Die Interpolation von Rentenbarwerten

Die Interpolation von Rentenbarwerten

Von Dr. *P. Güttinger,* Basel

Wie oft steht man bei Untersuchungen [1]) vor der Aufgabe, rasch einen Rentenbarwert für irgendeinen Zinsfuss zu bestimmen? Entweder sind dann für die in Frage kommende Sterbetafel die Barwerte nur für einen Zinsfuss, z. B. für $3\frac{1}{2}$ % gegeben oder für zwei oder mehrere andere Zinsfüsse. Wenn man nun rasch zwischen den Werten zweier gegebener Zinsfüsse interpolieren soll, liegt die Benützung der linearen Interpolation am nächsten, obwohl man weiss, dass die sich dabei ergebenden Werte nur eine grobe Approximation darstellen. In vielen Fällen genügt diese, es kann aber auch vorkommen, dass man doch eine genauere Methode zur Hand haben sollte, welche z. B. die Barwerte bis zur 2. oder 3. Dezimale genau berechnen lässt. Meist hat man jedoch im Moment gar keine Zeit, eine solche Methode zu finden. Deshalb sei im folgenden eine Formel entwickelt, die in sehr kurzer Zeit eine in den meisten Fällen ausreichend genügende Interpolation gestattet.

Als «Stützpunkte» seien die Barwerte für zwei Zinsfüsse i_1 und i_2 bekannt. Um nun einen Barwert für einen andern Zinssatz i zu berechnen, liefert die lineare Interpolation den Wert

$$a_x(i) = \beta\, a_x(i_1) + \alpha \cdot a_x(i_2), \tag{1}$$

wenn wir mit α den Ausdruck

$$\frac{i - i_1}{i_2 - i_1}$$

[1]) Wegen dem Sinken des Zinsfusses entschloss sich die «Patria», ihre Rententarife bei sonst genau gleichen technischen Grundlagen mit einem um $\frac{1}{2}$% tieferen Zinsfuss zu rechnen. Die Lösung der mir gestellten Aufgabe führte mich zu der vorliegenden Arbeit, da die Werte für zwei verschiedene Zinsfüsse bereits vorhanden waren.

und mit β den Ausdruck

$$\frac{i_2 - i}{i_2 - i_1}$$

bezeichnen, wobei $i_2 > i_1$ und $\alpha + \beta = 1$.

Um nun die Fehler, die dieser Approximation (1) noch anhaften, zu korrigieren, gehen wir von einer Formel aus, welche in der Theorie des Zinsfussproblems eine gewisse Rolle spielt; es handelt sich dabei um die Formel von *Poukka*. Diese lautet:

$$a_x(i') = a_x(i) \left[1 - \frac{(i'-i) \frac{S_{x+1}}{N_{x+1}} v}{1 + (i'-i) \frac{S_{x+1}}{N_{x+1}} 0{,}84 \cdot v} \right]$$

Diese Formel leistet für den Fall, wo nur Barwerte für einen einzigen Zinsfuss i vorliegen, sehr gute Dienste und liefert praktisch ausreichend genaue Werte. Allerdings müssen dabei die Kommutationswerte S_x vorhanden sein.

Wir können nun mit Hilfe dieser vorzüglichen Formel von *Poukka* eine sehr einfache Interpolationsformel erhalten, wie die folgende Ableitung zeigen soll.

Wenn wir abkürzungsweise die Bezeichnung

$$\eta = (i_2 - i_1) \frac{S_{x+1}}{N_{x+1}} \cdot v$$

einführen, erhalten wir — diesmal ausgehend vom Zinsfuss i —

$$(2\,a) \qquad a(i_1) = a(i) \left\{ 1 + \frac{\alpha \cdot \eta}{1 - 0{,}84 \cdot \alpha \cdot \eta} \right\}$$

und

$$(2\,b) \qquad a(i_2) = a(i) \left\{ 1 - \frac{\beta \cdot \eta}{1 + 0{,}84 \cdot \beta \cdot \eta} \right\}$$

In diesen beiden Gleichungen betrachten wir nun die Grössen $a(i)$ und η als Unbekannte. Es ist also möglich, die uns nicht interessierende Grösse η zu eliminieren.

Um zunächst η zu bestimmen, dividieren wir Gleichung $2\,a$ durch Gleichung $2\,b$ und erhalten so

$$a(i_1)\,\{1 - 0{,}84 \cdot \alpha \cdot \eta - 0{,}16 \cdot \beta\,\eta + 0{,}16 \cdot 0{,}84\,\alpha\,\beta\,\eta^2\} =$$
$$= a(i_2)\,\{1 + 0{,}84 \cdot \beta\,\eta + 0{,}16\,\alpha\,\eta + 0{,}16 \cdot\ 0{,}84\,\alpha\,\beta\,\eta^2\}$$

Da nun η eine «kleine» Grösse ist, wollen wir nur die erste Potenz von η berücksichtigen und alle Glieder höherer Ordnung vernachlässigen. Damit findet man für η den Wert:

$$\eta = \frac{a(i_1) - a(i_2)}{[0{,}84\,\alpha + 0{,}16\,\beta]\;a(i_1) + [0{,}84\,\beta + 0{,}16\,\alpha]\;a(i_2)}$$

Die numerische Auswertung dieser Formel hat gezeigt, dass in den praktisch vorkommenden Fällen, wo i_1 und i_2 und somit die Barwerte $a(i_1)$ und $a(i_2)$ nicht weit auseinander liegen, in guter Annäherung gesetzt werden kann:

$$\eta \sim \frac{a(i_1) - a(i_2)}{\beta\,a(i_1) + \alpha\,a(i_2)} \tag{3}$$

Aus Gleichung $2\,a$ und $2\,b$ lässt sich ferner leicht die gewünschte Interpolationsformel ableiten, wenn man die Gleichung

$$a(i_1)\,\{1 - 0{,}84 \cdot \alpha \cdot \eta\} = a(i)\,\{1 + 0{,}16 \cdot \alpha \cdot \eta\} \quad \text{mit } \beta$$

und die Gleichung

$$a(i_2)\,\{1 + 0{,}84 \cdot \beta\eta\} = a(i)\,\{1 - 0{,}16\beta\eta\} \quad \text{mit } \alpha \text{ multipliziert.}$$

Durch Addition erhält man dann

$$a(i) = \{\beta\,a(i_1) + \alpha\,a(i_2)\} - 0{,}84 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \eta\,\{a(i_1) - a(i_2)\} \tag{4}$$

Setzen wir nun den Wert (3) für η ein, so erhalten wir die gewünschte Interpolationsformel, welche den Genauigkeitsfehler, der in der linearen Interpolation steckt, in erster Näherung berücksichtigt:

$$a(i) = \{\beta\,a(i_1) + \alpha\,a(i_2)\} - 0{,}84 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \frac{\{a(i_1) - a(i_2)\}^2}{\{\beta\,a(i_1) + \alpha \cdot a(i_2)\}} \tag{5}$$

Für den besondern Fall, dass i in der Mitte zwischen i_1 und i_2 liegt, nimmt Gleichung (5) die besonders einfache Form an:

(6)
$$a(i) = \left\{\frac{1}{2}\, a(i-\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{2}\, a(i+\tfrac{1}{2})\right\} - 0{,}21 \cdot \frac{\{a(i-\tfrac{1}{2}) - a(i+\tfrac{1}{2})\}^2}{\left\{\frac{1}{2}\, a(i-\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{2}\, a(i+\tfrac{1}{2})\right\}}$$

Um zu einer gedrängten Form von Gleichung (5) zu kommen, bezeichnen wir abkürzungsweise den Wert, der durch lineare Interpolation entsteht, mit

$$L = \{\beta\, a(i_1) + \alpha \cdot a(i_2)\}$$

und die Differenz

$$a(i_1) - a(i_2) \quad \text{mit } \Delta.$$

Mit diesen Abkürzungen erhalten wir für Gleichung (5) die kurze Darstellung:

(7)
$$a(i) = L - 0{,}84 \cdot \alpha\,(1-\alpha) \cdot \frac{\Delta^2}{L}$$

Es ist nicht daran zu zweifeln, dass diese Formel eine sehr rasche Erledigung der Interpolationsaufgabe ermöglicht und zudem hinreichend genaue Werte ergibt, wie die nachfolgenden Beispiele beweisen.

Da wir in der Lebensversicherungspraxis jedoch mehr mit temporären Rentenbarwerten zu rechnen haben, stellt sich die Frage, ob auch für diese abgekürzten Barwerte eine ähnliche analoge Interpolationsformel abgeleitet werden kann. Leider ist es nicht möglich, auch hier durch eine *algebraische Ableitung* eine einigermassen einfache und praktisch brauchbare Lösung zu finden. Der Verfasser dieses Artikels hat jedoch anhand vieler Beispiele untersucht, ob eventuell die für lebenslängliche Barwerte geltende Interpolationsformel auch für temporäre Renten verwendet werden kann. Diese numerischen Beispiele zeigten nun, dass die Formel (5) *sowohl für lebenslängliche als auch für temporäre Rentenbarwerte* genaue Resultate ergibt, was auch aus den nachstehenden Beispielen klar hervorgeht. Diese verallgemeinerte Formel lautet demgemäss:

Beispiele

Sterbetafel	Barwert	Ausgangswerte				Gesuchter Wert für Zinsfuss i	1. Näherung (linear)	n. Formel ($^8/_9$)	Genauer Wert
		i_1	Barwert	i_2	Barwert				
SM 1901—1910	$a_{30:\overline{30}\rceil}$	$3\frac{1}{2}$ %	16,980	$4\frac{1}{2}$ %	15,309	4 %	16,145	16,107	16,109
SM 1901—1910	$a_{20:\overline{40}\rceil}$	4 %	18,538	5 %	16,391	$4\frac{1}{2}$ %	17,465	17,407	17,408
SM 1901—1910	a_{40}	$3\frac{1}{2}$ %	15,606	5 %	13,131	$4\frac{1}{2}$ %	13,956	13,874	13,879
SM 1921—1930	$a_{10:\overline{40}\rceil}$	$3\frac{1}{2}$ %	21,083	$4\frac{1}{2}$ %	18,428	4 %	19,756	19,677	19,682
SM 1921—1930	$a_{20:\overline{10}\rceil}$	4 %	8,301	$4\frac{1}{2}$ %	8,138	$3\frac{1}{2}$ %	8,464	8,469	8,469
SM 1921—1930	a_{20}	$3\frac{1}{2}$ %	22,331	$4\frac{1}{2}$ %	19,122	4 %	20,727	20,617	20,617
SF 1929—1932	$a_{20:\overline{15}\rceil}$	$3\frac{1}{2}$ %	11,661	$4\frac{1}{2}$ %	10,985	4 %	11,323	11,315	11,315
SF 1929—1932	$a_{30:\overline{40}\rceil}$	$3\frac{1}{2}$ %	20,144	$4\frac{1}{2}$ %	17,700	4 %	18,922	18,852	18,856
SF 1929—1932	a_{50}	$3\frac{1}{2}$ %	14,595	$4\frac{1}{2}$ %	13,125	4 %	13,860	13,827	13,829
$0^{(af)}$ 1893	$a_{(50)}$	$3\frac{1}{2}$ %	14,647	5 %	12,470	$4\frac{1}{2}$ %	13,196	13,130	13,132
$0^{(af)}$ 1893	a_{60}	3 %	11,902	4 %	10,892	$3\frac{1}{2}$ %	11,397	11,378	11,378
Zeitrente	$a_{\overline{30}\rceil}$	$3\frac{3}{4}$ %	18,498	$4\frac{1}{2}$ %	17,022	$4\frac{1}{4}$ %	17,514	17,490	17,492

(8)
$$a_{x:\overline{n}|}(i) = \{\beta\, a_{x:\overline{n}|}(i_1) + \alpha\, a_{x:\overline{n}|}(i_2)\}$$
$$- 0{,}84 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \frac{\{a_{x:\overline{n}|}(i_1) - a_{x:\overline{n}|}(i_2)\}^2}{\{\beta\, a_{x:\overline{n}|}(i_1) + \alpha \cdot a_{x:\overline{n}|}(i_2)\}}$$

wobei
$$\alpha = \frac{i - i_1}{i_2 - i_1}$$

und
$$\beta = 1 - \alpha = \frac{i_2 - i}{i_2 - i_1}$$

Für die vorschüssigen Barwerte kann man in ähnlicher Weise die Formel: (Auch diese ist jedoch nur als Approximation anzusehen!)

(9)
$$\mathsf{a}_{x:\overline{n}|}(i) = \{\beta\, \mathsf{a}_{x:\overline{n}|}(i_1) + \alpha \cdot \mathsf{a}_{x:\overline{n}|}(i_2)\}$$
$$- 0{,}84 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \frac{\{\mathsf{a}_{x:\overline{n}|}(i_1) - \mathsf{a}_{x:\overline{n}|}(i_2)\}^2}{\{\beta\, \mathsf{a}_{x:\overline{n}|}(i_1) + \alpha\, \mathsf{a}_{x:\overline{n}|}(i_2) - 1\}}$$

benützen.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass diese Formeln auch für *Zeitrentenbarwerte* verwendet werden können.