Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 31 (1936)

Artikel: Über einige Eigenschaften der Prämiensysteme der Gruppenversicherung

Autor: Zwinggi, Ernst

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-555047

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über einige Eigenschaften der Prämiensysteme der Gruppenversicherung

Von Dr. **Ernst Zwinggi,** Basel

Die Gruppenversicherung, wie sie heute von den schweizerischen Lebensversicherungsgesellschaften betrieben wird, ist in ihrem technischen Aufbau vollständig durch die Erfordernisse der Privatversicherung bestimmt. Die erste Entwicklung der Personalversicherung aber erfolgte deutlich in Anlehnung an die Technik der Sozialversicherung. Waren auch die Prämien nach dem Alter der Versicherten abgestuft, so verzichtete man doch öfters darauf, die Belastung durch Hinterlassenenrenten individuell zu ermitteln. Die Festsetzung der Beiträge geschah also unabhängig vom Zivilstand; diese kollektive Methode ist aber ein Kennzeichen der sozialen Versicherung. Heute hat sich die individuelle Methode ausnahmslos durchgesetzt. Die einzige der Sozialversicherung entnommene und wohl auch bleibende Eigenart besteht in der Abstufung der Versicherungsleistungen nach der Zahl der zurückgelegten Dienstjahre. Diese Besonderheit soll in der vorliegenden Arbeit in technischer Richtung hin näher untersucht werden.

Die eben angeführte Abstufung der Versicherungsleistungen hat bewirkt, dass zur Prämienberechnung zwei ganz verschiedene Systeme entwickelt wurden. Das erste System ist als *Verfahren der Nachversicherungen* oder der *variablen Prämie,* das zweite als *Verfahren der*

konstanten Prämie bekannt. Es erübrigt sich, hier allgemein auf die Eigenschaften der beiden Systeme einzutreten, nachdem das schon verschiedentlich mit aller Genauigkeit getan wurde [1]) und nachdem sich die Praxis nahezu vollständig für die konstante Prämie entschieden hat. Dennoch scheint uns aber, dass eine bisher nicht behandelte Frage immer noch einiges Interesse beanspruchen darf, nämlich die der *Gewinne* in den beiden Systemen. Es ist zum vorneherein verständlich, dass die Gewinne nicht in beiden Prämiensystemen gleich hoch ausfallen werden, da vor allem der Verlauf des Deckungskapitals verschieden ist. Die Abstufung der Versicherungsleistungen nach der Zahl der Dienstjahre beeinflusst nun aber die Entwicklung der Gewinne weiter in einer Weise, die uns zu untersuchen wert schien.

In unseren Betrachtungen über die Gewinne wollen wir von den Verwaltungskosten vollständig absehen; ebenso sollen die freiwilligen Austritte ganz ausser Betracht fallen. Die Ursachen zur Erzielung eines Gewinnes liegen dann vor allem in einer höheren Verzinsung der Rücklagen, als rechnungsmässig angenommen wurde, und in einem günstigeren Verlauf des Sterblichkeits- und Invaliditätsrisikos, als die statistischen Grundlagen

---

[1]) *A. Urech:* Sur les bases techniques de l'assurance collective. — Mitteilungen der Vereinigung Schweiz. Versicherungsmathematiker, 25. Heft, 1930.

E. Röthlisberger: Personalversicherung im Vergleich zur Einzel-Lebensversicherung. — Festgabe Moser, 1931.

H. Wyss: Über die Prämiensysteme in der Gruppenversicherung. — Festgabe Moser, 1931.

E. Gisi: Das Problem der ältern Angestellten, Krise und Pensionsversicherung. — Basel 1933.

Schweizerische Lebensversicherungs- und Rentenanstalt: Betrachtungen über die Gruppenversicherung. — Fünfundsiebzig Jahre Schweizerische Lebensversicherungs- und Rentenanstalt Zürich.

voraussetzten, begründet. Zu diesen Zins- und Risikogewinnen kommt nun aber unter bestimmten Umständen ein weiterer Überschuss hinzu.

Wir haben vorauszusetzen, dass die Versicherungsleistungen mit der Zahl der zurückgelegten Dienstjahre nach einer eindeutig gegebenen Ordnung zunehmen. Dann wollen wir ferner annehmen, dass der Versicherte bei eingetretener Erwerbsunfähigkeit teilweise oder ganz von der Bezahlung der weiteren Prämien enthoben ist. Wird auch eine eigentliche Invalidenrente mitversichert, so soll sie aus unseren Betrachtungen vollständig ausscheiden. Wir verfolgen also bloss diejenigen Versicherungsleistungen, die aus anderen Ursachen als durch Invalidität ausgelöst werden. Stets soll aber die Prämienbefreiung bei eingetretener Invalidität eingeschlossen sein. Versicherungsformen, die hier zur Untersuchung stehen, sind also z. B. die gemischte Versicherung wie auch die Witwen- und Waisenrentenversicherung.

Durch die Versicherungsbedingungen wird nun aber meist vorgeschrieben, dass die Versicherungsleistungen bei eingetretener Invalidität nur im Verhältnis des Grades der tatsächlichen zur vollen Erwerbsfähigkeit weiter zunehmen. Bei gänzlicher Erwerbsunfähigkeit tritt also keine Erhöhung der Leistungen mehr ein.

Wir haben uns nun Rechenschaft zu geben, ob die entwickelte Vorschrift bei der Berechnung der Prämien auch berücksichtigt wird. Nur teilweise Invalidität wollen wir nicht weiter betrachten, da die verwendeten Rechnungsgrundlagen meist nur vollständige Erwerbsunfähigkeit in sich schliessen. Dann kann zur Bestimmung der Prämie so vorgegangen werden, dass man von der Mitversicherung der Prämienbefreiung vorerst absieht. Wenn P die so bestimmte Prämie bedeutet, so wird die Zusatzprämie für die Prämienbefreiung ermit-

telt, indem wir eine Invalidenrente in der Höhe von P mitversichern. Die Prämie P ist nun aber für eine unbedingte Zunahme der Versicherungsleistungen bestimmt worden; die Möglichkeit, dass bei eingetretener Invalidität die Leistungen nicht mehr zunehmen, ist nicht eingeschlossen. Folglich sollten unter Berücksichtigung der Berechnungsart die Versicherungsleistungen unbekümmert um vorhandene Invalidität ansteigen.

Zwingende Gründe allgemeiner Art, auf die wir hier nicht näher eintreten wollen, verbieten nun aber ein derartiges unbeschränktes Weitersteigen der Leistungen. Die Prämienberechnung sollte daher dieser Leistungsbeschränkung Rechnung tragen [1]). Wir wollen nun aber voraussetzen, dass diese Beschränkung nicht vorgenommen wurde; jeder Invaliditätsfall führt daher zu einer Abweichung der Wirklichkeit von der Voraussetzung. Notwendige und selbstverständliche Bedingung ist der vollständig rechnungsmässige Verlauf der Invalidität an sich. Es zeigt sich nun, dass sich die beiden Prämiensysteme der Gruppenversicherung bezüglich dieser Abweichung vollständig verschieden verhalten. Während nach dem Verfahren der Nachversicherungen weder für den Versicherten noch für den Versicherer ein Gewinn oder ein Verlust eintritt, ist das beim System der konstanten Prämie nicht der Fall. Das Konstantbleiben der Versicherungsleistungen führt hier auf einen Gewinn für den Versicherer; wir wollen diesen Gewinn künftig als «Skalengewinn» bezeichnen.

Der erste Teil unserer Arbeit soll sich ausführlich mit dem Skalengewinn befassen. Wir möchten dabei

---

[1]) Eine Näherungsmethode zur Berücksichtigung dieser Leistungsbeschränkung ist zum Beispiel entwickelt in den «Technischen Grundlagen für Gruppenversicherungen» (herausgegeben vom Eidgenössischen Versicherungsamt), Seite 12*.

den mathematischen Ausdruck für diesen Gewinn aus einem ganz allgemeinen Ansatz heraus ableiten und durch besondere Umformungen im Laufe der Untersuchung auf den eigentlichen Charakter unserer Ausgangsfunktion gelangen.

Risiko- und Zinsgewinn sind in ihrem allgemeinen Verhalten mehrmals eingehend dargestellt worden [1]). Dessenungeachtet dünken uns einige Zusammenhänge im Hinblick auf die Prämiensysteme der Gruppenversicherung bemerkenswert zu sein. Der zweite Teil unserer Untersuchung sei daher noch den Risiko- und Zinsgewinnen gewidmet.

I. Teil

Die Gewinne aus der Skala

a) Allgemeines

Um unsere Ausführungen möglichst einfach zu halten, wollen wir den Fall einer gemischten Versicherung voraussetzen. Die Versicherungsleistung sei aber nicht konstant, sondern nehme nach einem eindeutig gegebenen Gesetz stetig zu.

Wir bezeichnen die Grundleistung mit $S(o)$, die Zunahme im Zeitmoment t bis $t + dt$ mit $dS(t)$. Die gesamte versicherte Leistung t Jahre nach Versicherungsbeginn ist somit

$$S(t) = S(o) + \int_o^t dS(t).$$

---

[1]) Man vergleiche z. B.:

H. Koeppler: Die Bemessung der Risikoprämie für den Bilanztermin. — Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen, Band 4, Heft 1, 1908.

P. Böhmer: Sparprämie und Risikoprämie. — Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, Band 10, 1910.

Analog entrichte der Versicherte die variable Prämie P_{x+t}, wobei die Ausgangsprämie P_x sei.

Zwischen Versicherungsleistung und Prämie soll vorderhand noch keine Äquivalenz bestehen. Wir betrachten die Versicherungskombination zuerst bei $t = o$, also gleich bei ihrem Beginn. Die angenommene Ausgangsprämie P_x führt für den Versicherer zu einem *Gewinn,* wenn

$$P_x \cdot a_{x:\overline{n}|} > S(o) \cdot A_{x:\overline{n}|},$$

dagegen zu einem *Verlust,* sofern

$$P_x \cdot a_{x:\overline{n}|} < S(o) \cdot A_{x:\overline{n}|}.$$

Diese möglichen Gewinne und Verluste sollen weiter verfolgt werden. Für die Gesamtheit der Überlebensordnung l_x beträgt der Barwert der Gewinne

$$l_x \left\{ P_x \cdot a_{x:\overline{n}|} - S(o) \cdot A_{x:\overline{n}|} \right\}. \tag{1}$$

Diesen Barwert beziehen wir sodann auf den Zeitpunkt t; δ bedeute noch die Zinsintensität. Dann stellt

$$\frac{e^{\delta t} \cdot l_x \left\{ P_x \cdot a_{x:\overline{n}|} - S(o) \cdot A_{x:\overline{n}|} \right\}}{l_{x+t}} \tag{2}$$

den Wert des Gewinnes nach t Jahren dar, bezogen auf einen noch vorhandenen Versicherten.

Bis jetzt haben wir nur den Gewinn auf der Eintrittsgesamtheit l_x erfasst. Jede Veränderung der Versicherungsleistung und der Prämie gibt wieder Anlass zu einem neuen Gewinn. Die Leistungszunahme $dS(\lambda)$ und die Prämienzunahme $dP_{x+\lambda}$ ziehen insgesamt den Barwert des Gewinnes

$$l_{x+\lambda} \left\{ dP_{x+\lambda} \cdot a_{x+\lambda:\overline{n-\lambda}|} - dS(\lambda) \cdot A_{x+\lambda:\overline{n-\lambda}|} \right\}$$

nach sich. Dieser Gewinnbarwert ist ebenfalls auf den Zeitpunkt t zu beziehen:

$$\frac{e^{\delta(t-\lambda)} \cdot l_{x+\lambda} \left\{ dP_{x+\lambda} \cdot a_{x+\lambda:\overline{n-\lambda}|} \; dS(\lambda) \cdot A_{x+\lambda:\overline{n-\lambda}|} \right\}}{l_{x+t}}. \quad (3)$$

Um den gesamten Gewinnbarwert zu erhalten, müssen wir über alle Termine λ von $\lambda = o$ bis $\lambda = t$ summieren. Wir wollen den Wert des Gewinnes im Zeitpunkt t mit $\psi(t)$ bezeichnen und von $\psi(t)$ kurz als von der «Gewinnfunktion» sprechen:

$$\psi(t) = \frac{e^{\delta t} \cdot l_x}{l_{x+t}} \left\{ P_x \cdot a_{x:\overline{n}|} - S(o) \cdot A_{x:\overline{n}|} \right\} +$$

$$+ \frac{e^{\delta t}}{l_{x+t}} \int_o^t e^{-\delta\lambda} \cdot l_{x+\lambda} \left\{ dP_{x+\lambda} \cdot a_{x+\lambda:\overline{n-\lambda}|} - dS(\lambda) \cdot A_{x+\lambda:\overline{n-\lambda}|} \right\}. \quad (4)$$

Diese Gewinnfunktion weist eine eigenartige Struktur auf. Die Werte $a_{x:\overline{n}|}$ und $A_{x:\overline{n}|}$ sind prospektiv, während die Integration von $\lambda = o$ bis $\lambda = t$ auf einen retrospektiven Vorgang hindeutet. Im äussern Aufbau gleicht (4) vollständig den bekannten Ausdrücken für das Deckungskapital:

Retrospektives Deckungskapital ${}_tV_x^r =$

$$= \frac{e^{\delta t}}{l_{x+t}} \left\{ l_x \cdot {}_oV_x + \int_o^t e^{-\delta\lambda} \cdot l_{x+\lambda} \left\{ P_{x+\lambda} - \mu_{x+\lambda} \cdot S(\lambda) \right\} d\lambda, \right. \quad (5)$$

Prospektives Deckungskapital ${}_tV_x^p =$

$$\frac{1}{l_{x+t}} \left[\int_o^{n-t} e^{-\delta\lambda} \, l_{x+t+\lambda} \left\{ \mu_{x+t+\lambda} \cdot S(t+\lambda) - P_{x+t+\lambda} \right\} d\lambda + e^{-\delta(n-t)} \cdot l_{x+n} \cdot S(n) \right]. \quad (6)$$

Da wir über $P_{x+\lambda}$ noch keinerlei Annahmen getroffen haben, stimmen prospektives und retrospektives Dekkungskapital nicht überein. Der gleiche äussere Aufbau der Beziehung (4) für die Gewinnfunktion und der Ausdrücke (5) und (6) für das Deckungskapital lassen vermuten, dass zwischen beiden Grössen Bindungen bestehen; wir werden darauf im nächsten Abschnitt eintreten.

b) Zusammenhang zwischen Gewinnfunktion und Deckungskapital

Wir betrachten unsere Versicherung im Zeitpunkt λ. Die Differenz

$$dS(\lambda) \cdot A_{x+\lambda:\overline{n-\lambda}|} - dP_{c+\lambda} \cdot a_{x+\lambda:\overline{n-\lambda}|}$$

stellt das prospektiv bestimmte Ausgangsdeckungskapital ${}_oV_{x+\lambda}$ einer Teilversicherung über den Betrag $dS(\lambda)$ des $x+\lambda$-jährigen Versicherten dar. Die Gewinnfunktion $\psi(t)$ selber nimmt dann nach (4) den Wert an:

$$\psi(t) = -\frac{e^{\delta t}}{l_{x+t}} \left\{ l_x \cdot {}_oV_x + \int_o^t e^{-\delta\lambda} \cdot l_{x+\lambda} \cdot {}_oV_{x+\lambda} \cdot d\lambda \right\}. \quad (7)$$

Es lässt sich aber noch ein weiterer und wichtigerer Zusammenhang zwischen Deckungskapital und Gewinnfunktion erstellen. Wir greifen das Glied

$$\frac{e^{\delta(t-\lambda)}}{l_{x+t}} l_{x+\lambda} \{ dP_{x+\lambda} \cdot a_{x+\lambda:\overline{n-\lambda}|} - dS(\lambda) \cdot A_{x+\lambda:\overline{n-\lambda}|} \}$$

heraus und ersetzen $a_{x+\lambda:\overline{n-\lambda}|}$ und $A_{x+\lambda:\overline{n-\lambda}|}$ durch die entsprechenden Integrale:

$$\frac{e^{\delta(t-\lambda)}}{l_{x+t}} \left\{ dP_{x+\lambda} \int_{\xi=o}^{n-\lambda} e^{-\delta\xi} \cdot l_{x+\lambda+\xi} \, d\xi - \right.$$

$$\left. - dS(\lambda) \int_{\xi=o}^{n-\lambda} e^{-\delta\xi} \cdot l_{x+\lambda+\xi} \cdot \mu_{x+\lambda+\xi} \, d\xi \right\} - dS(\lambda) \frac{e^{-\delta(n-t)} \cdot l_{x+n}}{l_{x+t}}.$$

Die beiden Integrale teilen wir in die Stücke J_1 von $\xi = o$ bis $\xi = t - \lambda$ und J_2 von $\xi = t - \lambda$ bis $\xi = n - \lambda$. Wir führen die Umformung vorerst für den ersten Teil weiter.

$$J_1 = \frac{e^{\delta(t-\lambda)}}{l_{x+t}} \left\{ dP_{x+\lambda} \int_{o}^{t-\lambda} e^{-\delta\xi} \cdot l_{x+\lambda+\xi} \, d\xi - \right.$$

$$\left. - dS(\lambda) \int_{o}^{t-\lambda} e^{-\delta\xi} \cdot l_{x+\lambda+\xi} \cdot \mu_{x+\lambda+\xi} \cdot d\xi \right\}. \qquad (9)$$

Dieser Ausdruck stellt aber nach (5) das retrospektive Deckungskapital für einen $x + \lambda$-jährigen Versicherten dar, berechnet für die Leistung $dS(\lambda)$ und die Prämie $dP_{x+\lambda}$. Wir bezeichnen dieses Deckungskapital mit

$$J_1 = {}_{t-\lambda}V^r_{x+\lambda}.$$

Sodann bleibt noch umzuformen:

$$J_2 = \frac{e^{\delta(t-\lambda)}}{l_{x+t}} \left\{ dP_{x+\lambda} \int_{t-\lambda}^{n-\lambda} e^{-\delta\xi} \cdot l_{x+\lambda+\xi} \, d\xi - \right.$$

$$\left. - dS(\lambda) \int_{t-\lambda}^{n-\lambda} e^{-\delta\xi} \cdot l_{x+\lambda+\xi} \cdot \mu_{x+\lambda+\xi} \, d\xi \right\} - dS(\lambda) \frac{e^{-\delta(n-t)} \cdot l_{x+n}}{l_{x+t}}.$$

Wir transformieren ξ in $\xi + t - \lambda$ und erhalten:

$$J_2 = \frac{1}{l_{x+t}} \left\{ dP_{x+\lambda} \int_0^{n-t} e^{-\delta\xi} \cdot l_{x+t+\xi}\, d\xi - dS(\lambda) \int_0^{n-t} e^{-\delta\xi} \cdot l_{x+t+\xi} \cdot \mu_{x+t+\xi}\, d\xi \right\} -$$

$$- dS(\lambda) \frac{e^{-\delta(n-t)} \cdot l_{x+n}}{l_{x+t}}. \qquad (11)$$

Nach Beziehung (6) stellt dieser Ausdruck aber das negative prospektive Deckungskapital ${}_{t-\lambda}V^p_{x+\lambda}$ dar, wieder berechnet für die Leistung $dS(\lambda)$ und die Prämie $dP_{x+\lambda}$. Gleichung (8) kann dann dargestellt werden als:

$$(8) = \left\{ {}_{t-\lambda}V^r_{x+\lambda} - {}_{t-\lambda}V^p_{x+\lambda} \right\} d\lambda. \qquad (12)$$

Setzen wir (12) noch in (4) ein, so folgt:

$$\psi(t) = {}_tV^r_x - {}_tV^p_x + \int_0^t \left({}_{t-\lambda}V^r_{x+\lambda} - {}_{t-\lambda}V^p_{x+\lambda} \right) d\lambda. \qquad (13)$$

Das gesamte retrospektive Deckungskapital bezeichnen wir noch mit ${}_t\widetilde{V}^r_x$; es wird als Summe der Einzeldeckungskapitalien ${}_{t-\lambda}V^r_{x+\lambda}$:

$${}_t\widetilde{V}^r_x = {}_tV^r_x + \int_0^t {}_{t-\lambda}V^r_{x+\lambda}\, d\lambda;$$

eine analoge Beziehung würde sich auch für das prospektive Deckungskapital ${}_t\widetilde{V}^p_x$ ergeben. Darauf erhalten wir endgültig

$$\psi(t) = {}_t\widetilde{V}^r_x - {}_t\widetilde{V}^p_x. \qquad (14)$$

Diese letzte Gleichung gestattet nun, den Charakter der Gewinnfunktion genau zu erkennen.

Das retrospektive Deckungskapital ${}_t\widetilde{V}_x^r$ ist das wirklich vorhandene Deckungskapital, genau berechnet auf Grund der bisherigen Prämieneinnahmen und der ausbezahlten Todesfallkapitalien. Das besondere prospektive Deckungskapital ${}_t\widetilde{V}_x^p$ anderseits stellt die ausreichende Rücklage dar, wenn die Versicherungsleistung nicht mehr steigt, aber die Prämie $P_{x+\lambda}$ unverändert weiter eingeht. Man braucht nun bloss noch die Prämie $P_{x+\lambda}$ konstant werden zu lassen, um zu erkennen, dass die Funktion $\psi(t)$ die Gewinne aus der Skala erfasst. Wirklich vorhanden ist das Deckungskapital ${}_t\widetilde{V}_x^r$; benötigt wird aber bloss ${}_t\widetilde{V}_x^p$, so dass die Differenz ${}_t\widetilde{V}_x^r - {}_t\widetilde{V}_x^p$ das bei eingetretener Invalidität frei werdende Kapital darstellt. Die Gewinnfunktion $\psi(t)$ erfasst also wirklich im Falle der konstanten Prämie die Gewinne aus der Skala.

Aber auch bei nicht konstanter Prämie $P_{x+\lambda}$ gibt $\psi(t)$ den Skalengewinn wieder, sofern die Prämienbefreiung so berechnet wurde, dass vom Zeitpunkte des Eintrittes der Invalidität die erreichte Prämie $P_{x+\lambda}$ unverändert, d. h. von nun an als konstante Prämie, weitergezahlt wird.

c) Gewinnfunktion und Äquivalenzprinzip

Bis jetzt haben wir das Gleichgewicht zwischen Versicherungsleistung und Prämie nicht vorausgesetzt. Soll aber die Versicherung weder für den Versicherer noch für den Versicherten zu einem Gewinn führen, so muss die Gewinnfunktion $\psi(t)$ bei $t = n$ null werden. Das Auftreten der Skalengewinne wird durch diese Äquivalenz nicht berührt; denn es handelt sich nur um die Gleichheit von Leistung und Gegenleistung ohne Berücksichtigung der Prämienbefreiung. Also wird

$$\psi(n) = 0 = \frac{e^{\delta n} \cdot l_x}{l_{x+n}} \{P_x \cdot a_{x:\overline{n}|} - S(o) \cdot A_{x:\overline{n}|}\} +$$

$$+ \frac{e^{\delta n}}{l_{x+n}} \int_o^n e^{-\delta\lambda} \cdot l_{x+\lambda} \{ dP_{x+\lambda} \cdot a_{x+\lambda:\overline{n-\lambda}|} - dS(\lambda) \cdot A_{x+\lambda:\overline{n-\lambda}|}\}. \tag{15}$$

Diese Bedingung ist nun aber nichts anderes als das bekannte Äquivalenzprinzip. Die analytische Überführung in die geläufige Form

$$0 = \int_o^n e^{-\delta\lambda} \cdot l_{x+\lambda} \cdot P_{x+\lambda}\, d\lambda - \int_o^n e^{-\delta\lambda} \cdot l_{x+\lambda} \cdot \mu_{x+\lambda} \cdot S(\lambda)\, d\lambda$$

$$- e^{-\delta n} \cdot l_{x+n} \cdot S(n) \tag{16}$$

ist ziemlich zeitraubend und soll daher hier nicht durchgeführt werden. Wir möchten vielmehr nun zu den Anwendungen auf die Prämiensysteme der Gruppenversicherung übergehen.

Auf eine Eigenschaft von $\psi(t)$ muss aber doch noch besonders hingewiesen werden. Auch wenn die Prämie $P_{x+\lambda}$ so bemessen ist, dass zwischen Versicherungsleistungen und Prämien Gleichgewicht besteht, wird das prospektive Deckungskapital ${}_t\widetilde{V}_x^p$ nicht etwa gleich dem retrospektiven ${}_t\widetilde{V}_x^r$; dies wäre nur der Fall, wenn in ${}_t\widetilde{V}_x^p$ auch die künftigen Steigerungen der Leistungen berücksichtigt worden wären, was aber nicht zutrifft.

d) Minimum und Maximum der Gewinnfunktion

Von nun an müssen wir uns bei allen Ableitungen stets des besonderen Charakters von $\psi(t)$ als Mass des Gewinnes aus der Skala erinnern. Wir suchen zuerst das *Minimum* der Gewinnfunktion. Negative Werte von $\psi(t)$ sollen nicht zugelassen sein, so dass

$$\psi(t) \equiv 0$$

den kleinst möglichen Wert darstellt. Aus (4) folgt dann unmittelbar:

$$dP_{x+\lambda} \cdot a_{x+\lambda:\overline{n-\lambda}|} = dS(\lambda) \cdot A_{x+\lambda:\overline{n-\lambda}|}.$$

Daraus lässt sich die Prämienzunahme $dP_{x+\lambda}$ bestimmen zu:

$$dP_{x+\lambda} = dS(\lambda) \frac{A_{x+\lambda:\overline{n-\lambda}|}}{a_{x+\lambda:\overline{n-\lambda}|}}. \tag{17}$$

Der Quotient

$$\frac{A_{x+\lambda:\overline{n-\lambda}|}}{a_{x+\lambda:\overline{n-\lambda}|}}$$

stellt nun aber die Prämie für einen $x + \lambda$-jährigen und für die Leistung «1» dar. Gleichung (17) ist also nichts anderes als die Prämienerhöhung nach dem System der Nachversicherungen. Wir erhalten demnach das Ergebnis:

Das System der Nachversicherungen führt auf eine minimale Gewinnfunktion, also auf den Skalengewinn null.

Dieses Ergebnis kann leicht durch Überlegung geprüft werden. Die künftigen Leistungserhöhungen sind beim System der Nachversicherungen nicht in die Prämienbemessung einbezogen, sondern es werden immer nur gerade diejenigen Ansprüche versichert, die der zurückgelegten Dienstzeit entsprechen. Folglich kann auch kein Gewinn aus der Skala entstehen.

Wir bestimmen jetzt noch das *Maximum* der Gewinnfunktion. Wir setzen dazu einmal $P_{x+\lambda}$ konstant und gleich P_x^k. Die entsprechende Gewinnfunktion $\psi^k(t)$ wird dann, weil $dP_{x+\lambda} = 0$:

$$\psi^k(t) = \frac{e^{\delta t} \cdot l_x}{l_{x+t}} \left\{ P_x^k \cdot a_{x:\overline{n}|} - S(o) \cdot A_{x:\overline{n}|} \right\} -$$

$$- \frac{e^{\delta t}}{l_{x+t}} \int_o^t e^{-\delta\lambda} \cdot l_{x+\lambda} \cdot dS(\lambda) \cdot A_{x+\lambda:\overline{n-\lambda}|}. \qquad (18)$$

Daneben verfolgen wir den Fall der sich beliebig verändernden Prämie $P_{x+\lambda}$, wobei wir aber gleiche Leistungen wie bei der konstanten Prämie voraussetzen. Wir bilden die Differenz der beiden Gewinnfunktionen:

$$\psi^k(t) - \psi(t) = \frac{e^{\delta t} \cdot l_x}{l_{x+t}} \left\{ P_x^k \cdot a_{x:\overline{n}|} - P_x \cdot a_{x:\overline{n}|} \right\} -$$

$$- \frac{e^{\delta t}}{l_{x+t}} \int_o^t e^{-\delta\lambda} \cdot l_{x+\lambda} \cdot dP_{x+\lambda} \cdot a_{x+\lambda:\overline{n-\lambda}|}. \qquad (19)$$

Wenn die Prämie konstant ist, so stellt

$$P_x^k \cdot a_{x:\overline{n}|} \qquad (20)$$

den Barwert aller Prämienzahlungen dar. Bei der variablen Prämie ist dieser Barwert anderseits gegeben durch

$$P_x \cdot a_{x:\overline{n}|} + \int_o^n e^{-\delta\lambda} \cdot {}_{\lambda|}p_x \cdot dP_{x+\lambda} \cdot a_{x+\lambda:\overline{n-\lambda}|}. \qquad (21)$$

Beide Ausdrücke müssen einander gleich sein. Wir wollen noch voraussetzen, dass $dP_{x+\lambda} > 0$, dass also $P_{x+\lambda}$ nur zunehmen, aber nie abnehmen kann. Unter dieser Voraussetzung gilt sicher:

$$\int_o^n e^{-\delta\lambda} \cdot {}_{\lambda|}p_x \cdot dP_{x+\lambda} \cdot a_{x+\lambda:\overline{n-\lambda}|} > \int_o^t e^{-\delta\lambda} \cdot {}_{\lambda|}p_x \cdot dP_{x+\lambda} \cdot a_{x+\lambda:\overline{n-\lambda}|}$$

mit $t < n$.

Daraus folgt weiter, da (20) = (21):

$$P_x^k \cdot a_{x:\overline{n}|} > P_x \cdot a_{x:\overline{n}|} + \int_o^t e^{-\delta\lambda} \cdot {}_{\lambda|}p_x \cdot dP_{x+\lambda} \cdot a_{x+\lambda:\overline{n-\lambda}|}. \quad (22)$$

Wir kehren zu (19) zurück. Da wir bloss das Vorzeichen von $\psi^k(t) - \psi(t)$ zu kennen brauchen, dürfen wir vom Faktor $e^{-\delta t} : l_{x+t}$ absehen und durch l_x dividieren. Der restliche Teil entspricht aber genau der Ungleichung (22), so dass folgt:

$$\psi^k(t) - \psi(t) > 0. \quad (23)$$

Die Ungleichung (23) besagt aber nichts anderes, als *dass das System der konstanten Prämie auf eine maximale Gewinnfunktion führt.* Anders ausgedrückt, *wir haben beim Verfahren der konstanten Prämie maximale Skalengewinne zu erwarten.*

e) Praktisches Beispiel

Abschliessend geben wir noch die zahlenmässigen Zusammenhänge zwischen Gewinnfunktion und Prämiensystem an. Wir betrachten eine *gemischte Versicherung* mit $x = 30$ als Eintrittsalter und der Dauer $n = 10$, berechnet nach den «Minimalgrundlagen». Die Ausgangsleistung $S(o)$ sei 1000; die jährliche Zunahme betrage 100, so dass sich die maximale Leistung auf 1900 beläuft. Die notwendige Prämie wurde einmal nach dem Verfahren der konstanten Prämie und dann nach dem System der Nachversicherungen bestimmt. Zwischen den beiden Grenzfällen untersuchen wir noch einen beliebigen Prämienverlauf, wobei naturgemäss das Äquivalenzprinzip erfüllt sein muss.

Prämienverlauf und Gewinnfunktion

t	P_{x+t} Nachversicherung	P_{x+t} beliebig	P_x^k konstant	$\psi(t)$ Nachversicherung	$\psi(t)$ beliebig	$\psi^k(t)$ konstant
0	85.9	95.0	159.9	0.0	79.3	643.7
1	95.6	106.3	159.9	0.0	95.4	593.5
2	106.6	120.6	159.9	0.0	123.6	538.8
3	119.4	136.8	159.9	0.0	150.5	479.3
4	134.5	154.4	159.9	0.0	171.1	414.6
5	152.8	172.9	159.9	0.0	179.2	344.4
6	176.1	191.8	159.9	0.0	170.1	268.3
7	207.5	210.4	159.9	0.0	139.1	185.9
8	255.2	228.0	159.9	0.0	83.7	96.6
9	351.8	240.9	159.9	0.0	0.0	0.0

Aus der Zusammenstellung erkennen wir, dass die Gewinne aus der Skala ganz beträchtlich sein können.

II. Teil

Die Risiko- und Zinsgewinne

a) Allgemeines

Neben den Gewinnen aus der Skala haben wir jetzt noch die Zins- und Risikogewinne in den beiden Prämiensystemen zu vergleichen. Uns interessiert aber nicht in erster Linie die absolute Höhe der Gewinne, sondern mehr der Unterschied nach den zwei Verfahren.

Wir führen $R(t)$ als Differenz der retrospektiven Deckungskapitalien ein:

$$R(t) = {}_t\tilde{V}_x^r \text{ (konstante Prämie)} - {}_t\tilde{V}_x^r \text{ (variable Prämie)}.$$

Die rechnungsmässige Zinsintensität ist definitionsgemäss δ, die wirkliche sei $\bar{\delta}(t)$. Der Überzins wird daher

$$\alpha(t) = \bar{\delta}(t) - \delta.$$

Der Unterschied der Zinsgewinne im Zeitintervall t bis $t + dt$ beläuft sich auf

$$\alpha(t) \left\{ {}_t\tilde{V}_x^r \text{ (konstante Prämie)} - {}_t\tilde{V}_x^r \text{ (variable Prämie)} \right\} dt$$
$$= \alpha(t) \cdot R(t)\, dt. \tag{24}$$

Die Risiko-(Sterblichkeits-)gewinne lassen sich ebenfalls leicht erfassen. Die Risikoprämie ist allgemein

$${}^R\pi_{x+t}\, dt = \mu_{x+t} \left\{ S(t) - {}_t\tilde{V}_x^r \right\} dt. \tag{25}$$

Wenn nun $\bar{\mu}_{x+t}$ die wirkliche Sterblichkeit misst, so wird der Sterblichkeitsgewinn

$$\left\{ \mu_{x+t} - \bar{\mu}_{x+t} \right\} \left\{ S(t) - {}_t\tilde{V}_x^r \right\} dt$$
$$= \left\{ 1 - \frac{\bar{\mu}_{x+t}}{\mu_{x+t}} \right\} {}^R\pi_{x+t}\, dt = \beta(t) \cdot {}^R\pi_{x+t}\, dt \tag{26}$$

erzielt.

Wir haben wieder die Differenz der beiden Gewinne zu nehmen; wenn noch

${}^R\pi_{x+t}^{(k)}$ die Risikoprämie nach dem Verfahren der konstanten Prämie und

${}^R\pi_{x+t}^{(v)}$ die Risikoprämie nach dem Verfahren der variablen Prämie bedeutet,

so stellt

$$\beta(t) \left\{ {}^R\pi_{x+t}^{(k)} - {}^R\pi_{x+t}^{(v)} \right\} dt \tag{27}$$

die gesuchte Differenz dar. Die Funktion $\beta(t)$ soll nun aber nicht auf die Risikoprämien, sondern auf die Ge-

samtprämien $P_x^{(k)}$ und $P_{x+t}^{(v)}$ bezogen werden. Wir setzen daher an:

$$\beta(t)\left\{ {}^R\pi_{x+t}^{(k)} - {}^R\pi_{x+t}^{(v)} \right\} dt = \gamma(t)\left\{ P_x^{(k)} - P_{x+t}^{(v)} \right\} dt. \quad (28)$$

Um den gesamten Unterschied zu erhalten, brauchen wir bloss (24) und (28) zu addieren:

$$\alpha(t)\cdot R(t)\, dt + \gamma(t)\left\{ P_x^{(k)} - P_{x+t}^{(v)} \right\} dt. \quad (29)$$

Im allgemeinen wird diese Summe nicht null sein; wir wollen aber im nächsten Abschnitt eine Bedingung herleiten, unter der die Summe der Sterblichkeits- und Zinsgewinne in beiden Prämiensystemen gleich null ist.

b) Bedingung der Gleichheit der Sterblichkeits- und Zinsgewinne

Es muss also sein

$$\alpha(t)\cdot R(t) + \gamma(t)\left\{ P_x^{(k)} - P_{x+t}^{(v)} \right\} = 0. \quad (30)$$

Nun wissen wir aber, dass ${}_tV_x$ allgemein die Differentialgleichung

$$\frac{d\,{}_tV_x}{dt} = (\delta + \mu_{x+t})\,{}_tV_x + P_{x+t} - \mu_{x+t}\cdot S(t) \quad (31)$$

erfüllt. Dieser Gleichung muss sowohl die Reserve nach dem Verfahren der konstanten Prämie wie nach dem System der Nachversicherungen gehorchen. Bilden wir aus (31) die Differenz der beiden Prämien $P_x^{(k)} - P_{x+t}^{(v)}$, so folgt

$$P_x^{(k)} - P_{x+t}^{(v)} = \frac{dR(t)}{dt} - \left\{ \delta + \mu_{x+t} \right\} R(t). \quad (32)$$

Das neue Ergebnis führen wir in (30) ein und erhalten

$$\alpha(t) \cdot R(t) + \gamma(t) \left\{ \frac{dR(t)}{dt} - [\delta + \mu_{x+t}] R(t) \right\} = 0. \quad (33)$$

Sodann lösen wir nach $\alpha(t)$ auf:

$$\alpha(t) = \gamma(t) \left\{ \delta + \mu_{x+t} - \frac{dR(t)}{dt} \frac{1}{R(t)} \right\}. \quad (34)$$

Endlich bezeichnen wir noch mit

$$\eta(t) = \frac{dR(t)}{dt} \frac{1}{R(t)} \quad (35)$$

die Intensität der Veränderung der Reservendifferenz; wir erhalten damit endgültig:

$$\alpha(t) = \gamma(t) \{ \delta + \mu_{x+t} - \eta(t) \}. \quad (36)$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so fällt die Summe der Zins- und Sterblichkeitsgewinne in den beiden Prämiensystemen gleich hoch aus.

Schluss

Durch die Einführung der «Gewinnfunktion» ist es uns möglich geworden, eine besondere Eigenschaft der beiden in der Gruppenversicherung üblichen Prämiensysteme zu verfolgen und auch zahlenmässig festzuhalten. Wenn das Auftreten der Skalengewinne auch beim Verfahren der konstanten Prämie vermieden werden soll, so bleibt nur übrig, die Trennung der Gesamtheit aller Lebenden in die Teilgesamtheiten der

Aktiven und Invaliden vorzunehmen und für jede dieser beiden Gruppen die Anwartschaften einzeln zu berechnen. Wohl ist dieser Weg gerade in der Witwenversicherung ziemlich zeitraubend, wenn nach den genauen Altersdifferenzen der Ehegatten gerechnet wird, aber er verbürgt allein die geforderte Genauigkeit in der Prämienbemessung.