**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 30 (1935)

**Artikel:** Note sur le calcul du taux de rendement des placements effectués pour une période inférieure à un an

**Autor:** Dasen, E.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-555014

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 03.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# Note sur le calcul du taux de rendement des placements effectués pour une période inférieure à un an.

Par **Ed. Dasen**, Bâle.

I. Pour calculer la valeur acquise $x$ par un capital de fr. 1 placé au taux d'intérêt $i$ par an après une période $t$, $t$ étant inférieure à un an, il a été proposé trois méthodes dont les formules sont les suivantes:

*1. Méthode exponentielle:*

(a) $$x_1 = (1 + i)^t$$

*2. Méthode commerciale:*

(b) $$x_2 = 1 + it$$

*3. Méthode du Professeur Moser:*

(c) $$x_3 = 1 + it - (1 - t)\, ti^2$$

Pour établir cette dernière formule, on remarque que, l'intérêt n'étant payable qu'à la fin de l'année, on doit en soustraire son propre intérêt pour le ramener à sa valeur au moment $t$.

Une étude comparative complète des nombres $x$ entre eux a été faite en 1906 dans le «Bulletin de l'Association des actuaires suisses» par M. S. Dumas. Il nous semble intéressant de rappeler les conclusions de ce travail:

«On peut admettre que le résultat de la méthode exponentielle est égal à la moyenne arithmétique des deux autres. L'erreur commise ainsi est de l'ordre du centième des différences des trois méthodes entre elles, c'est-à-dire de l'ordre du dix-millième de l'intérêt ou du millionième du capital. En résumé, nous voyons que les résultats auxquels conduisent les trois méthodes diffèrent trop peu pour qu'on puisse avoir des difficultés dans un règlement de compte; des raisons d'opportunité décideront donc seules du choix de la méthode. Les commerçants emploieront probablement longtemps encore celle à laquelle ils sont accoutumés; elle ne conduit qu'à des calculs très simples. La méthode exponentielle est un peu plus compliquée; elle nécessite l'emploi des logarithmes, mais elle est bien préférable dans les travaux scientifiques; elle est beaucoup mieux fondée rationnellement.»

S'il s'agit maintenant de calculer le taux de rendement d'un placement effectué pour une période inférieure à un an, nous ne pourrons pas simplement résoudre par rapport à $i$ une des trois équations (a), (b) ou (c). En effet, le taux de rendement se définit suivant les pays comme capitalisé semestriellement ou annuellement [1]). La lecture des travaux ci-dessous indiqués permettra

---

1) *K. G. Hagströem:* On different usances for indicating rate of interest and the notion of yield (Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1933).

*E. Dasen:* Sur la définition du taux de rendement et la construction des tables de rendement (Actes du Congrès International des Actuaires, Rome 1934).

de se rendre compte que l'adoption d'un taux de rendement défini comme capitalisé annuellement est nettement à recommander. Dans le cas du calcul du taux de rendement d'un placement effectué pour une période inférieure à un an, la formule qu'il conviendra d'adopter est donc la formule (a). Nous nous proposons cependant de montrer quelles sont les différentes valeurs de $i$ que l'on obtient suivant que l'on utilise les formules (a), (b) et (c) ainsi que l'erreur que l'on peut commettre en employant (b) ou (c) à la place de (a). Le problème que nous traiterons est donc essentiellement différent de celui étudié par M. S. Dumas. Il ne s'agit plus de comparer entre elles des formules donnant la valeur acquise d'un placement effectué pour une période inférieure à un an, mais d'évaluer, au moyen d'un étalon de mesure strictement défini, le taux de rendement d'un placement effectué pour une période inférieure à un an et de montrer que des formules approchées, élaborées pour être utilisées dans un but précis ne peuvent pas servir à résoudre d'une manière satisfaisante un problème d'une nature particulière, tel que celui de la recherche du taux de rendement.

En d'autres termes, nous nous proposons d'étudier la forme des courbes

$$\text{(I)} \qquad i_1(t) = x^{\frac{1}{t}} - 1$$

$$\text{(II)} \qquad i_2(t) = \frac{x-1}{t}$$

$$\text{(III)} \qquad i_3(t) = \frac{t - \sqrt{t^2 - 4t(1-t)(x-1)}}{2t(1-t)}$$

On verra plus loin pourquoi il convient de prendre le radical de (III) avec une détermination négative.

Dans l'étude des courbes (I), (II) et (III) $x$ est plus grand que 1 et $t$ prend toutes les valeurs de l'intervalle (0,1).

## II. Etude de la courbe I.

Toutes les valeurs de $i_1$ se trouvent situées sur une courbe exponentielle. La dérivée

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{x^{\frac{1}{t}} \operatorname{Log} x}{t^2}$$

nous montre que la courbe $i_1$ est constamment décroissante. L'axe des $i_1$ et l'axe des $t$ sont les deux asymptotes de la courbe.

Lorsque $t$ tend vers zéro par valeurs positives, on a

$$\lim_{t=+0} (x^{\frac{1}{t}} - 1) = +\infty$$

Lorsque t = 1, on obtient:

$$i_1(1) = x - 1$$

*Exemple numérique:*

| $t$ \ $x$ | 1.02 | 1.04 | 1.06 |
|---|---|---|---|
| 0.00 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| 0.25 | 0.08243 | 0.16986 | 0.26248 |
| 0.50 | 0.04040 | 0.08160 | 0.12360 |
| 0.75 | 0.02676 | 0.05369 | 0.08079 |
| 1.00 | 0.02000 | 0.04000 | 0.06000 |

### III. Etude de la courbe II.

Toutes les valeurs de $i_2$ sont situées sur la branche d'une hyperbole équilatère, le demi-axe transverse étant égal à $\sqrt{2(x-1)}$, située dans le premier quadrant.

Pour les valeurs extrêmes de l'intervalle (0,1), la fonction envisagée prend les valeurs suivantes:

$$\lim_{t=+0} \frac{x-1}{t} = +\infty$$

$$i_2(1) = x - 1$$

*Exemple numérique:*

| $t$ \ $x$ | 1.02 | 1.04 | 1.06 |
|---|---|---|---|
| 0.00 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| 0.25 | 0.08000 | 0.16000 | 0.24000 |
| 0.50 | 0.04000 | 0.08000 | 0.12000 |
| 0.75 | 0.02667 | 0.05333 | 0.08000 |
| 1.00 | 0.02000 | 0.04000 | 0.06000 |

### IV. Etude de la courbe III.

La courbe $i_3(t)$ est définie implicitement par l'équation

$$(1) \qquad f(i_3, t) = t(1-t)\, i_3^2 - t i_3 - (x-1) = 0$$

ou explicitement par l'équation

$$(2) \qquad i_3(t) = \frac{t - \sqrt{t^2 - 4t(1-t)(x-1)}}{2t(1-t)}$$

$i_3(t)$ est une courbe algébrique du quatrième degré. Nous avons donné le signe «moins» au radical de (2), car d'après (1), on a

$$i_3(1) = x - 1$$

Or, nous n'aurons, en appliquant la règle de L'Hospital,

$$\lim_{t=1} \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4t(1-t)(x-1)}}{2t(1-t)} = x - 1$$

que lorsque le radical est affecté du signe «moins».

En appliquant de nouveau la règle de L'Hospital, on montre que

$$\lim_{t=0} \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4t(1-t)(x-1)}}{2t(1-t)} = +\infty$$

Pour que $i_3(t)$ soit réelle dans l'intervalle (0,1), il est nécessaire que la quantité sous le radical de (2) ne devienne jamais négative. Il est facile de se rendre compte que la fonction

$$y(t) = t^2 - 4t(1-t)(x-1)$$

est négative dans l'intervalle

$$(E) \qquad \left(0, \frac{4x-4}{4x-3}\right),$$

les valeurs extrêmes de l'intervalle n'étant pas comprises. La formule de Moser ne peut donc théoriquement pas s'appliquer dans tout l'intervalle (0,1).

Nous devons encore rechercher maintenant si $i_3(t)$ présente dans l'intervalle

$$\text{(D)} \qquad \left(\frac{4x-4}{4x-3}, 1\right)$$

des particularités. Les moyens habituels nous renseignent facilement que ce n'est pas le cas. Nous pouvons donner le tableau suivant qui résumera la variation de $i_3(t)$ dans l'intervalle qui nous intéresse:

| $t$ | $i_3(t)$ |
|---|---|
| $0$ | $+\infty$ |
| $0 < t < \frac{4x-4}{4x-3}$ | pas réelle |
| $\frac{4x-4}{4x-3}$ | $2x - \frac{3}{2}$ |
| | décroît |
| $1$ | $x-1$ |

*Exemple numérique:*

| $t$ \ $x$ | 1.02 | 1.04 | 1.06 |
|---|---|---|---|
| 0.00 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $\frac{4x-4}{4x-3}$ | 0.54000 | 0.58000 | 0.62000 |
| 0.25 | 0.08548 | 0.18593 | 0.31390 |
| 0.50 | 0.04083 | 0.08349 | 0.12822 |
| 0.75 | 0.02685 | 0.05406 | 0.08167 |
| 1.00 | 0.02000 | 0.04000 | 0.06000 |

*Remarque.* Si l'application, du point de vue théorique, de la formule de Moser, au calcul du taux de rendement est limité, on peut dire que pratiquement, il y aurait peu de chances que l'on puisse se trouver en présence d'un couple de valeurs $(x, t)$ excluant l'emploi de cette formule. Cette dernière affirmation résulte de l'étude de la fonction homographique

$$t(x) = \frac{4x - 4}{4x - 3}$$

Cette fonction homographique est une fonction croissante avec $x$ étant donné que

$$\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} > 0$$

L'asymptote parallèle $0\,t$ coupe l'axe $0\,x$ au point d'abscisse

$$x = \frac{3}{4}$$

L'asymptote parallèle à $0\,x$ coupe l'axe $0\,t$ au point d'ordonnée

$$t = 1$$

Le tableau numérique suivant donnant quelques valeurs de $t(x)$ exprime donc, pour $x$ donné, la valeur limite au-dessous de laquelle ne doit pas descendre $t$ pour que $i_3(t)$ reste réelle.

| $x$ | $t(x)$ |
|---|---|
| 1.00 | 0 |
| 1.02 | 27 jours environ |
| 1.04 | 50 » » |
| 1.06 | 70 » » |
| 1.08 | 87 » » |
| 1.10 | 103 » » |

V. Nous démontrerons encore les inégalités suivantes:

(1) $$i_2(x) < i_1(x)$$

(2) $$i_1(x) < i_3(x)$$

La première inégalité se démontre immédiatement. Dans

(3) $$\frac{x-1}{t} < x^{\frac{1}{t}} - 1$$

posons

$$x - 1 = u,$$

$u$ est plus petit que 1 pour tous les cas pratiques que l'on peut raisonnablement envisager, on peut donc développer en série le membre de droite de (3); il vient

$$\frac{u}{t} < 1 + \frac{u}{t} + \frac{(1-t)}{2!\,t^2} u^2 + \ldots\ldots - 1,$$

ce qui démontre l'inégalité (1).

Pour démontrer l'inégalité (2), nous partirons également des développements en série. Nous aurons donc:

$$(4) \qquad i_1(u) = 1 + \frac{u}{t} + \frac{(1-t)}{2!\,t^2}\,u^2 + \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{(1-t)(1-2t)\ldots[1-(p-1)t]}{p!\,t^p}\,u^p + \ldots$$

$$(5) \qquad i_3(u) = \frac{u}{t} + 2\frac{1-t}{t^2}\,u^2 + \ldots\ldots +$$

$$+ 2^{p-1}\frac{1.3.5\ldots.(2p-3)}{p!}\cdot\frac{(1-t)^{p-1}}{t^p}\,u^p + \ldots.$$

Dire que l'inégalité (2) a lieu, c'est dire que $i_3(u)$ est une fonction majorante de $i_1(u)$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que

$$(6) \qquad \left|(1-t)(1-2t)\ldots.[1-(p-1)t]\right| < 2^{p-1}1.3.5\ldots(2p-3)\,(1-t)^{p-1}$$

Etant donné que:

$$\left|(1-t)(1-2t)\ldots.[1-(p-1)t]\right| < (1-t)^{\frac{p(p-1)}{2}} < (1-t)^{p-1},$$

on en déduit l'inégalité évidente

$$1 < 2^{p-1}\,1.3.5\ldots\ldots(2p-3)$$

qui, a fortiori, démontre l'inégalité (2).

VI. Il est encore intéressant d'examiner le tableau suivant. Celui-ci permet de se faire une idée de la grandeur de l'erreur que l'on commet par rapport au taux de rendement exact, en calculant celui-ci à l'aide des formules approchées (b) et (c).

| | $\frac{100\ (i_1 - i_2)}{i_1}$ | | | $\frac{100\ (i_1 - i_3)}{i_1}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ \ $x$ | 1.02 | 1.04 | 1.06 | 1.02 | 1.04 | 1.06 |
| 0.25 | 2.948 | 5.805 | 8.564 | —3.700 | —9.461 | —19.590 |
| 0.50 | 0.990 | 1.961 | 2.913 | —1.064 | —2.316 | —3.738 |
| 0.75 | 0.336 | 0.671 | 0.978 | —0.336 | —0.689 | —1.089 |

De l'examen de ces chiffres, il ressort que dès que $t$ est inférieur à $\frac{1}{2}$, l'erreur commise par rapport à $i_1$ augmente rapidement en valeur absolue avec $x$. D'autre part, lorsque $x$ est déterminé, l'erreur diminue rapidement en valeur absolue lorsque $t$ se rapproche de 1.

En résumé, nous pouvons donc dire que l'emploi des formules (b) et (c) pour la déterminaiton du taux de rendement des placements à très court terme n'est pas à recommander. En particulier, dans une étude statistique, des taux de rendement de placements à très court terme déterminés à l'aide de (b) ou (c), ne pourraient pas se comparer aux taux de rendement de placements à long terme, si ceux-ci sont calculés en admettant une définition du taux de rendement comme capitalisé annuellement ou semestriellement. Seule donc la différence des questions que nous avons traitées, nous amène à une conclusion différente de celle à laquelle M. S. Dumas était arrivé.