Zwei Beiträge zum Zinsfussproblem

Zwei Beiträge zum Zinsfussproblem.

Von Dr. **Paul Güttinger**, Basel.

Obwohl über das Zinsfussproblem schon Vieles und Gutes geschrieben worden ist, muss es doch jeden Mathematiker reizen, auf diesem interessanten Gebiet der Versicherungsmathematik weiterzuforschen. Es sei deshalb gestattet, anhand zweier kleiner Beiträge die bisherigen Ergebnisse zu erweitern.

Zunächst sei auf eine ausgezeichnete Arbeit von *Christen* [1]) verwiesen, in der das ganze Problem eingehend dargestellt ist. Es wird dort gezeigt, wie man mit verschiedenen Methoden zu Näherungsformeln gelangt, die gut brauchbare Resultate liefern.

In vorliegender Arbeit sollen nun zwei neue Wege gezeigt werden, welche zu recht genauen Näherungen führen:

A. Der Rentenbarwert a_x kann in folgender Form dargestellt werden:

$$(1) \qquad \mathrm{a}_x = \sum_{t=0} e^{-\delta t} \frac{l_{x+t}}{l_x},$$

wo δ die Zinsintensität bedeutet.

Die erste Ableitung von a_x nach der Zinsintensität ist nun

$$(2) \qquad \frac{d\mathrm{a}_x}{d\delta} = -\sum_{t=0} t \cdot e^{-\delta t} \frac{l_{x+t}}{l_x}.$$

---

[1]) Dr. Hans Christen, Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1930, S. 251—325.

Man kann leicht zeigen, dass die rechte Seite von (2) gleich $-\frac{S_{x+1}}{D_x}$ ist. Somit erhalten wir:

$$(3) \qquad \frac{d\mathrm{a}_x}{d\delta} = -\frac{S_{x+1}}{D_x}.$$

Für den temporären Barwert $\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}$ finden wir entsprechend:

$$(4) \qquad \frac{d\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}}{d\delta} = -\sum_{t=o}^{n-1} t\cdot e^{-\delta t}\cdot\frac{l_{x+t}}{l_x} = -\frac{\sum^{n-1} t\cdot D_{x+t}}{D_x}$$

$$= -\frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n\cdot N_{x+n}}{D_x}.$$

Wenn wir die rechte Seite von (4) mit

$$\frac{N_x - N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

multiplizieren, nimmt Gl. (4) folgende Form an:

$$(5) \qquad \frac{d\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}}{d\delta} = -\,\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}\frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n\cdot N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

Die Integration der Differentialgleichung (5) ergibt:

$$(6) \qquad \mathrm{a}_{x:\overline{n}|}(\delta) = \mathrm{a}_{x:\overline{n}|}(\delta o)\, e^{-\int_{\delta o}^{\delta}\frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n\cdot N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}\,d\delta}$$

Wir haben damit für den Leibrentenbarwert eine Darstellung gefunden, die wohl kompliziert aussieht, aber für gewisse Untersuchungen mit Vorteil verwendet werden kann, wie z. B. beim Zinsfussproblem der Prämienreserve für die gemischte Versicherung:

Wenn ${}_t^0V_{x:\overline{n}|}$ die Reserve für den Zinsfuss i_0 (Zinsintensität δ_0) und ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ die Reserve für den Zinsfuss i (Zinsintensität δ) ist, gilt:

$$(7) \qquad {}_t^0V_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{\mathfrak{a}_{x+t:\overline{n-t}|}(\delta_0)}{\mathfrak{a}_{x:\overline{n}|}(\delta_0)}, \text{ und}$$

$$(8) \qquad {}_tV_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{\mathfrak{a}_{x+t:\overline{n-t}|}(\delta)}{\mathfrak{a}_{x:\overline{n}|}(\delta)}.$$

Unter Verwendung von Formel (6) können wir Gl. (8) auch so schreiben:

$$(9) \qquad {}_tV_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{\mathfrak{a}_{x+t:\overline{n-t}|}(\delta_0)}{\mathfrak{a}_{x:\overline{n}|}(\delta_0)} \cdot e^{+\int\limits_{\delta_0}^{\delta}\left\{\frac{S_{x+1}-S_{x+n+1}-n\cdot N_{x+n}}{N_x-N_{x+n}} - \frac{S_{x+t+1}-S_{x+n+1}-(n-t)\,N_{x+n}}{N_{x+t}-N_{x+n}}\right\}d\delta}$$

Da der Integrand im Exponenten stets positiv ist, wird der Exponentialfaktor um so grösser, je grösser der Zinsfuss i ist. Man kann daraus den bekannten Satz ableiten, dass das Deckungskapital der gemischten Versicherung bei zunehmendem Zinsfuss abnimmt, und umgekehrt.

Wir wollen nun dazu übergehen, aus Beziehung (6) eine Näherungsformel für den variierten Rentenbarwert $\mathfrak{a}_{x:\overline{n}|}(\delta)$ abzuleiten. Unter der Annahme, dass die Grösse

$$\frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n \cdot N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \quad \ldots \; (a)$$

im Verlaufe der Integration nicht allzustark variiert, gilt approximativ:

$$(10) \qquad \mathrm{a}_{x:\overline{n|}}(\delta) \sim \mathrm{a}_{x:\overline{n|}}(\delta_o) \cdot e^{-\Delta\delta \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n \cdot N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}}$$

Diese Näherung wurde schon von *Meidell* abgeleitet und gibt eine gute Genauigkeit bei Dauern unter 20 Jahren und Zinsfussänderungen bis $^3/_4$ %. Die damit erhaltenen Resultate sind etwas genauer als diejenigen nach der bekannten Formel:

$$(11) \qquad \mathrm{a}_{x:\overline{n|}}(\delta) \sim \mathrm{a}_{x:\overline{n|}}(\delta_o) + \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n \cdot N_{x+n}}{D_x}$$

Abweichungen vom genauen Wert treten im allgemeinen erst in der 3. Dezimale auf.

Um die Methode noch etwas zu verfeinern, berücksichtigen wir auch die Variation der Grösse (a) während der Integration von δ_o bis δ. Damit die Ableitung übersichtlich bleibt, wollen wir uns nur mit dem Fall der lebenslänglichen Leibrente beschäftigen. Hier haben wir:

$$(12) \qquad \mathrm{a}_x(\delta) = \mathrm{a}_x(\delta_o) \cdot e^{-\int\limits_{\delta_o}^{\delta} \frac{S_{x+1}}{N_x} d\delta}$$

Um die Zinsfussabhängigkeit des Integranden

$$\frac{S_{x+1}}{N_x} = \frac{S_x}{N_x} - 1$$

zu berücksichtigen, entwickeln wir S_x und N_x nach Potenzen von $\Delta\delta$ und erhalten so:

$$\frac{S_{x+1}}{N_x} = \frac{S_x}{N_x} - 1 = \frac{{}^oS_x - 2\Delta\delta \cdot {}^oS_{x+1}^{(2)} + \cdots}{{}^oN_x - \Delta\delta\, {}^oS_{x+1} + \cdots} - 1$$

Wenn man nur erste Potenzen in $\Delta\delta$ mitnimmt, findet man:

$$\frac{S_{x+1}}{N_x} \sim \frac{{}^oS_x - 2\cdot\Delta\delta\cdot{}^oS_{x+1}^{(2)}}{{}^oN_x - \Delta\delta\cdot{}^oS_{x+1}} - 1 \sim \frac{1}{N_o}\left\{\left({}^oS_x - 2\cdot\Delta\delta\cdot{}^oS_{x+1}^{(2)}\right)\cdot\left(1+\Delta\delta\frac{{}^oS_{x+1}}{{}^oN_x}\right)\right\} - 1$$

$$\frac{S_{x+1}}{N_x} \sim \left\{\frac{{}^oS_x}{{}^oN_x} - 1\right\} - \Delta\delta\cdot\left\{2\cdot{}^oS_{x+1}^{(2)} - \frac{{}^oS_x\,{}^oS_{x+1}}{{}^oN_x}\right\}\cdot\frac{1}{{}^oN_x}$$

$$\sim \left\{\frac{{}^oS_x}{{}^oN_x} - 1\right\} - \Delta\delta\cdot\left\{2\frac{{}^oS_x^{(2)}}{{}^oN_x} - \frac{({}^oS_x)^2}{({}^oN_x)^2} - \frac{{}^oS_x}{{}^oN_x}\right\} .$$

Leider ist aber in den meisten Tafeln $S_x^{(2)}$ nicht enthalten. Nun hat *Poukka* die Feststellung gemacht, dass die Grösse:

$$\frac{S_x^{(2)}}{S_x} : \frac{S_x}{N_x} = k$$

für alle Alter und Zinsfüsse nahezu konstant ist und im Mittel $= 0{,}84$ gesetzt werden kann. Somit kann

(15) $S_x^{(2)} = 0.84 \cdot \frac{(S_x)^2}{N_x}$ gewählt werden. Wir erhalten dann

$$(16)\quad \frac{S_{x+1}}{N_x} \sim \left\{\frac{{}^oS_x}{{}^oN_x} - 1\right\} - \Delta\delta\cdot\left\{0{,}68\cdot\frac{{}^oS_x}{{}^oN_x} - 1\right\}\cdot\frac{{}^oS_x}{{}^oN_x}$$

Dies von δ_o bis δ integriert, ergibt:

$$(17)\quad \int_{\delta_0}^{\delta} \frac{S_{x+1}}{N_x}\, d\delta \sim \Delta\delta \left\{ \frac{{}^oS_x}{{}^oN_x} - 1 \right\} - \frac{(\Delta\delta)^2}{2} \cdot \frac{{}^oS_x}{{}^oN_x} \cdot \left\{ 0{,}68 \cdot \frac{{}^oS_x}{{}^oN_x} - 1 \right\}$$

Wenn wir nun dieses Resultat in (12) einsetzen, finden wir

$$(18)\quad \mathrm{a}_x(\delta) \sim \mathrm{a}_x(\delta_o) \cdot e^{-\Delta\delta \cdot \left\{ \frac{{}^oS_x}{{}^oN_x} - 1 \right\} + \frac{(\Delta\delta)^2}{2} \cdot \frac{{}^oS_x}{{}^oN_x} \left\{ 0{,}68 \cdot \frac{{}^oS_x}{{}^oN_x} - 1 \right\}}$$

Damit hätten wir, wie nachfolgende Beispiele zeigen werden, eine Näherungsformel gefunden, die eine recht schöne Genauigkeit aufweist:

Für die Tafel $O^{(am)}_{1863/93}$ $3\frac{1}{2}\,\%$, Ultimate table, sollen aus a_x ($3\frac{1}{2}\,\%$) folgende Barwerte berechnet werden:

x	a_x (4%)		a_x (3%)	
	n. Gl. (18):	genau:	n. Gl. (18):	genau:
40	16,285	16,284	18,379	18,379
50	13,742	13,742	15,157	15,156
60	10,756	10,756	11,585	11,585

B. *Poukka* hat die überaus wertvolle Feststellung gemacht, dass das Verhältnis

$$\frac{S_x^{(2)}}{S_x} : \frac{S_x}{N_x} = k$$

nahezu konstant bleibt für alle Zinsfüsse und Alter, ja sogar von Tafel zu Tafel nur wenig verschieden ist.

Der folgende Abschnitt soll nun zeigen, *dass der Rentenbarwert als explizite Funktion der Zinsintensität dargestellt werden kann,* einzig unter der Annahme, dass die Grösse k vom Zinsfuss unabhängig ist. Zu diesem Zwecke werden wir für den Leibrentenbarwert a_x eine Differentialgleichung aufstellen, in der ausser der Funktion a_x *nur* noch die Variable δ (Zinsintensität) auftritt.

Es ist nämlich

$$(1) \qquad a_x = \sum_{t=1} e^{-\delta t} \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x} \, ,$$

$$(2) \qquad \frac{d a_x}{d \delta} = - \sum_{t=o} \cdot t \cdot e^{-\delta t} \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x} = - \frac{S_{x+1}}{D_x} \, , \text{ und ebenso}$$

$$(19) \qquad \frac{d^2 a_x}{d \delta^2} = + \sum_{t=1} t^2 \cdot e^{-\delta t} \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x} = 2 \frac{S^{(2)}_{x+1}}{D_x} - \frac{S_{x+1}}{D_x}$$

Unter der Voraussetzung, dass $\dfrac{S^{(2)}_x}{S_x} : \dfrac{S_x}{N_x} = k$ konstant ist (wenigstens unabhängig vom Zinsfuss!), findet man:

$$(20) \qquad \frac{S^{(2)}_{x+1}}{D_x} = k \cdot \frac{(S_{x+1})^2}{D_x \cdot N_{x+1}}$$

$$(21) \qquad \frac{d^2 a_x}{d \delta^2} = 2 k \frac{(S_{x+1})^2}{D_x \cdot N_{x+1}} - \frac{S_{x+1}}{D_x}$$

Da nun $\frac{S_{x+1}}{D_x} = -\frac{da_x}{d\delta}$, erhält man folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 a_x}{d\delta^2} = 2\,k \cdot \frac{1}{a_x} \cdot \left\{\frac{da_x}{d\delta}\right\}^2 + \frac{da_x}{d\delta} \tag{22}$$

Diese Gleichung ist sehr leicht lösbar. Wenn wir Gl. (22) nämlich durch $\frac{da_x}{d\delta}$ dividieren, finden wir:

$$\frac{d^2 a_x}{d\delta^2} \Bigg/ \frac{da_x}{d\delta} - 2\,k \cdot \frac{da_x}{d\delta} \Bigg/ a_x = 1 \quad \text{oder} \tag{23}$$

$$\frac{d\,l_n \frac{da_x}{d\delta}}{d\,\delta} - 2\,k\,\frac{d\,l_n\,a_x}{d\,\delta} = 1 \tag{24}$$

Somit wird

$$\frac{d\left\{l_n \frac{da_x}{d\delta} - l_n\,a_x^{2k}\right\}}{d\,\delta} = 1 \tag{25}$$

Integriert ergibt dies:

$$l_n\left\{\frac{da_x}{d\delta} \cdot a_x^{-2k}\right\} = \delta + c_1 \tag{26}$$

wo c_1 eine Integrationskonstante ist. Es ist demnach

$$\frac{da_x}{d\delta} \cdot a_x^{-2k} = \frac{1}{1-2\,k} \cdot \frac{d\left\{a_x^{-2\,k+1}\right\}}{d\delta} = e^{\delta + c_1} \tag{27}$$

Die nochmalige Integration ergibt:

$$(28) \qquad a_x^{-2k+1} = -(2k-1)\, e^{\delta+c_1} + c_2 (1-2k)$$

Mit den neuen Integrationskonstanten $k_1 = -(2k-1)\, e^{c_1}$ und $k_2 = c_2 (1-2k)$ erhält man als endgültige Formel:

$$(29) \qquad a_x^{-2k+1} = k_1 \cdot e^{\delta} + k_2$$

Damit ist die eingangs aufgestellte Behauptung bewiesen; die $(1-2k)$te Potenz des Barwertes a_x kann sogar als einfache Exponentialfunktion der Zinsintensität dargestellt werden.

Bleibt nun noch, die Konstanten k_1 und k_2 zu bestimmen. Als Anfangsbedingungen wählen wir plausiblerweise folgende:

$$(\mathrm{I.}) \qquad \underset{\delta=\delta o}{a_x(\delta)} = a_x(\delta_o), \quad \text{und}$$

$$(\mathrm{II.}) \qquad \frac{da_x}{d\delta_{\delta=\delta o}} = -\frac{{}^oS_{x+1}}{{}^oD_x}$$

Wenn wir Bedingung (II) in (27) einsetzen, erhalten wir:

$$-\frac{{}^oS_{x+1}}{{}^oD_x}\, a_x^{-2k}(\delta_o) = \frac{k_1 \cdot e^{\delta o}}{(1-2k)}, \quad \text{woraus sich}$$

$$k_1 \text{ zu } (2k-1)\, e^{-\delta o}\, a_x^{-2k}(\delta_o)\, \frac{{}^oS_{x+1}}{{}^oD_x} \text{ bestimmt.}$$

Wir können nun k_1 in Gl. (29) einsetzen und k_2 durch die Bedingung (I) festlegen.

Man findet schliesslich als Schlussresultat:

$$(30)\qquad a_x(\delta) = a_x(\delta_o)\cdot\left\{1+(2k-1)\frac{{}^oS_{x+1}}{{}^oN_{x+1}}\cdot\Delta i\cdot v_o\right\}^{-\frac{1}{(2k-1)}}$$

Unter der Annahme, dass k vom Zinsfuss gänzlich unabhängig ist, stellt diese Formel (30) *eine strenge Lösung des Zinsfussproblems* dar, welche sehr gute Resultate liefert.

Wenn wir nun unser Resultat mit der Formel von *Palmqvist* (39) in der erwähnten Arbeit von *Christen* [1]) vergleichen und in unserer Formel $k = 0{,}84$ setzen, finden wir zwischen den beiden Ergebnissen völlige Übereinstimmung, obschon die Wege, die zu diesem gleichen Resultat führen, ganz verschieden sind.

Wir wollen die gleichen Beispiele wie in Abschnitt A benützen, um die Genauigkeit der beiden Methoden miteinander vergleichen zu können.

Tafel $O^{(am)}$ 1863/93 $3\frac{1}{2}$ % Schlusskurve.
$k = 0{,}84$.

x	a_x (4%)		a_x (3%)	
	n. Gl. (30):	genau:	n. Gl. (30):	genau:
40	16.2845	16.284	18.3795	18.379
50	13.742	13.742	15.157	15.156
60	10.7554	10.756	11.585	11.585

[1]) Dr. Hans Christen, loc. cit., S. 293, Formel (39).