Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 31 (1936)

Artikel: Über eine einfache Momentenbeziehung beim Gauss'schen Fehlergesetz

Autor: Friedli, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-555053

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über eine einfache Momentenbeziehung beim Gauss'schen Fehlergesetz

Von Prof. **W. Friedli**, Bern

1. Das Fehlergesetz von Gauss-Laplace spielt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, in der Fehlertheorie und mathematischen Statistik eine fundamentale Rolle. Es zeichnet sich vor den übrigen Verteilungsfunktionen durch eine Reihe von charakteristischen Eigenschaften aus und verdankt seine Berühmtheit namentlich auch seiner vielseitigen praktischen Verwendbarkeit.

Angesichts der Bedeutung dieses Fehlergesetzes ist es nicht verwunderlich, dass zahlreiche Autoren sich mit ihm befasst haben und dass alle Lehrbücher über Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik ihm längere Ausführungen widmen. Man darf erwarten, dass alle wesentlichen Eigenschaften der Fehlerfunktion und der daraus abgeleiteten Grössen bekannt seien. Zu den reizvollsten Abschnitten der Theorie gehören die Darstellungen über die charakteristischen Fehler und die Momente der Fehlerfunktion. Es darf in diesem Zusammenhang auf die Darstellung bei *Bertrand* (Calcul des probabilités, 2e édition, 1907) verwiesen werden. Die Tatsache, dass die Quotienten aus aufeinanderfolgenden Momenten auf die Transzendente π führen, hat zur Ausführung von Beobachtungsreihen und Gegenüberstellung mit dem theoretischen Ansatz geführt. Beispielsweise gilt in statistischen Verteilungen, die zum

Gauss'schen Gesetz hinneigen, die bemerkenswerte Relation

$$\frac{2 \cdot M_2}{(M_1)^2} \longrightarrow \pi \tag{1}$$

d. h. der Quotient aus dem doppelten zweiten Moment und dem Quadrat des ersten Momentes gibt einen Näherungswert für die Zahl π.

Nun sind die Momente M_n einer Verteilungsreihe $x\,f\,(x)$ definiert als die Summen aller Produkte

$$x^n \cdot f\,(x)$$

wobei $f\,(x)$ die relative Häufigkeit der Beobachtung x sein möge. Also

$$M_n = \sum x^n f\,(x) \tag{2}$$

Für $n = 0, 1, 2, \ldots$ ergibt dieser Ansatz das 0te, 1te, 2te Moment der Verteilung, in bezug auf den gewählten Ausgangspunkt, von dem an die Beobachtungen «gemessen» werden. Handelt es sich um *absolute Momente*, so wird in (2) vom Vorzeichen der Beobachtungen x («Fehler») abgesehen, also

$$M_n = \Sigma \mid x^n \mid f\,(x) \tag{3}$$

Wir betrachten hier bloss diese absoluten Momente.

Die relative Häufigkeit $f\,(x)$ hängt mit der absoluten Häufigkeit $H\,(x)$ wie folgt zusammen:

$$f\,(x) = \frac{H\,(x)}{\sum H\,(x)}$$

folglich gilt statt (3):

$$M_n = \frac{\Sigma \, |x^n| \, H_x}{\Sigma \, H(x)} \tag{4}$$

Das n^{te} Moment ergibt sich also, indem man den absoluten Betrag der n^{ten} Potenz des Fehlers x multipliziert mit der Häufigkeit seines Vorkommens und alle diese Produkte addiert. Das gleiche Ergebnis kommt heraus, wenn man gleich von vornherein die n^{ten} Potenzen aller beobachteten Fehler bildet und diese addiert, ohne sie vorher nach der Grösse des Fehlers zu ordnen, d. h.

$$M_n = \frac{|x_1|^n + |x_2^n| + \cdots |x_1^n| + \cdots}{N} \tag{4}$$

worin $N = \Sigma H_x$ den Umfang der Verteilung, also die Zahl aller Beobachtungen, darstellt. Folglich gilt, wenn man abkürzend die Fehlersumme

$$S_n = |x_1|^n + |x_2|^n + \cdots + |x_1^n| + \cdots$$

einführt, kurzerhand

$$M_n = \frac{S_n}{N} \tag{5}$$

und infolgedessen statt (1):

$$\frac{\frac{S_2}{N}}{\left(\frac{S_1}{N}\right)^2} = \frac{\pi}{2} \tag{6}$$

Dieser einfachen Fehlersummenregel hat *Bertrand* noch zwei weitere angegliedert, nämlich (a. a. O. S. 185):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\dfrac{S_3}{N}}{\left(\dfrac{S_1}{N}\right)^3} &= \pi \\ \frac{\dfrac{S_4}{N}}{\left(\dfrac{S_1}{N}\right)^4} &= \frac{3\,\pi^2}{4} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Diese Beziehungen könnte man als transzendente Momentenregeln bzw. Fehlersummen-Beziehungen bezeichnen.

2. Bei der Behandlung solcher Beziehungen in seinen Vorlesungen ist der Verfasser dieses Aufsatzes auf einige ähnliche Beziehungen gestossen, die aber von der Transzendenten π frei sind und sich eignen, die Sonderstellung des Gauss'schen Fehlergesetzes von einem neuen Standpunkt aus zu beleuchten. Da es sich um sehr *einfache* Zusammenhänge handelt, die möglicherweise gerade ihrer Einfachheit wegen übersehen worden sind, seien sie hier mitgeteilt.

Satz. Bei einer Verteilungsreihe, die nach dem Gauss'schen Gesetz hintendiert, gilt für die absoluten Momente die Beziehung

$$\frac{n \cdot M_n}{(n+1) \cdot M_{n+1}} : \frac{(n+2) \cdot M_{n+2}}{(n+3) \cdot M_{n+3}} \rightarrow \left(\frac{n}{n+1} : \frac{n+2}{n+3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \tag{8}$$

Zusatz. Beim Gauss'schen Gesetz gilt für die vier ersten absoluten Momente die Beziehung

$$\frac{1 \cdot M_1}{2 \cdot M_2} : \frac{3 \cdot M_3}{4 \cdot M_4} = 1 \tag{9}$$

Zunächst kann, wegen (5), auf die Tatsache verwiesen werden, dass diese Beziehungen ungeändert bleiben, wenn man die Momente durch die Fehlersummen S_n ersetzt. Es würde also Relation (9) auch so formuliert werden können:

$$\frac{1 \cdot S_1}{2 \cdot S_2} = \frac{3 \cdot S_3}{4 \cdot S_4} \tag{10}$$

An einem *Beispiel* soll zunächst gezeigt werden, dass die Beziehung schon bei einem kleinen Beobachtungsmaterial weitgehend erfüllt sein kann. In nachstehender Tafel ist in Kolonne (1) die Zahl der Gewittertage im Jahre 1934 bei 14 schweizerischen Wetterstationen angegeben (Statistisches Jahrbuch der Schweiz 1934, S. 5). Die mittlere Zahl der Gewittertage war 17. In Kolonne 2 notieren wir unter dem Titel «Fehler» die Abweichungen der Beobachtungswerte vom Mittel. Die Kolonnen 3—5 enthalten die Potenzen der Fehler. (Siehe Tabelle auf der folgenden Seite.)

Die Rechnung ergibt

$$\frac{1 \cdot S_1}{2 \cdot S_2} = \frac{81}{1518} = 0{,}0534$$

$$\frac{3 \cdot S_3}{4 \cdot S_4} = \frac{28\,467}{556\,188} = 0{,}0511$$

Die Übereinstimmung der beiden Werte ist angesichts des geringen Umfanges ($N = 14$) eine unerwartet weitgehende.

i	Beobachtungswert	Fehler x_i	Fehlerpotenzen		
			x_i^2	x_i^3	x_i^4
0	1	2	3	4	5
1	20	3	9	27	81
2	22	5	25	125	625
3	21	4	16	64	256
4	21	4	16	64	256
5	21	4	16	64	256
6	16	1	1	1	1
7	7	10	100	1.000	10.000
8	6	11	121	1.331	14.641
9	18	1	1	1	1
10	14	3	9	27	81
11	8	9	81	729	6.561
12	15	2	4	8	16
13	11	6	36	216	1.296
14	35	18	324	5.832	104.976
Σ	235	81 $= S_1$	759 $= S_2$	9.489 $= S_3$	139.047 $= S_4$
$n \cdot S_n =$		81	1518	28.467	556.188

3. Der Beweis des Satzes ergibt sich wie folgt: Beachtet man, dass es sich beim Gauss'schen Gesetz um eine symmetrische Verteilungsreihe handelt, so dass $\varphi(-x) = \varphi(+x)$, so gilt für das absolute Moment n^{ter} Ordnung

$$M_n = 2 \cdot \int_0^\infty x^n \cdot \varphi(x)\, dx$$

worin

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 x^2}$$

Durch die Substitution $h^2 x^2 = z$ geht das Integral über in

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z} z^{\frac{n-1}{2}} \cdot dz \cdot \frac{1}{h^n}$$

also

$$M_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{h^n \sqrt{\pi}} \tag{11}$$

Analog folgt

$$M_{n+2} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} + 1\right)}{h^{n+2} \sqrt{\pi}}$$

Da aber $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, so geht dies über in

$$M_{n+2} = \frac{n+1}{2\,h^2} M_n$$

so dass

$$r(n) = \frac{M_{n+2}}{M_n} = \frac{n+1}{2\,h^2} \tag{12}$$

Durch Quotientenbildung hat man sich von der Transzendenten freigemacht. Es gelingt nun leicht, eine von der Präzisionskonstanten h freie, also *invariante Beziehung* abzuleiten, die für das Gauss'sche Gesetz charakteristisch ist. Man hat bloss den Quotienten

$$\frac{r(n+1)}{r(n)}$$

zu bilden. Wegen (12) kommt

$$\frac{M_{n+3}}{M_{n+1}} : \frac{M_{n+2}}{M_n} = \frac{n+2}{n+1} \tag{13}$$

Setzt man jedem Moment die Ordnungszahl als Faktor voraus, so folgt weiter

$$\frac{n \cdot M_n}{(n+1) \cdot M_{n+1}} \cdot \frac{(n+3) \cdot M_{n+3}}{(n+2) \cdot M_{n+2}} = \frac{n\,(n+3)}{(n+1)\,(n+2)} \frac{n+2}{n+1}$$

oder, wenn die linke Seite abkürzend mit $Q\,(n)$ bezeichnet wird:

$$Q\,(n) = \frac{n\,(n+3)}{(n+1)\,(n+2)} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \tag{14}$$

Das ist aber Aussage (8).

Einzig für $n = 1$ (Zusatz!) und $n = \infty$ wird der Momentenquotient zu 1. Wie aber nachstehende Tabelle zeigt, ergeben sich für alle Werte $n \geqq 2$ Zahlen, die sich nur wenig von 1 unterscheiden.

n	1	2	3	4	5	6	...	∞
$Q\,(n)$	1	$1\frac{1}{9}$	$1\frac{1}{8}$	$1\frac{3}{25}$	$1\frac{1}{9}$	$1\frac{5}{49}$	...	1

4. Ähnliche Eigenschaften des von uns betrachteten Momentenquotienten lassen sich auch bei andern symmetrischen Verteilungen nachweisen. Nachstehend seien die Ergebnisse einiger Untersuchungen mitgeteilt. Bemerkenswert ist die Tatsache, dass in den betrachteten Beispielen einzig für das Gauss'sche Gesetz die Beziehung (9) zutrifft; einen Beweis, dass nur das Gauss'sche

Gesetz dieser Relation genügen kann, hat der Verfasser dieser Arbeit noch nicht gefunden.

Verteilung	Verteilungsfunktion $\varphi(x)$	Momentenquotient $Q(n)$
Dach . . .	$b\left(1-\frac{\lvert x\rvert}{a}\right),\ b=\frac{1}{a}$	$\frac{n(n+3)^3}{(n+1)^2(n+2)(n+5)}$
Exponentialfunktion .	$b\cdot e^{-a\lvert x\rvert},\ b=\frac{a}{2}$	$\frac{n(n+3)^2}{(n+2)(n+1)^2}$
Halbkreis .	$r\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}},\ r=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$	$\frac{n(n+3)(n+4)}{(n+1)^2(n+5)}$
Halbellipse .	$b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}},\ b=\frac{2}{a\pi}$	
Gauss'sche Funktion .	$k\cdot e^{-h^2x^2},\ k=\frac{h}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{n(n+3)}{(n+1)^2}$