Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 33 (1937)

Artikel: Über das Erneuerungsproblem bei Verwendung eines analytischen Sterbegesetzes

Autor: Schulthess, Harald

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966749

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über das Erneuerungsproblem bei Verwendung eines analytischen Sterbegesetzes.

Von Dr. **Harald Schulthess**, Bern.

Das Erneuerungsproblem nach *Moser* [1]) untersucht das Verhalten einer ursprünglich gleichaltrigen Personengesamtheit, die einerseits infolge von Todesfällen zahlenmässig abnimmt, andrerseits durch Neuzutritte erweitert wird. Alle betrachteten Personen sollen im Zeitpunkt ihres Eintritts in die Gesamtheit ein bestimmtes konstantes Eintrittsalter haben.

Bedeutet $A(t)$ den Bestand zur Zeit t, $p(t)$ die t-jährige Sterbewahrscheinlichkeit, $\varphi(t)$ die Intensität der Erneuerung und ist das einheitliche Eintrittsalter 0, so lautet die Gleichung des Erneuerungsproblems:

$$A(t) = A(0)\, p(t) + \int_0^t A(\tau)\, \varphi(\tau)\, p(t-\tau)\, d\tau$$

Wir beschäftigen uns im folgenden mit dem Fall, wo der Bestand der betrachteten Gesamtheit konstant bleiben soll, und untersuchen, mit welcher Intensität unter dieser Bedingung Neuzutritte erfolgen müssen.

Als Sterbegesetz legen wir unsern Betrachtungen das sogenannte Gesetz von *Achard* zugrunde:

---

[1]) Moser: Beiträge zur Darstellung von Vorgängen bei einer sich erneuernden Gesamtheit. M. V. M. Heft 21.

$$p(t) = \left(1 - \frac{t}{\omega}\right)^m$$

ω ist das Höchstalter und m eine ganze positive Zahl. Das der Wirklichkeit am nächsten stehende Gesetz von *Makeham* ist für die analytische Ausrechnung zu kompliziert, und die einfachere Hypothese von *Dormoy* würde der Wirklichkeit widersprechende Resultate liefern.

1. Gleichung der Erneuerungsfunktion für $t \leqq w$.

Unser Sterbegesetz $p(t) = \left(1 - \frac{t}{\omega}\right)^m$ hat für $t = \omega$ den Wert 0 (die Leute erreichen kein höheres als ein bestimmtes Höchstalter) und für $t > \omega$ wiederum von 0 verschiedene positive oder negative Werte. Das ist der Wirklichkeit widersprechend und sinnlos. Der Gültigkeitsbereich der Funktion $p(t)$ ist daher auf Werte $t \leqq \omega$ beschränkt. Die Gleichung für das Erneuerungsproblem nach Moser gilt ebenfalls nur für Werte $t \leqq \omega$. Wir nennen die Erneuerungsfunktion wegen ihres daherigen beschränkten Gültigkeitsbereiches φ_0; die unabhängige Variable wollen wir mit x bezeichnen. Die Gleichung für das Erneuerungsproblem lautet dann

$$(1) \qquad 1 = p(x) + \int_0^x p(x-y)\, \varphi_0(y)\, dy$$

Wir differenzieren diese Gleichung nach x:

$$(2) \qquad \varphi_0(x) = -p'(x) - \int_0^x p'(x-y)\, \varphi_0(y)\, dy$$

Das ist eine *Volterra*'sche Integralgleichung zweiter Art für $\varphi_0(x)$. Sie kann durch m-malige Differentiation

in eine lineare Differentialgleichung m-ten Grades übergeführt und als solche gelöst werden. Durch einmalige Differentiation und Umgruppierung der einzelnen Glieder der Gleichung erhalten wir:

$$\varphi_0'(x) + p'(0)\,\varphi_0(x) + \int_0^x p''(x-y)\,\varphi_0(y)\,dy = -\,p''(x)$$

Wir differenzieren noch $(m-1)$ Male weiter nach x:

$$\sum_0^m{}_\lambda\, \varphi_0^{(m-\lambda)}(x)\, p^{(\lambda)}(0) + \int_0^x p^{(m+1)}(x-y)\,\varphi_0(y)\,dy = -\,p^{(m+1)}(x)$$

Aus $p(x) = \left(1 - \frac{x}{\omega}\right)^m$ folgt:

$$p^{(m+1)}(x) \equiv 0$$

$$p^{(\lambda)}(0) = m\,(m-1)\cdots(m-\lambda+1)\left(-\frac{1}{\omega}\right)^\lambda \text{ [1]}$$

Setzen wir diese Werte in unserer letzten Gleichung ein und dividieren wir zudem diese Gleichung durch $\left(-\frac{1}{\omega}\right)^m m!$, so erhalten wir

$$\varphi_0(x) - \frac{\omega\varphi_0'(x)}{1!} + \frac{\omega^2\varphi_0''(x)}{2!} - + \cdots + (-1)^m \frac{\omega^m\,\varphi_0^{(m)}(x)}{m!} = 0$$

Das ist eine lineare Differenzialgleichung m-ter Ordnung für die Funktion $\varphi_0(x)$. Ihre Lösung erfordert die Lösung der sogenannten charakteristischen Gleichung, die man erhält, wenn man $\varphi_0^{(\nu)}(x)$ durch z^ν ersetzt. Ist

[1]) Zur Vereinfachung der Schreibweise bezeichnen wir Ausdrücke von der Form $\left.\frac{d^\lambda\, p(x)}{dx^\lambda}\right|_{x=a}$ abkürzend mit $p^{(\lambda)}(a)$.

dann $z = \alpha$ eine Lösung der charakteristischen Gleichung, so ist $e^{\alpha x}$ ein partikuläres Integral der Differentialgleichung. Unsere charakteristische Gleichung lautet:

$$(4) \quad F(z) = 1 - \frac{\omega z}{1!} + \frac{\omega^2 z^2}{2!} - \frac{\omega^3 z^3}{3!} + - \cdots + (-1)^m \frac{\omega^m z^m}{m!} = 0$$

Die Lösung dieser Gleichung auf algebraischem Wege ist für beliebig hohes m nicht möglich. Dagegen können über ihre Wurzeln folgende Aussagen gemacht werden:

1. $F(z) = 0$ hat keine mehrfachen Wurzeln. Wir nehmen an, $z = \alpha$ sei eine Doppelwurzel. Dann muss für diesen Wert sowohl F selber als auch die erste Ableitung von F verschwinden. Die erste Ableitung von F ist

$$F'(z) = -\omega + \frac{\omega^2 z}{1!} - \frac{\omega^3 z^2}{2!} + - \cdots + (-1)^m \frac{\omega^m z^{m-1}}{(m-1)!} = 0$$

Wir dividieren diese Gleichung durch ω, setzen für z darin und in (4) den Wert α ein und addieren die beiden Gleichungen. Wir finden:

$$F(\alpha) + \frac{1}{\omega} F'(\alpha) = (-1)^m \frac{\omega^m \alpha^m}{m!} = 0$$

Diese Beziehung ist nur möglich für $\alpha = 0$. Wenn also α eine mehrfache Wurzel von $F = 0$ ist, so hat es den Wert 0. $z = 0$ erfüllt jedoch Gleichung (4) nicht, $\alpha = 0$ ist also keine Wurzel von $F(z) = 0$. Damit ist bewiesen, dass $F(z) = 0$ keine mehrfache Wurzeln besitzt. Unsere Differentialgleichung (3) hat dann die allgemeine Lösung

$$(5) \qquad \varphi_0(x) = \sum_{1}^{m}{}_{\lambda} A_\lambda e^{\alpha_\lambda x}$$

Die A_λ sind Integrationskonstanten. Auf die Art ihrer Berechnung kommen wir in Abschnitt 4 zurück.

2. Die Gleichung $F(z) = 0$ hat bei geradem m keine, bei ungeradem m eine, aber nur eine reelle Wurzel.

Aus der Theorie der Gammafunktionen ist bekannt, dass die unvollständige Gammafunktion der Gleichung genügt:

$$Q_z(n) = (n-1)!\, e^{-z} \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

$$Q_{-z\omega}(m+1) = m!\, e^{\omega z} \left(1 - \frac{\omega z}{1!} + \frac{\omega^2 z^2}{2!} + \cdots + (-1)^m \frac{\omega^m z^m}{m!}\right)$$

Der Ausdruck in der runden Klammer ist unsere Funktion $F(z)$. Die Gleichung (4): $F(z) = 0$ ist daher äquivalent mit der Beziehung

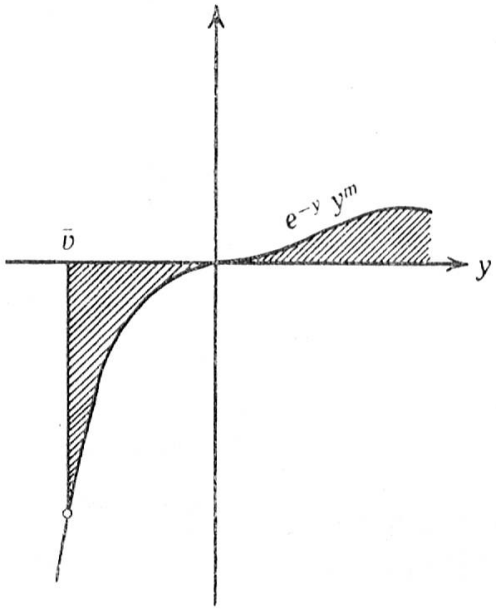
$$Q_{-z\omega}(m+1) = 0$$

Mit andern Worten: Ein z, das diese Beziehung erfüllt, ist eine Wurzel der Gleichung $F(z) = 0$. Die Diskussion der obigen Gleichung wird übersichtlicher, wenn wir $-\omega z$ durch v ersetzen. Ausserdem setzen wir für $Q_v(m+1)$ den Integralwert ein. Wir erhalten:

$$(\alpha) \qquad Q_v(m+1) = \int_v^\infty e^{-y}\, y^m\, dy = 0$$

a) Für gerades m ist der Integrand bei reellem und endlichem y nie negativ, das Integral als Fläche zwischen der x-Achse und einer nie negativen Kurve also nie null. Es gibt demnach bei geradem m keinen reellen endlichen Wert von v und damit auch keinen reellen endlichen Wert von z, der (α) erfüllt, mithin auch keine reelle Wurzel der zu (α) äquivalenten Gleichung (4).

b) Für ungerades m hat (4) und damit auch die dazu äquivalente Gleichung (α) nach dem Fundamentalsatz der Algebra wenigstens eine reelle Wurzel. Wir müssen noch beweisen, dass es höchstens eine reelle Wurzel gibt. Für $m = 1$ ist diese Tatsache selbstverständlich, für $m > 1$ (aber ungerade) ist der Integrand



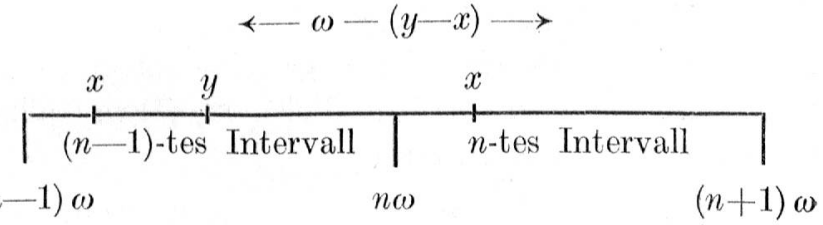
eine links der Ordinatenachse negative, rechts positive stetige und eindeutige Funktion. Unsere Gleichung ist erfüllt, wenn wir ein v finden so, dass das Flächenstück links gleich dem endlichen Flächenstück rechts (dieses hat den Wert $\Gamma(m+1) = m!$) ist. Wir haben erkannt, dass es ein solches v gibt. Wir nehmen an, dieses v sei gefunden, es sei der in obenstehender Figur eingezeichnete Wert $\bar{v}$. Aus der Figur erkennen wir leicht, dass wegen der Stetigkeit und Eindeutigkeit der Funktion $e^{-y}\, y^m$ jedes andere reelle $v > \bar{v}$ links ein kleineres, jedes andere reelle $v < \bar{v}$ ein grösseres Flächenstück erzeugt als $\bar{v}$, so dass die Teilflächen links und rechts nicht mehr gleich

sein können. Es gibt also ausser $\bar{v}$ kein reelles v und damit auch kein reelles $z = -\frac{v}{\omega}$, das (α) erfüllt. Damit ist gezeigt, dass (α) und damit (4) bei ungeradem m eine, aber nur eine reelle Wurzel besitzt.

Die α_λ in (5) sind also mit Ausnahme eines einzigen im Falle, wo m gerade ist, komplexe Zahlen. Diese Tatsache werden wir später verwenden.

2. Die Gleichung der Erneuerungsfunktion für $t > \omega$.

Zur Berechnung der Erneuerungsfunktion für $t > \omega$ teilen wir die Zeit t in Intervalle von der Grösse ω ein. Wir numerieren die einzelnen Intervalle der Reihe nach mit 0, 1, ... n und nennen die Erneuerungsfunktion im n-ten Intervall, wo t einen Wert $n\omega + x$ $(0 < x < \omega)$ hat, $\varphi_n(x)$. Die Berechnung von $\varphi_n(x)$, der Erneuerungsfunktion im 0-ten Intervall, wurde im vorigen Abschnitt dargestellt. Für die Berechnung von $\varphi_n(x)$ für $n > 0$ gehen wir von folgender Überlegung aus: Der Gesamtbestand 1 besteht zu einer Zeit $t = n\omega + x$, also im n-ten Intervall, aus solchen Mitgliedern, die im $(n-1)$-ten und solchen, die im betrachteten Intervall selber eingetreten sind. Alle vor der Zeit $t = (n-1)\omega$ Eingetretenen sind zur Zeit $n\omega + x$ gestorben.



Zur Zeit $(n-1)\omega + y$ sind $\varphi_{n-1}(y)$ Mitglieder eingetreten. Davon sind zur Zeit $n\omega + x$, d. h. $\omega - (y-x)$ Jahre später, noch $\varphi_{n-1}(y)\, p(\omega + x - y)$ Mitglieder

vorhanden. Die Summe aller dieser Elemente und der noch vorhandenen im n-ten Intervall selber Eingetretenen ist der Gesamtbestand 1.

$$(6)\quad \int_x^\omega \varphi_{n-1}(y)\, p(\omega+x-y)\, dy + \int_0^x p(x-y)\, \varphi_n(y)\, dy = 1$$

Diese Beziehung ist eine Rekursionsformel für die Funktionen $\varphi_n(x)$. Durch Differenzieren und Umformen finden wir

$$(7)\quad \varphi_n(x) = -\int_x^\omega \varphi_{n-1}(y)\, p'(\omega+x-y) - \int_0^x p'(x-y)\, \varphi_n(y)\, dy$$

Diese Formel, in der wir $\varphi_n(x)$ als unbekannt und $\varphi_{n-1}(x)$ als bekannt annehmen können, ist wiederum eine *Volterra*'sche Integralgleichung zweiter Art und stimmt mit (2) bis an die freie Funktion überein. Wir lösen sie wie (2) durch m-maliges Differenzieren. Wir finden

$$(8)\quad \varphi_n(x) - \frac{\omega \varphi_n'(x)}{1!} + \frac{\omega^2 \varphi_n''(x)}{2!} + \cdots + (-1)^m \frac{\varphi_n^{(m)}(x)\, \omega^m}{m!} = \varphi_{n-1}(x)$$

Das ist eine lineare Differentialgleichung, deren rechte Seite von 0 verschieden ist. Ihr allgemeines Integral ist die Summe aus dem allgemeinen Integral ohne rechtes Glied und einem partikulären Integral mit dem rechten Glied. Die linke Seite stimmt bis an die Indices mit (3) überein. Das allgemeine Integral ohne rechte Seite ist also ebenfalls Gleichung (5) mit allgemeinen Integrationskonstanten

$$(\alpha)\qquad \sum_1^m{}^{\lambda} K_\lambda\, e^{\alpha_\lambda x}$$

Für $n = 1$ hat die rechte Seite die Form

$$\sum_{1}^{m}{}^{\lambda} \overline{K}_\lambda \, e^{\alpha_\lambda x}$$

Die α_λ sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der linken Seite von (8). Aus der Theorie der Differentialgleichungen ist bekannt, dass das partikuläre Integral von (8) mit rechter Seite dann die Form

$$(\beta) \qquad \sum_{1}^{m}{}^{\lambda} \overline{\overline{K}}_\lambda \, x e^{\alpha_\lambda x}$$

hat. Die Addition von (α) und (β) liefert $\varphi_1(x)$. Mit zweckentsprechender Umbenennung der Konstanten erhalten wir:

$$\varphi_1(x) = \sum_{1}^{m}{}^{\lambda} \left[B_{0\lambda} + B_{1\lambda}\, x\right] e^{\alpha_\lambda x}$$

Für $n = 2$ ist die rechte Seite von (8) gerade die rechte Seite dieser Beziehung. Das partikuläre Integral von (8) mit rechter Seite ist dann eine Funktion von der Beschaffenheit

$$\sum_{1}^{m}{}^{\lambda} \left[C_{1\lambda}\, x + C_{2\lambda}\, x^2\right] e^{\alpha_\lambda x}$$

Damit wird

$$\varphi_2(x) = \sum_{1}^{m}{}^{\lambda} \left[C_{0\lambda} + C_{1\lambda}\, x + C_{2\lambda}\, x^2\right] e^{\alpha_\lambda x}$$

Allgemein gilt:

$$(9) \qquad \varphi_n(x) = \sum_{1}^{m}{}^{\lambda} \sum_{0}^{n}{}^{\nu} {}_nA_{\nu\lambda}\, x^\nu \, e^{\alpha_\lambda x}$$

${}_nA_{\nu\lambda}$ bedeutet dabei den konstanten Koeffizienten des Gliedes $x^\nu e^{\alpha_\lambda x}$ im Ausdruck für die Erneuerungsfunktion des n-ten Intervalls $\varphi_n(x)$ bei Zugrundelegung des Absterbegesetzes $\left(1 - \frac{x}{\omega}\right)^m$. Die α_λ sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (4). Sowohl die A als auch die α haben für verschiedene m verschiedene Werte.

Gleichung (5) ist in Gleichung (9) als Spezialfall ($n = 0$) ebenfalls enthalten. Also gilt die Gleichung (9) für beliebige n. Sie ist der allgemeinste analytische Ausdruck für die Erneuerungsfunktion bei Annahme einer Parabel m-ten Grades als Absterbefunktion.

3. Darstellung der Erneuerungsfunktion mit Hilfe trigonometrischer Funktionen.

Wir haben erkannt, dass in (9) alle α_λ mit Ausnahme eines einzigen bei ungeradem m komplexe Zahlen sind. Wenn $\alpha_1 = a + bi$ eine Lösung von (4) und damit eines unserer α_λ in (9) ist, so ist es auch $\alpha_2 = a - bi$. Die Summe (9) für $\varphi_n(x)$ wird daher in Teilglieder von folgender Form zerfallen

$$x^\nu \left[A_{\nu 1}\, e^{(a+bi)x} + A_{\nu 2}\, e^{(a-bi)x}\right]$$

Mit $e^{ibx} = \cos(bx) + i \sin(bx)$ geht dieser Ausdruck über in

$$(\alpha) \quad x^\nu e^{ax} \left[A_{\nu 1} \cos(bx) + iA_{\nu 1} \sin(bx) + A_{\nu 2} \cos(bx) - iA_{\nu 2} \sin(bx)\right]$$

Wir wissen, dass unsere Funktion $\varphi(x)$ eine bestimmte konkrete Bedeutung hat und sicher als reelle Funktion existiert. Der analytische Ausdruck für $\varphi_n(x)$ darf also keine imaginären Glieder aufweisen. Die Summe aller imaginären Glieder in (9) muss für beliebige Werte von x null sein. Das ist wegen der Verschieden-

heit aller Werte α_λ nur dann möglich, wenn in allen Teilgliedern von (9) von der Form (α) die Summe der beiden imaginären Glieder null ist. Das ist der Fall, wenn $A_{\nu 1} = A_{\nu 2}$ ist, wenn also die Koeffizienten derjenigen partikulären Integrale unserer Differentialgleichung (3), die aus konjugiert-komplexen Wurzeln der charakteristischen Gleichung (4) hervorgehen, paarweise gleich sind. (α) geht über in

$$(\beta) \qquad 2A_{\nu 1}\, x^\nu\, e^{ax} \cos(bx)$$

Es lassen sich also immer zwei Summanden der Reihe (9) von der Form $A_{\nu\lambda}\, e^{\alpha_\lambda x}\, x^\nu$ in einen einzigen von der Form (β) zusammenfassen. Damit wird die Anzahl der Summanden von (9) für gerades m auf $\frac{m}{2}$, für ungerades m, wo ein α_λ reell ist, auf $\frac{m-1}{2}$ reduziert. Wir erhalten an Stelle von (9) zwei Gleichungen von der Form

$$(10) \quad \begin{cases} m \text{ gerade:} \\ \varphi_n(x) = \sum\limits_{1}^{\frac{m}{2}} \sum\limits_{0}^{n} {}_nB_{\nu\lambda}\, x^\nu\, e^{\alpha_\lambda x} \cos(b_\lambda x) \\ m \text{ ungerade:} \\ \varphi_n(x) = \sum\limits_{0}^{n} {}_nB_{\nu 0}\, x^\nu\, e^{\alpha_0 x} + \sum\limits_{1}^{\frac{m-1}{2}} \sum\limits_{0}^{n} {}_nB_{\nu\lambda}\, x^\nu\, e^{\alpha_\lambda x} \cos(b_\lambda x) \end{cases}$$

Dabei bedeutet α_0 die reelle, $a_\lambda \pm b_\lambda\, i$ zwei konjugiert-komplexe Wurzeln von (4). Die Bedeutung der Koeffizienten B geht aus der Gleichung (10) selber hervor. Der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten A und B ist der folgende:

$$_nB_{\nu\lambda} = {}_nA_{\nu\lambda_1} + {}_nA_{\nu\lambda_2} = 2\,{}_nA_{\nu\lambda_1}$$

(10) ist die allgemeine Gleichung für die Erneuerungsfunktion $\varphi(x)$ in trigonometrischer Form. Dadurch, dass sich $\varphi(x)$ durch trigonometrische Funktionen darstellen lässt, tritt der wellenförmige Verlauf der Erneuerungsfunktion deutlich zutage.

4. Über die Bestimmung der Integrationskonstanten A in (9) bzw. B in (10).

a) $n = 1$: Die Lösung $\varphi_0(x)$ der für $n = 1$ geltenden Differentialgleichung (3) weist m Integrationskonstanten auf, die bestimmbar sein müssen, da $\varphi_0(x)$ als Lösung einer Volterra'schen Integralgleichung zweiter Art eindeutig bestimmt ist. Die dazu notwendigen Randbedingungen sind die Gleichungen (2) und ihre $(m-1)$ ersten Ableitungen, wenn man darin $x = 0$ setzt. Wir haben erkannt, dass je zwei Integrationskonstanten gleich gross sein müssen, also genügen zur Bestimmung der m Integrationskonstanten $_0A$ bzw. der $\frac{m}{2}$ oder $\frac{m+1}{2}$ Integrationskonstanten $_0B$ schon $\frac{m}{2}$ oder $\frac{m+1}{2}$ der erwähnten Randbedingungen.

b) $n > 1$: Die Konstanten $_nA_\nu$ bzw. $_nB_\nu$ gehen für $\nu > 0$ bei der Lösung der Differentialgleichung (8) eindeutig hervor. Sie sind Funktionen der $_{n-1}A_\nu$ bzw. $_{n-1}B_\nu$ und können durch Rekursion aus diesen bestimmt werden. Die m Integrationskonstanten $_nA_0$ bzw. die $\frac{m}{2}$ oder $\frac{m+1}{2}$ Integrationskonstanten $_nB_0$ folgen aus Gleichung (7) und ihren $(m-1)$ ersten Ableitungen für

$t = 0$. Auch hier genügen, wie im Fall $n = 1$, schon $\frac{m}{2}$ bzw. $\frac{m+1}{2}$ dieser Randbedingungen.

5. Stetigkeit der Funktion $\varphi(t)$.

Die Funktionen $\varphi_n(x)$ verlaufen innerhalb ihres Geltungsbereichs als ganze transzendente Funktionen stetig. Noch unbestimmt ist die Stetigkeit der Funktion $\varphi(t)$ in den Grenzpunkten der Teilintervalle, d. h. dort, wo der Geltungsbereich von $\varphi_{n-1}(x)$ aufhört und derjenige von $\varphi_n(x)$ beginnt, also für den Wert $t = n\omega$.

$\varphi(t)$ verläuft dann stetig, wenn $\varphi_{n-1}(\omega) = \varphi_n(0)$ oder, gleichbedeutend, $\varphi_{n-1}(\omega) - \varphi_n(0) = 0$ ist. Das Analoge kann über die Stetigkeit der Ableitungen gesagt werden.

1. Wir betrachten zuerst den Übergangspunkt vom 0-ten zum ersten Intervall ($t = \omega$). Wir setzen in (2) $x = \omega$. Dann ist

$$\varphi_0(\omega) = -p'(\omega) - \int_0^\omega p'(\omega - y)\, \varphi_0(y)\, dy$$

Aus (7) folgt für $n = 1$ und $x = 0$:

$$\varphi_1(0) = -\int_0^\omega p'(\omega - y)\, \varphi_0(y)\, dy$$

Daraus geht durch Subtraktion die Beziehung

$$\varphi_0(\omega) - \varphi_1(0) = -p'(\omega)$$

hervor. Die Bedingung für Stetigkeit der Funktion $\varphi(t)$ im Punkt $t = \omega$ lautet daher:

$$p'(\omega) = -\frac{m}{\omega}\left(1 - \frac{x}{\omega}\right)^{m-1}\Bigg|_{x=\omega} = 0$$

Diese Beziehung ist erfüllt für $m > 1$, dagegen nicht für $m = 1$. Wir finden also

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} \varphi_0(\omega) &\neq \varphi_1(0) \quad \text{für } m = 1 \\ \varphi_0(\omega) &= \varphi_1(0) \quad \text{für } m > 1. \end{aligned}$$

Zur Untersuchung über die Stetigkeit der ersten Ableitung differenzieren wir die Gleichungen (2) und (7) und setzen in (7) $n = 1$.

$$\varphi_0'(x) = -p''(x) - p'(0)\,\varphi_0(x) - \int_0^x p''(x-y)\,\varphi_0(y)\,dy$$

$$\varphi_1'(x) = -\varphi_0(x)\,p'(\omega) - \varphi_1(x)\,p'(0) - \int_x^\omega \varphi_0(y)\,p''(x+\omega-y)\,dy$$

$$- \int_0^x \varphi_1(y)\,p'(x-y)\,dy$$

Setzen wir in der obern dieser Gleichungen $x = 0$ und in der untern $x = \omega$ und subtrahieren die untere von der obern, so folgt:

$$\varphi_0'(\omega) - \varphi_0'(0) = -p''(\omega) - p'(0)\,[\varphi_0(\omega) - \varphi_1(0)] - \varphi_0(0)\,p'(\omega)$$

Der Fall $m = 1$ interessiert uns nicht, da in diesem Fall schon $\varphi(t)$ selber unstetig ist. Für $m > 1$ sind die letzten beiden Summanden der rechten Seite dieser Gleichung null, da $p'(\omega) = 0$ und $\varphi_0(\omega) = \varphi_1(0)$ ist. Die Bedingungsgleichung für Stetigkeit der Funktion $\varphi'(t)$ im Punkt $t = \omega$ lautet dann

$$p''(\omega) = m\,(m-1)\,\frac{1}{\omega^2}\left(1 - \frac{x}{\omega}\right)^{m-2}\Bigg|_{x=\omega} = 0$$

Diese Gleichung ist erfüllt für $m > 2$, dagegen nicht für $m = 2$. Daraus folgt:

$$(\beta) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_0'(\omega) \neq \varphi_1'(\omega) & \text{für } m = 2 \\ \varphi_0'(\omega) = \varphi_1'(\omega) & \text{für } m > 2 \end{array} \right\}$$

So weiterfahrend können wir die Stetigkeit der höhern Ableitungen beurteilen. Wir finden allgemein

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{array}{ll} \varphi_0^{(\nu)}(\omega) \neq \varphi_1^{(\nu)}(0) & \text{für } m = \nu + 1 \\ \varphi_0^{(\nu)}(\omega) = \varphi_1^{(\nu)}(0) & \text{für } m > \nu + 1 \end{array}$$

2. Wir betrachten den Übergangspunkt vom ersten zum zweiten Intervall ($t = 2\omega$). — Wir setzen in (7) zuerst $n = 1$ und $x = \omega$ und dann $n = 2$ und $x = 0$. Die linken Seiten der so entstehenden Gleichungen ergeben die Werte $\varphi_1(\omega)$ und $\varphi_2(0)$, die rechten Seiten stimmen überein. Also ist für beliebiges m

$$(\gamma) \qquad \varphi_1(\omega) = \varphi_2(0)$$

Die Funktion $\varphi(t)$ verläuft also im Punkte $t = 2\omega$ stetig für beliebige m. Wir untersuchen die Stetigkeit der Ableitungen. Wir differenzieren wiederum (7) nach x:

$$\begin{aligned} \varphi_n'(x) = &- \varphi_{n-1}(x)\, p'(\omega) - \varphi_n(x)\, p'(0) - \\ &- \int_x^\omega p''(x+\omega-y)\, \varphi_{n-1}(y)\, dy \\ &- \int_0^x p''(x-y)\, \varphi_n(y)\, dy \end{aligned}$$

Setzen wir wiederum zuerst $n = 1$ und $x = \omega$ und dann $n = 2$ und $x = 0$ und subtrahieren die zwei Gleichungen voneinander, so finden wir:

$$\begin{aligned} \varphi_1'(\omega) - \varphi_2'(0) = &- p'(\omega)\, [\varphi_0(\omega) - \varphi_1(0)] - \\ &- p'(0)\, [\varphi_1(\omega) - \varphi_2(0)] \end{aligned}$$

Stetigkeit ist dann vorhanden, wenn die rechte Seite dieser Gleichung null ist. Das zweite Glied ist nach (γ) null, das erste ist für $m = 1$ nach (I), und weil dann $p'(\omega) \neq 0$ ist, nicht null, dagegen für $m > 1$. Unser Resultat lautet daher in Gleichungsform:

$$(\delta) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_1'(\omega) \neq \varphi_2'(0) & \text{für } m = 1 \\ \varphi_1'(\omega) = \varphi_2'(0) & \text{für } m > 1 \end{array} \right\}$$

So weiterfahrend können wir die Stetigkeit der zweiten und der höhern Ableitungen diskutieren. Wir finden allgemein:

$$(\text{II}) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_1^{(\nu)}(\omega) \neq \varphi_2^{(\nu)}(0) & \text{für } m = \nu \\ \varphi_1^{(\nu)}(\omega) = \varphi_2^{(\nu)}(0) & \text{für } m > \nu \end{array} \right\}$$

3. In genau gleicher Weise würde für den Übergangspunkt vom zweiten zum dritten Intervall ($t = 3\omega$) die Beziehung resultieren:

$$(\text{III}) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_2^{(\nu)}(\omega) \neq \varphi_3^{(\nu)}(0) & \text{für } m = \nu - 1 \\ \varphi_2^{(\nu)}(\omega) = \varphi_3^{(\nu)}(0) & \text{für } m > \nu - 1 \end{array} \right\}$$

4. In analoger Weise gilt allgemein für die Stetigkeit der Erneuerungsfunktion und ihrer Ableitungen in den Punkten $t = n\omega$:

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_{n-1}^{(\nu)}(\omega) \neq \varphi_n^{(\nu)}(0) & \text{für } m = \nu - n + 2 \\ \varphi_{n-1}^{(\nu)}(\omega) = \varphi_n^{(\nu)}(0) & \text{für } m > \nu - n + 2 \end{array} \right\}$$

Die Bedingung für Stetigkeit von $\varphi(t)$ im Punkte $t = n\omega$ lautet, anders ausgedrückt, auch

$$\nu < m + n - 2.$$

Wir können demnach das Schlussresultat dieses Abschnitts wie folgt zusammenfassen: Ist das Absterbegesetz eine Parabel m-ten Grades $p(t) = \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^m$, so haben im Punkte $t = n\omega$ die $(m + n - 2)$-te und alle höhern Ableitungen der Erneuerungsfunktion eine Unstetigkeitsstelle, für $m = 1$ also bei $t = \omega$ $(n = 1)$ die Erneuerungsfunktion selber.

6. Beharrungszustand.

Es ist bekannt, dass nach einer genügend grossen Zeitspanne, d. h. im Beharrungszustand, die Erneuerungsfunktion zu einer Konstanten wird. Trägt man dieser Tatsache Rechnung und bezeichnet man die Erneuerungsfunktion im Beharrungszustand mit φ, so findet man aus (6):

$$\varphi = \frac{1}{\int\limits_x^\omega p(\omega + x - y)\, dy + \int\limits_0^x p(x - y)\, dy}$$

Die Substitution $\omega + x - y = z$ für das erste und $x - y = z$ für das zweite Integral liefern die Beziehung

$$\varphi = \frac{1}{\int\limits_0^\omega p(z)\, dz} = \frac{m+1}{\omega} \tag{12}$$

7. Spezialfall $m = 1$ (Hypothese von Moivre).

Nach (9) hat unsere Erneuerungsfunktion die Form

$$\varphi_n(x) = e^{\alpha x} \sum_0^n {}_nA_\nu\, x^\nu$$

Aus (4) folgt $\alpha = \frac{1}{\omega}$. Zur Bestimmung der ${}_nA_\nu$ gehen wir von Gleichung (8) aus:

$$\varphi_n'(x) - \frac{1}{\omega}\,\varphi_n(x) + \frac{1}{\omega}\,\varphi_{n-1}(x) = 0$$

$$\varphi_n(x) = e^{\frac{x}{\omega}}\left[K - \frac{1}{\omega}\int \varphi_{n-1}(x)\, e^{-\frac{x}{\omega}}\, dx\right]$$

Hieraus folgt für $n = 0, 1, 2 \ldots n$ sukzessive:

$$(13)\qquad \begin{cases} \varphi_0(x) = e^{\frac{x}{\omega}} K_0 \\ \varphi_1(x) = e^{\frac{x}{\omega}}\left[K_1 - \frac{x}{\omega} K_0\right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x) = e^{\frac{x}{\omega}} \sum\limits_{0}^{n}{}_{\nu} \frac{K_{n-\nu}}{\nu!}\left(-\frac{x}{\omega}\right)^{\nu} \end{cases}$$

Zur Bestimmung der Konstanten setzen wir $x = 0$. Wir finden

$$K_n = \varphi_n(0)$$

Aus (2) folgt für $n = 0$

$$K_0 = \varphi_0(0) = -p'(0) = \frac{1}{\omega}$$

Setzen wir den für $\varphi_0(x)$ nunmehr gefundenen Wert $\frac{1}{\omega}\, e^{\frac{x}{\omega}}$ in (7) ein, so folgt daraus

$$K_1 = \varphi_1(0) = \frac{1}{\omega}\,(e-1) = 1{,}7183\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

In gleicher Weise könnten die höhern K_ν berechnet werden. Wir bedienen uns jedoch der Überlegung, dass für $n > 1$ $\varphi_{n-1}(\omega) = \varphi_n(0)$ sein muss. Wir haben den Beweis für die Richtigkeit dieser Tatsache im 5. Abschnitt erbracht. Wir erhalten:

$$K_2 = \left(\frac{1}{\omega}\right) e\,(e-2) = 1{,}9524 \left(\frac{1}{\omega}\right)$$

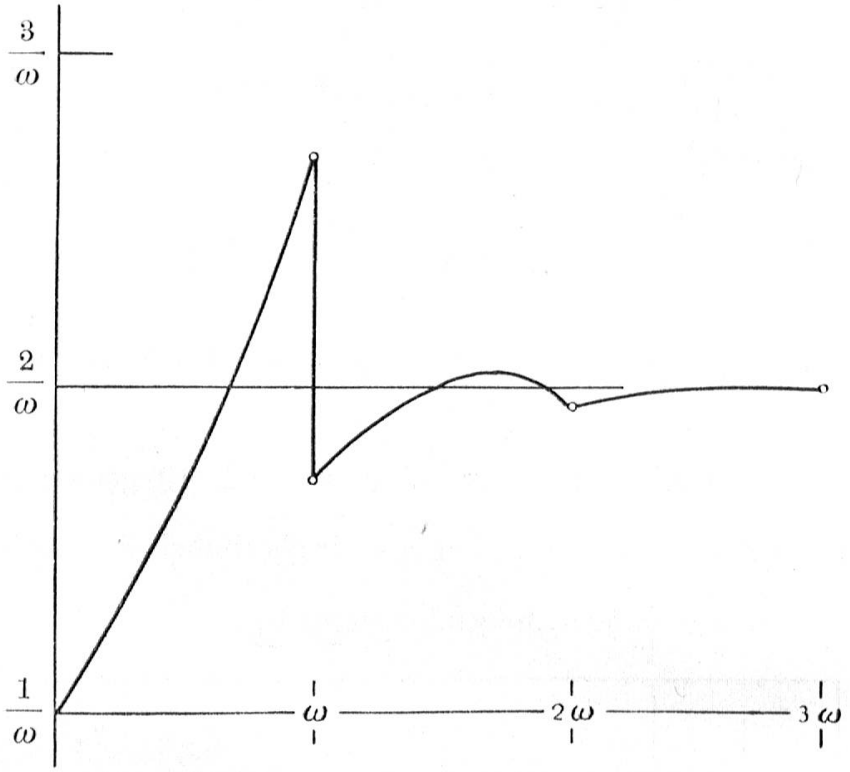
$$K_3 = \left(\frac{1}{\omega}\right) e \left(e^2 - 3e + \frac{3}{2}\right) = 1{,}9958 \left(\frac{1}{\omega}\right)$$

$$K_4 = \left(\frac{1}{\omega}\right) e \left((e^3 - 4e^2 + 4e - \frac{2}{3}\right) = 1{,}9998 \left(\frac{1}{\omega}\right)$$

Die Erneuerungsfunktion nimmt nach (13) gemessen in Vielfachen der Zahl $\left(\frac{1}{\omega}\right)$, die wir als Einheit der Ordinatenachse wählen, folgende Werte an:

x	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
0	1,000	1,718	1,952	1,996
$\frac{\omega}{4}$	1,284	1,885	1,996	2,002
$\frac{2\omega}{4}$	1,649	2,009	2,009	2,001
$\frac{3\omega}{4}$	2,117	2,050	2,000	1,999
ω	2,718	1,952	1,996	2,001

Im Beharrungszustand strebt $\varphi(x)$, wie aus (12) und ebenso aus der vorhergehenden Tabelle hervorgeht, dem Wert $\left(\frac{2}{\omega}\right)$ zu.



Das durchgerechnete Beispiel zeigt in sehr deutlicher Weise den charakteristischen Verlauf der Erneuerungsfunktion, die sich in gedämpfter Schwingung schliesslich einem konstanten Wert nähert. Die Abweichungen vom Beharrungszustand sind schon bald nach der Zeit ω, d. h. dem Ausscheiden der Ursprungsgeneration aus dem Bestand, nicht mehr bedeutend. Sie betragen nach

0	ω	2ω	3ω	4ω	Jahren
50	14,1	2,4	0,2	0,05	Prozente

der Erneuerung im Beharrungszustand.

8. Zusammenfassung.

Diese Untersuchungen über den Verlauf der Erneuerungsfunktion bei Annahme einer Parabel m-ten Grades als Sterbegesetz sind für die Versicherungsrechnung nicht praktisch verwertbar, weil das verwendete Sterbegesetz wirklichen Verhältnissen nur sehr annäherungsweise gerecht wird und ausserdem die Bestimmung der in (9) oder (10) auftretenden Konstanten α, A und B sehr kompliziert ist. Die Ergebnisse sind jedoch theoretisch interessant, indem durch das Auftreten von trigonometrischen Funktionen in (10) der Wellencharakter der Erneuerungsfunktion deutlich zutage tritt und das einfachst mögliche und im vorhergehenden durchgerechnete Beispiel $m = 1$ alle charakteristischen Merkmale der Erneuerungsfunktion aufdeckt [1]). Vom rein mathematischen Standpunkt bieten die vorliegenden Ausführungen auch ein gewisses Interesse, indem sie die Lösung zweier *Volterra*'scher Integralgleichungen durch Umwandlung in Differentialgleichungen untersuchen und eine auch mathematisch nicht uninteressante Funktion, die durch (1) und (6) definierte Funktion $\varphi(t)$ beschreiben.

Für $m = 2$ erhielte man mittelst der angegebenen Rechenmethode für die beiden ersten Intervalle für die Erneuerungsfunktion die Ausdrücke:

$$\varphi_0(x) = \frac{2}{\omega}\, e^{\frac{x}{\omega}} \cos\left(\frac{x}{\omega}\right)$$

$$\varphi_1(x) = \frac{2}{\omega}\, e^{\frac{x}{\omega}} \cos\left(\frac{x}{\omega}\right)\left\{e \cdot \cos(1) - [e \cdot \sin(1) - 1]\left(\frac{x}{\omega}\right)\right\}$$

---

[1]) Die Funktion $\varphi(t)$ unserer Ausgangsgleichung ist immer dann eine gedämpfte Schwingung oder eine Konstante, wenn die Funktion $p(t)$ den Charakter eines Sterbegesetzes hat, also immer abnimmt und nie negativ wird.

Literatur.

Herbelot: Application d'un théorème d'analyse. Bull. trim. de l'inst. des act. fr. Tome 19, 1909.

Risser: Sur une application d'une équation fonctionnelle à un problème d'assurance. Bull. trim. Tome 22, 1912.

Zwinggi: Problem der Erneuerung. Festgabe Moser, Stämpfli, Bern 1931.