Bemerkungen zum Erneuerungsproblem

Autor(en): **Zwinggi, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **36 (1938)**

PDF erstellt am: **15.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966767

Bemerkungen zum Erneuerungsproblem

Von P. D. Dr. *E. Zwinggi*, Basel

I.

In einer Personengesamtheit, deren Umfang unveränderlich angenommen sei, scheiden die einzelnen Personen nach Massgabe der Ausscheideintensität $\varrho(t)$ endgültig aus. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person nach t Jahren dem Bestande noch angehört, sei $p(t)$, mit $p(t) = e^{-\int_0^t \varrho(\tau)\, d\tau}$. Innerhalb der beiden Grenzwerte $p(0) = 1$ und $p(\infty) = 0$ kann $p(t)$ mit wachsendem t nie zunehmen.

Zwischen der Erneuerungsfunktion $\varphi(t)$, der Wahrscheinlichkeit $p(t)$ und der Ausscheideintensität $\varrho(t)$ bestehen die beiden bekannten Beziehungen

$$1 = p(t) + \int_0^t \varphi(\tau)\, p(t-\tau)\, d\tau, \tag{1}$$

$$\varphi(t) = p(t)\, \varrho(t) + \int_0^t \varphi(\tau)\, p(t-\tau)\, \varrho(t-\tau)\, d\tau. \tag{2}$$

II.

Im 34. Heft (1937) dieser «Mitteilungen» bestimmt *Hadwiger* [1]) die Erneuerungsfunktion $\varphi(t)$ unter der Voraussetzung, dass

$$p(t) = e^{-\lambda t}(1 + \lambda t) \qquad (\lambda > 0); \tag{3}$$

die Lösung für $\varphi(t)$ lautet dann

---

[1]) Zur Berechnung der Erneuerungsfunktion nach einer Formel von V. A. Kostitzin.

$$\varphi(t) = \frac{\lambda}{2}\left(1 - e^{-2\lambda t}\right). \tag{4}$$

Wir wollen in diesen kurzen Bemerkungen zeigen, wie der von *Hadwiger* untersuchte besondere Fall auch aus einer von *Fock* [1]) aufgestellten allgemeinen Formel hervorgeht.

In Beziehung (2) setzen wir voraus, $p(t)\,\varrho(t)$ lasse sich wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}(5)\quad p(t)\,\varrho(t) = &\left[a(0,1) + a(1,1)\,t + \frac{a(2,1)}{2!}\,t^2 + \dots \frac{a(m_1,1)}{m_1!}\,t^{m_1}\right] e^{\gamma_1} \\ &+ \left[a(0,2) + a(1,2)\,t + \frac{a(2,2)}{2!}\,t^2 + \dots \frac{a(m_2,2)}{m_2!}\,t^{m_2}\right] e^{\gamma_2 t} + \dots \\ &+ \left[a(0,r) + a(1,r)\,t + \frac{a(2,r)}{2!}\,t^2 + \dots \frac{a(m_r,r)}{m_r!}\,t^{m_r}\right] e^{\gamma_r t}.\end{aligned}$$

Zuerst ist der Ausdruck zu bilden:

$$\begin{aligned}(6)\quad k(z) = &\frac{a(0,1)}{z-\gamma_1} + \frac{a(1,1)}{(z-\gamma_1)^2} + \dots \frac{a(m_1,1)}{(z-\gamma_1)^{m_1+1}} \\ &+ \frac{a(0,2)}{z-\gamma_2} + \frac{a(1,2)}{(z-\gamma_2)^2} + \dots \frac{a(m_2,2)}{(z-\gamma_2)^{m_2+1}} + \dots \\ &+ \frac{a(0,r)}{z-\gamma_r} + \frac{a(1,r)}{(z-\gamma_r)^2} + \dots \frac{a(m_r,r)}{(z-\gamma_r)^{m_r+1}}.\end{aligned}$$

Daran anschliessend folgt die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{k(z)}{1-k(z)}$$

[1]) Über eine Klasse von Integralgleichungen — Mathematische Zeitschrift, Band 21, Berlin 1924. — Auf diese Arbeit wurde ich in freundlicher Weise von Herrn Prof. Dr. *A. Ostrowski* in Basel aufmerksam gemacht.

$$\frac{k(z)}{1-k(z)} = \frac{b(0,1)}{z-\beta_1} + \frac{b(1,1)}{(z-\beta_1)^2} + \dots \frac{b(n_1,1)}{(z-\beta_1)^{n_1+1}} \tag{7}$$

$$+ \frac{b(0,2)}{z-\beta_2} + \frac{b(1,2)}{(z-\beta_2)^2} + \dots \frac{b(n_2,2)}{(z-\beta_2)^{n_2+1}} + \dots$$

$$+ \frac{b(0,s)}{z-\beta_s} + \frac{b(1,s)}{(z-\beta_s)^2} + \dots \frac{b(n_s,s)}{(z-\beta_s)^{n_s+1}}.$$

Die Lösung der Integralgleichung für die Erneuerung lautet dann:

$$\varphi(t) = \left[b(0,1) + b(1,1)\,t + \dots \frac{b(n_1,1)}{n_1!} t^{n_1}\right] e^{\beta_1 t} \tag{8}$$

$$+ \left[b(0,2) + b(1,2)\,t + \dots \frac{b(n_2,2)}{n_2!} t^{n_2}\right] e^{\beta_2 t} + \dots$$

$$+ \left[b(0,s) + b(1,s)\,t + \dots \frac{b(n_s,s)}{n_s!} t^{n_s}\right] e^{\beta_s t}.$$

III.

Die Anwendung auf den vorliegenden besondern Fall geschieht wie folgt. Aus

$$p(t) = e^{-\lambda t}(1 + \lambda t)$$

folgt

$$-p'(t) = p(t)\,\varrho(t) = \lambda^2 e^{-\lambda t}\, t.$$

Die Koeffizienten in (5) werden

$$a(0,1) = 0,$$

$$a(1,1) = \lambda^2;$$

ferner ist $\gamma_1 = -\lambda$.

Diese Werte in (6) eingesetzt, ergeben

$$k(z) = \frac{\lambda^2}{(z+\lambda)^2}.$$

Aus der Partialbruchzerlegung $\frac{k(z)}{1-k(z)} = \frac{\lambda^2}{z^2+2\lambda z}$ $= \frac{\lambda}{2}\frac{1}{z} - \frac{\lambda}{2}\frac{1}{z+2\lambda}$ folgt, dass

$$b(0,1) = \frac{\lambda}{2}, \qquad \beta_1 = 0,$$

$$b(0,2) = \frac{-\lambda}{2}, \quad \beta_2 = -2\lambda.$$

Diese Lösung für $\varphi(t)$ nimmt dann nach (8) die Gestalt an

$$\varphi(t) = \frac{\lambda}{2}(1 - e^{-2\lambda t}).$$

IV.

Die Voraussetzung (5) kann noch anders geschrieben werden. Da $p(t)\,\varrho(t) = -p'(t)$ ist, folgt durch Integration

(9) $$p(t) = P(m_1)\,e^{\gamma_1 t} + P(m_2)\,e^{\gamma_2 t} + \ldots P(m_r)\,e^{\gamma_r t},$$

wobei die $P(m_i)$ Polynome m_i^{ten} Grades sind. Für unsere Betrachtungen haben aber nur diejenigen Ausdrücke einen Sinn, für die stets $p(t) \geqslant p(t+\tau)$, $\tau > 0$ gilt. Diese Einschränkung muss man beachten, wenn aus (8) auf den Verlauf der Erneuerungsfunktion geschlossen werden soll. Jedenfalls zeigt aber Beziehung (8), dass nicht gefolgert werden darf, die Erneuerungsfunktion $\varphi(t)$ verfolge *stets* eine gedämpfte Wellenbewegung.

Abschliessend sei noch eine Bemerkung über eine andere Auflösungsmöglichkeit der Integralgleichung (2) angebracht. Gleichung (9) ist auch die Lösung einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, wobei die dazugehörende charakteristische Gleichung je $m_1 + 1$, $m_2 + 1$, $\ldots$ $m_r + 1$ zusammenfallende Wurzeln aufweist. Wir haben aber anderswo [1]) gezeigt, dass unter der Voraussetzung,

---

[1]) Das Problem der Erneuerung — Festgabe Moser, Bern 1931. Man braucht in den Ableitungen nur H_t = konstant zu setzen.

die Wahrscheinlichkeit $p(t)$ erfülle eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die *Integralgleichung* für die Erneuerungsfunktion $\varphi(t)$ in eine *Differentialgleichung* $(n-1)^{ster}$ Ordnung mit konstanten Koeffizienten umgeformt und als solche gelöst werden kann.