risikos geben könnte, bei welchen tatsächlich die nur noch vorhandenen Deckungsmittel auf die Leistungen angerechnet werden. Es sollen wieder s voneinander verschiedene Versicherungen betrachtet werden. Der wahrscheinliche oder rechnungsmässige Wert der Auszahlungen abzüglich der Deckungskapitale wird durch die Formel dargestellt:

$$_x\mathrm{J}_k = \sum_{t=1}^{t=r} p_{(t-1)}^{(1)}\, a_t + \sum_{t=1}^{t=r} p_{(t-1)}^{(2)}\, b_t, \qquad \text{(I)}$$

in welcher für die erste Versicherungsart

$$a_t = v^t \left(S_{k+t}^{(1)} - {}_xV_{k+t}\right), \qquad b_t = -\, v_x^t\, V_{k+t}$$

und für die zweite Versicherungsart

$$a_t = v^t \left(S_{k+t}^{(1)} - {}_xV_{k+t}\right), \qquad b_t = v^t \left(S_{k+t}^{(2)} - {}_xV_{k+t}\right)$$

zu setzen ist. Dieser Ausdruck stellt aber den Wrightschen Versicherungswert (vgl. Bohlmann, Lebens-

versicherungsmathematik, Abschnitt 10, Sonstige Prämien in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften) nach k-jährigem Bestehen der Versicherung dar. Wie man leicht erkennt, kann man den vorstehenden Ausdruck auch auf die Form bringen

$$ {}_xJ_k = \sum_{t=1}^{t=r} {}_{t-1}p_{x+k}^{(3)}\, v^{t-1}\, {}_x\Pi_{k+t}. \qquad \text{(I } a\text{)} $$

Der Versicherungswert stellt sonach auch die erwartungsmässige Einnahme an Risikoprämien dar. Würde die Versicherung in völliger Übereinstimmung mit den gewählten Rechnungsgrundlagen verlaufen, so hätte der Versicherer weder Verlust noch Gewinn. Die durch den Versicherungswert dargestellte Summe der Barwerte der Risikoprämien würde dann die rechnungsmässigen Schäden gerade decken. Weil nun aber die Erfahrung lehrt, dass sich die Veränderung eines Versicherungsstocks niemals in Übereinstimmung mit den angenommenen Wahrscheinlichkeiten vollzieht und ausserdem auch die versicherten Leistungen ungleich sind, so hat man eine Abweichung der künftigen Gebarung nach der positiven oder nach der negativen Richtung zu gewärtigen. Die positive Abweichung entspricht einem Verlust, die negative dagegen einem Gewinn des Versicherers. Es leuchtet ein, dass man wie im Abschnitt A eine mittlere quadratische Abweichung von der Summe aller Versicherungswerte berechnen kann. Daraus folgt wiederum, dass man, wie im Abschnitt B gezeigt wurde, nach dem modifizierten Tschebyscheffschen Theorem auch die Grenzen angeben kann, bis zu denen eine positive oder negative Abweichung von der Summe der Versicherungswerte mit der Wahrscheinlichkeit

$$\mathfrak{W} > 1 - \frac{1}{2\,\gamma^2}$$

zu erwarten ist. Schliesslich kann man auch nach dem in den Abschnitten D und E behandelten Laplace-Poissonschen Verfahren, wobei der generierenden Funktion die Form

$$Y = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} \left[\sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\,\lambda)}\, e^{a_{(t,\,\lambda)}\, z\, i} + \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\,\lambda)}\, e^{b_{(t,\,\lambda)}\, z\, i} + p^{(3)}_{\nu_\lambda} \right]$$

zu erteilen ist, für den unbekannten Verlust K, um welchen die Summe aller Versicherungswerte überschritten wird, den Wahrscheinlichkeitsausdruck

$$P_{(K)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{2}\,\mathfrak{M}}\, e^{-\frac{K^2}{2\,\mathfrak{M}^2}}$$

berechnen, in welchem $\mathfrak{M}^2$ den bei allen drei Berechnungsweisen sich ergebenden Wert

$$\mathfrak{M}^2 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \left[J^{(2)}_\lambda - (J_\lambda)^2 \right]$$

hat. Dabei ist $J^{(2)}_\lambda$ nach der Formel

$$J^{(2)}_\lambda = \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\,\lambda)}\, a^2_{(t,\,\lambda)} + \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\,\lambda)}\, b^2_{(t,\,\lambda)}$$

und J_λ nach der Formel

$$J_\lambda = \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\,\lambda)}\, a_{(t,\,\lambda)} + \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\,\lambda)}\, b_{(t,\,\lambda)}$$

zu berechnen.