Recherches sur la détermination approximative du taux de rendement des emprunts à taux d'intérêt nominal variable

Autor(en): **Dasen, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **39 (1940)**

PDF erstellt am: **18.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966923

Recherches sur la détermination approximative du taux de rendement des emprunts à taux d'intérêt nominal variable

Par *E. Dasen*, Bâle

Il existe sur les marchés financiers quelques emprunts dont le taux d'intérêt nominal est variable, soit par suite d'une réorganisation financière, soit par suite du fait que le débiteur, tout en voulant bénéficier du bas taux du loyer de l'argent, ait voulu offrir au souscripteur d'un emprunt à long terme une compensation. A cette catégorie d'emprunts se rattachent par exemple les émissions suivantes:

Emprunt 3 %—3½ % Hollande de 1938,
Emprunt 4⅛ %—4⅜ % Province Buenos-Aires, 1977,
Emprunt 3½ %—4 % Confédération Suisse, Défense Nationale, 1940,
Emprunt 3 %—3¼ % Canton d'Argovie de 1938,
Emprunt 3 %—3¼ % Canton d'Appenzell Rh.-Ext. de 1938.

On ne possède pas de tables financières de cours et de rendement permettant de déterminer rapidement et sans longs calculs le taux de rendement de ces emprunts. Il ne serait d'ailleurs pas indiqué d'en calculer, étant donné que ce type d'emprunt n'est pas très fréquent. Mais comme dans la pratique des affaires financières, il est nécessaire de pouvoir déterminer très rapidement le taux de rendement, on peut donc se demander s'il n'y a pas une méthode permettant d'obtenir approximativement le taux de rendement des emprunts à taux d'intérêt nominal variable à l'aide des tables financières existantes. C'est la question que nous nous proposons d'examiner pour le cas des emprunts à taux d'intérêt nominal variable remboursables à échéance fixe.

I.

Considérons un emprunt de 1 nominal remboursable au pair dans $n_1 + n_2$, le taux d'intérêt nominal payable annuellement étant de

i_1 pendant les n_1 premières années et de

i_2 pendant les n_2 dernières années.

Le cours ou la valeur actuelle $K_{\overline{n_1+n_2|}}$ au taux de rendement i de cet emprunt se calcule par la formule:

$$(1) \qquad K_{\overline{n_1+n_2|}} = i_1\, a_{\overline{n_1|}} + i_2\, v^{n_1}\, a_{\overline{n_2|}} + v^{n_1+n_2}$$

La question qui se pose immédiatement est celle de savoir si l'on peut déterminer facilement ou sans de trop longs calculs un taux d'intérêt nominal constant i_0 qui nous permettrait de substituer à notre emprunt à taux d'intérêt nominal variable un emprunt ayant les mêmes caractéristiques, mais dont le taux d'intérêt nominal serait constant, étant donné que pour ce type d'emprunt on possède des tables financières de cours et de rendement. Nous pourrions alors déterminer le taux de rendement cherché par une simple interpolation linéaire par rapport au taux d'intérêt nominal.

Considérons la fonction i_0 suivante:

$$(2) \qquad i_0 = \frac{i_1\, a_{\overline{n_1|}} + i_2\, v^{n_1}\, a_{\overline{n_2|}}}{a_{\overline{n_1+n_2|}}}$$

qui exprime, comme on le voit facilement, le taux d'intérêt nominal constant de l'emprunt à échéance fixe $K^I_{\overline{n_1+n_2|}}$

$$(3) \qquad K^I_{\overline{n_1+n_2|}} = i_0\, a_{\overline{n_1+n_2|}} + v^{n_1+n_2}$$

qui nous donnerait

$$(4) \qquad K^I_{\overline{n_1+n_2|}} = K_{\overline{n_1+n_2|}}$$

Comme la plupart des fonctions actuarielles, la fonction $i_0(2)$ (dans la suite nous indiquerons toujours ainsi la fonction et le numéro de sa formule) est d'une forme si compliquée qu'il est très difficile d'en faire une étude purement analytique. Le moyen le plus pratique d'obtenir des renseignements sur cette fonction est d'utiliser le calcul numérique.

Prise comme fonction de i uniquement, $i_0(2)$ varie très lentement, comme on peut le constater en examinant le tableau numérique ci-après:

Tableau I.

n_1	n_2	$100i$	$100i_0(2)$	
			$100i_1 = 3.25$ $100i_2 = 3.50$	$100i_1 = 3.25$ $100i_2 = 4.25$
10	15	3.375	3.374	3.749
10	15	3.50	3.373	3.745
10	15	3.75	3.371	3.738
10	15	5.00	3.363	3.702
5	15	3.375	3.421	3.934
5	15	3.50	3.420	3.932
5	15	3.75	3.419	3.927
5	15	5.00	3.413	3.902
2	15	3.375	3.462	4.101
2	15	3.50	3.462	4.099
2	15	3.75	3.461	4.097
2	15	5.00	3.458	4.085

C'est la constatation de cette quasi indépendance de $i_0(2)$ par rapport à i qui nous autorise à penser qu'il nous sera possible de trouver une formule approchée pour $i_0(2)$ qui ne dépende que de n_1, n_2, i_1 et i_2.

Ecrivons la formule (2) sous la forme suivante:

$$i_0 = \frac{i_1\,(1 - v^{n_1}) + i_2\,v^{n_1} - i_2\,v^{n_1+n_2}}{1 - v^{n_1+n_2}} \tag{5}$$

Remplaçons maintenant la fonction v^k par les 2 premiers termes de son développement suivant la formule du binôme:

$$v^k = 1 - k\,i \tag{6}$$

Après quelques calculs de simplification, on obtient pour i_0 une valeur approchée i_0' de forme très simple:

$$i_0' = \frac{n_1\,i_1 + n_2\,i_2}{n_1 + n_2} \tag{7}$$

Comme on pouvait presque s'y attendre, cette valeur approchée se présente comme une moyenne arithmétique pondérée. Afin de se rendre compte de l'approximation de $i_0(2)$ par $i_0'(7)$ rapprochons en un tableau numérique les valeurs de ces deux fonctions.

Tableau II.

n_1	n_2	$100\,i$	$100\,i_1 = 3.25$ $100\,i_2 = 3.50$		$100\,i_1 = 3.25$ $100\,i_2 = 3.75$		$100\,i_1 = 3.25$ $100\,i_2 = 4.25$	
			$100\,i_0(2)$	$100\,i_0'(7)$	$100\,i_0(2)$	$100\,i_0'(7)$	$100\,i_0(2)$	$100\,i_0'(7)$
15	15	3.375	3.34	3.37	3.44	3.50	3.63	3.75
15	15	3.50	3.34	3.37	3.44	3.50	3.62	3.75
15	15	3.75	3.34	3.37	3.43	3.50	3.62	3.75
15	15	5.00	3.33	3.37	3.41	3.50	3.57	3.75
10	15	3.375	3.37	3.40	3.50	3.55	3.75	3.85
10	15	3.50	3.37	3.40	3.50	3.55	3.75	3.85
10	15	3.75	3.37	3.40	3.49	3.55	3.74	3.85
10	15	5.00	3.36	3.40	3.48	3.55	3.70	3.85
5	15	3.375	3.42	3.43	3.59	3.62	3.93	4.00
5	15	3.50	3.42	3.43	3.59	3.62	3.93	4.00
5	15	3.75	3.42	3.43	3.59	3.62	3.92	4.00
5	15	5.00	3.41	3.43	3.58	3.62	3.90	4.00
2	15	3.375	3.46	3.47	3.68	3.69	4.10	4.13
2	15	3.50	3.46	3.47	3.67	3.69	4.10	4.13
2	15	3.75	3.46	3.47	3.67	3.69	4.10	4.13
2	15	5.00	3.46	3.47	3.66	3.69	4.09	4.13

L'examen des résultats contenus dans le tableau II nous indique que les taux de rendement que nous obtiendrons seront un peu trop élevés et que si $100\,|\,i_2 - i_1\,| > \frac{1}{2}$, les résultats ne seront certainement pas acceptables.

Dans le tableau ci-après, nous indiquons le taux de rendement exact i et le taux de rendement approché i' obtenu en prenant un taux d'intérêt nominal constant déterminé par la formule (7) pour un emprunt à échéance fixe dont les coupons sont semestriels. Les cours $K^{(2)}_{\overline{n_1+n_2|}}$ du dit emprunt sont donnés par la formule

(8) $$K^{(2)}_{\overline{n_1+n_2}|} = i_1(1+\varepsilon)\, a_{\overline{n_1}|} + i_2\,(1+\varepsilon)\, v^{n_1}\, a_{\overline{n_2}|} + v^{n_1+n_2}$$

Tableau III. $100\, i_1 = 3.25$ $100\, i_2 = 3.75$

n_1	n_2	$100\, K^{(2)}_{\overline{n_1+n_2}|}$	$100\, i'_0$ (7)	$100\, i$	$100\, i'$ [1]
25	25	111.24	3.50	3.00	3.08
20	25	111.58	3.52	3.00	3.07
15	25	111.97	3.56	3.00	3.06
10	25	112.42	3.60	3.00	3.04
5	25	112.94	3.66	3.00	3.03
25	25	98.31	3.50	3.50	3.60
20	25	99.19	3.52	3.50	3.58
15	25	100.22	3.56	3.50	3.57
10	25	101.46	3.60	3.50	3.56
5	25	102.92	3.66	3.50	3.53
25	25	87.54	3.50	4.00	4.13
20	25	88.73	3.52	4.00	4.10
15	25	90.17	3.56	4.00	4.10
10	25	91.93	3.60	4.00	4.07
5	25	94.07	3.66	4.00	4.04
25	25	78.50	3.50	4.50	4.66
20	25	79.85	3.52	4.50	4.63
15	25	81.54	3.56	4.50	4.61
10	25	83.63	3.60	4.50	4.58
5	25	86.24	3.66	4.50	4.54
25	25	70.89	3.50	5.00	5.19
20	25	72.30	3.52	5.00	5.15
15	25	74.09	3.56	5.00	5.12
10	25	76.38	3.60	5.00	5.10
5	25	79.30	3.66	5.00	5.06

[1] Chiffres obtenus par interpolation linéaire en utilisant l'ouvrage Huss & Hagström, «Bond Values», Stockholm 1929, et son supplément de 1934.

Comme on peut le constater, l'utilisation de cette méthode approximative nous conduit à des résultats qui, d'une manière générale, ne sont pas très satisfaisants. Si l'on veut se contenter d'une décimale après la virgule, ce qui sera parfois suffisant dans la pratique bancaire, cette méthode approchée pourra être utilisée, mais seulement si

$$n_1 < \frac{1}{2} n_2 \tag{9}$$

lorsque
$$100 \, | i_2 - i_1 | \leqslant \frac{1}{2}$$

et si les cours des titres ne sont pas supérieurs à 110 % ou inférieurs à 80 %.

Nous nous sommes demandés s'il n'y aurait pas un autre moyen de déterminer i'_0 d'une manière plus précise qui permettrait d'améliorer nos résultats. Dans le chapitre suivant, nous allons montrer comment nous avons pu utiliser d'une manière très profitable une formule de M. Birger Meidell obtenue par ses savantes recherches sur la solution explicite de l'équation du n^{me} degré des mathématiques financières [1]).

II.

Nous avons déjà fait remarquer lors de l'examen du tableau I, que $i_0(2)$ variait très peu par rapport à i. On pourrait alors proposer de prendre pour i'_0 la moyenne arithmétique de deux valeurs de $i_0(2)$ calculées pour deux valeurs extrêmes de i. Nous voulons cependant rechercher pour i_0 une formule approchée qui soit indépendante de i et dont le calcul numérique ne soit guère plus long que celui de la formule (2).

Si i_0 reste quasi constante lorsque i varie, on peut donc se demander s'il ne suffit pas de prendre pour i'_0 la valeur de i_0 qui nous donnerait simultanément

$$\left\{ \begin{aligned} 1 &= i_1 \, \overset{0}{a}_{\overline{n_1}|} + i_2 \, v_0^{n_1} \, \overset{0}{a}_{\overline{n_2}|} + v_0^{n_1+n_2} \\ 1 &= i_0 \, \overset{0}{a}_{\overline{n_1+n_2}|} + v_0^{n_1+n_2} \end{aligned} \right. \tag{10}$$

c'est-à-dire se placer dans le cas où le titre est au pair.

---

[1]) Birger Meidell: Über verschiedene explicite Lösungen des Problems von der Berechnung des effektiven Zinsfusses bei Anleihen. (Skandinavisk Aktuarietidskrift 1938.) Voir également le dernier mémoire de cet auteur: Zur Theorie und Praxis der Berechnung des effektiven Zinsfusses bei Anleihen. (Skandinavisk Aktuarietidskrift 1939.)

Dans le mémoire ci-dessus mentionné, M. Birger Meidell a montré que les fonctions de la forme

$$(11) \qquad K_{\overline{n_1+n_2|}} = \sum_{t=1}^{t=n_1+n_2} A_t\, v^t$$

pouvaient être développées en série convergente

$$(12) \qquad K_{\overline{n_1+n_2|}} = e^{-\delta z} \left[\sum_{t=1}^{t=n_1+n_2} A_t - \frac{\delta}{1} \sum_{t=1}^{t=n_1+n_2} A_t\,(t-z) + \frac{\delta^2}{2!} \sum_{t=1}^{t=n_1+n_2} A_t\,(t-z)^2 - \dots \right]$$

$$\delta = \text{Log}\,(1+i)$$

pour toutes les valeurs finies de z.

L'équation (1) de degré $n_1 + n_2$ en v se trouve ainsi transformée en une équation de degré infini en δ. Les nombres A_t sont donnés par les conditions de l'emprunt; dans le présent cas, on aura donc:

$A_t = i_1$ pour $t = 1, 2, \dots\dots n_1$

$A_t = i_2$ pour $t = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots\dots n_1 + n_2 - 1$

$A_t = 1 + i_2$ pour $t = n_1 + n_2$

L'avantage du développement en série (12) est qu'en choisissant z d'une manière appropriée, celui-ci converge si rapidement que l'on peut négliger les termes en δ^3 et suivants. Après quelques calculs, sur lesquels le mémoire de M. Birger Meidell renseignera, cet auteur montre que l'on peut écrire:

$$(13) \qquad K_{\overline{n_1+n_2|}} = e^{-\delta z_1 + \frac{\delta^2}{2}(z_2 - z_1^2)} \sum_{t=1}^{t=n_1+n_2} A_t$$

où

$$(14) \qquad z_1 = \frac{\sum_{t=1}^{t=n_1+n_2} t A_t}{\sum_{t=1}^{t=n_1+n_2} A_t}$$

$$z_2 = \frac{\sum_{t=1}^{t=n_1+n_2} t^2 A_t}{\sum_{t=1}^{t=n_1+n_2} A_t} \tag{15}$$

C'est la formule (13) de Birger Meidell que nous nous proposons d'utiliser pour déterminer i'_0 de façon à avoir

$$K_{\overline{n_1+n_2}|} = 1 \tag{16}$$

Dans cette hypothèse, nous aurons donc l'équation suivante à résoudre:

$$\delta_0'^2 \frac{z_2 - z_1^2}{2} - \delta'_0 z_1 + \frac{\log \sum_{t=1}^{t=n_1+n_2} A_t}{\log e} = 0 \tag{17}$$

équation du second degré en δ'_0.

Après avoir posé pour simplifier l'écriture

$$(18) \qquad z_0 = \frac{z_2 - z_1^2}{z_1} \qquad \text{et} \qquad (19) \quad A = \frac{\log \sum_{t=1}^{t=n_1+n_2} A_t}{\log e}$$

on obtient en résolvant (17)

$$\delta'_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\frac{z_0}{z_1} A}}{z_0} \tag{20}$$

On voit que le radical doit être affecté du signe «moins», car si $i_1 = i_2 = 0$, on doit forcément avoir $\delta'_0 = 0$.

Donc, pour déterminer δ'_0 et ensuite i'_0 de notre emprunt à taux d'intérêt nominal variable, nous aurons à calculer successivement les nombres suivants:

$$A = \frac{1}{\log e} \log (n_1 i_1 + n_2 i_2 + 1) \tag{21}$$

$$(22) \qquad z_1 = \frac{i_1 S(n_1) + i_2 [S(n_1 + n_2) - S(n_1)] + (n_1 + n_2)}{n_1 i_1 + n_2 i_2 + 1}$$

$$(23) \qquad z_2 = \frac{i_1 S_2(n_1) + i_2 [S_2(n_1 + n_2) - S_2(n_1)] + (n_1 + n_2)^2}{n_1 i_1 + n_2 i_2 + 1}$$

$$(24) \qquad z_0 = \frac{z_2}{z_1} - z_1$$

$S(k)$ est la somme des k premiers nombres et $S_2(k)$ la somme des carrés des k premiers nombres. A l'aide d'une machine à calculer, ces différents nombres se calculent très rapidement.

Nous allons reprendre maintenant les exemples du tableau II et comparer i_0 avec i_0' déterminé par la formule (20).

Tableau IV.

n_1	n_2	$100\,i$	$100\,i_1 = 3.25$ $100\,i_2 = 3.50$		$100\,i_1 = 3.25$ $100\,i_2 = 3.75$		$100\,i_1 = 3.25$ $100\,i_2 = 4.25$	
			$100\,i_0$(2)	$100\,i_0'$(20)	$100\,i_0$(2)	$100\,i_0'$(20)	$100\,i_0$(2)	$100\,i_0'$(20)
15	15	3.375	3.34	3.32	3.44	3.41	3.63	3.59
15	15	3.50	3.34	3.32	3.44	3.41	3.62	3.59
15	15	3.75	3.34	3.32	3.43	3.41	3.62	3.59
15	15	5.00	3.33	3.32	3.41	3.41	3.57	3.59
10	15	3.375	3.37	3.36	3.50	3.48	3.75	3.72
10	15	3.50	3.37	3.36	3.50	3.48	3.75	3.72
10	15	3.75	3.37	3.36	3.49	3.48	3.74	3.72
10	15	5.00	3.36	3.36	3.48	3.48	3.70	3.72
5	15	3.375	3.42	3.41	3.59	3.58	3.93	3.91
5	15	3.50	3.42	3.41	3.59	3.58	3.93	3.91
5	15	3.75	3.42	3.41	3.59	3.58	3.92	3.91
5	15	5.00	3.41	3.41	3.58	3.58	3.90	3.91
2	15	3.375	3.46	3.45	3.68	3.65	4.10	4.07
2	15	3.50	3.46	3.45	3.67	3.65	4.10	4.07
2	15	3.75	3.46	3.45	3.67	3.65	4.10	4.07
2	15	5.00	3.46	3.45	3.66	3.65	4.09	4.07

Comme on peut le constater, les résultats fournis par la formule (20) sont très satisfaisants. Le taux d'intérêt nominal approché i_0' étant inférieur au taux d'intérêt nominal exact, il en résultera que le taux de rendement cherché sera lui-même aussi inférieur au taux de rendement exact.

Afin de voir à quels résultats on arrive en calculant le taux de rendement approché en utilisant i_0' déterminé par la formule (20), nous allons refaire les exemples du tableau III.

Tableau V. $100 i_1 = 3.25$ $100 i_2 = 3.75$

n_1	n_2	$100\ K^{(2)}_{\overline{n_1+n_2}\vert}$	$100\ i_0'$ (20)	$100\ i$	$100\ i'$ [1]
25	25	111.24	3.35	3.00	2.94
20	25	111.58	3.39	3.00	2.95
15	25	111.97	3.44	3.00	2.95
10	25	112.42	3.51	3.00	2.96
5	25	112.94	3.60	3.00	2.97
25	25	98.31	3.35	3.50	3.45
20	25	99.19	3.39	3.50	3.46
15	25	100.22	3.44	3.50	3.46
10	25	101.46	3.51	3.50	3.46
5	25	102.92	3.60	3.50	3.47
25	25	87.54	3.35	4.00	3.96
20	25	88.73	3.39	4.00	3.97
15	25	90.17	3.44	4.00	3.97
10	25	91.93	3.51	4.00	3.98
5	25	94.07	3.60	4.00	3.98
25	25	78.50	3.35	4.50	4.47
20	25	79.85	3.39	4.50	4.48
15	25	81.54	3.44	4.50	4.48
10	25	83.63	3.51	4.50	4.48
5	25	86.24	3.60	4.50	4.48
25	25	70.89	3.35	5.00	4.98
20	25	72.30	3.39	5.00	4.98
15	25	74.09	3.44	5.00	4.99
10	25	76.38	3.51	5.00	4.99
5	25	79.30	3.60	5.00	5.01

[1] Voir la remarque du tableau III.

La méthode proposée conduit donc à des résultats qui satisfont aux exigences de la pratique. Dans les applications, il suffira de se souvenir que le rendement approché est légèrement inférieur au rendement exact. Au point de vue de l'utilisation pratique de la méthode, on voit qu'elle est très simple, car pour toute la durée n_1 il n'y a qu'à calculer i_0' pour quelques valeurs, les autres pouvant être déterminées par interpolation linéaire.

III.

Si, dans la formule (20), on remplace le radical par sa valeur approchée limitée aux trois premiers termes de son développement en série:

$$\sqrt{1 - 2\frac{z_0}{z_1}A} = 1 - \frac{z_0}{z_1}A - \frac{1}{2}\left(\frac{z_0}{z_1}A\right)^2 \tag{25}$$

on obtient pour déterminer i_0' la formule suivante:

$$\delta_0' = \frac{A}{z_1} + \frac{z_0}{2}\left(\frac{A}{z_1}\right)^2 \tag{26}$$

Considérons maintenant le tableau numérique VI à la page 86.

On y constate qu'en prenant comme taux d'intérêt nominal approché i_0' celui déterminé par la formule:

$$i_0' = \frac{1}{2}\left[i_0'(7) + i_0'(26)\right] \tag{27}$$

on obtient lorsque

$$0.03 \leqslant i < 0.05$$

une meilleure approximation de $i_0(2)$ que celle donnée par la formule (20). En utilisant la valeur approchée i_0' déterminée par la formule (27) nous obtiendrons donc une meilleure approximation du taux de rendement. Le tableau VII de la page 87 est la confirmation de nos dires.

Tableau VI. $100 i_1 = 3.25$ $100 i_2 = 3.75$

n_1	n_2	$100\, i$	$100\, i_0(2)$	$100\, i'_0(7)$	$100\, i'_0(20)$	$100\, i'_0(26)$	$100 \frac{1}{2}[i'_0(7)+i'_0(26)]$
25	25	3.00	3.41	3.50	3.35	3.26	3.38
20	25	3.00	3.45	3.53	3.39	3.31	3.42
15	25	3.00	3.49	3.56	3.44	3.38	3.47
10	25	3.00	3.55	3.61	3.51	3.46	3.53
5	25	3.00	3.63	3.67	3.60	3.56	3.62
25	25	4.00	3.39	3.50	3.35	3.26	3.38
20	25	4.00	3.42	3.53	3.39	3.31	3.42
15	25	4.00	3.47	3.56	3.44	3.38	3.47
10	25	4.00	3.53	3.61	3.51	3.46	3.53
5	25	4.00	3.62	3.67	3.60	3.56	3.62
25	25	5.00	3.36	3.50	3.35	3.26	3.38
20	25	5.00	3.40	3.53	3.39	3.31	3.42
15	25	5.00	3.44	3.56	3.44	3.38	3.47
10	25	5.00	3.51	3.61	3.51	3.46	3.53
5	25	5.00	3.61	3.67	3.60	3.56	3.62

Au terme de notre étude, nous sommes donc arrivés à montrer qu'il est possible de déterminer avec une bonne approximation le taux de rendement d'un emprunt à échéance fixe à taux d'intérêt nominal variable en substituant à cet emprunt un autre emprunt à échéance fixe ayant les mêmes caractéristiques que l'emprunt à taux d'intérêt nominal variable, mais dont le taux d'intérêt nominal est constant. Moyennant quelques calculs auxiliaires pour déterminer le taux d'intérêt constant, il y a donc possibilité d'utiliser pour ce type d'emprunt les tables de cours et rendement qui ont été calculées pour la catégorie des emprunts à échéance fixe à taux d'intérêt nominal constant.

Pour la détermination du taux d'intérêt nominal constant, on a pu se rendre compte par nos exemples numériques que la formule (27) est la plus appropriée lorsque le cours de l'obligation varie entre 80 % et 110 %; pour des cours compris entre 70 % et 80 %, il sera préférable d'utiliser la formule (20).

Tableau VII. $100 i_1 = 3.25$ $100 i_2 = 3.75$

n_1	n_2	$100\ K^{(2)}_{\overline{n_1+n_2}\vert}$	$100\ i'_0$ (27)	$100\ i$	$100\ i'$ [1]
25	25	111.24	3.38	3.00	2.97
20	25	111.58	3.42	3.00	2.98
15	25	111.97	3.47	3.00	2.98
10	25	112.42	3.53	3.00	2.98
5	25	112.94	3.62	3.00	2.99
25	25	98.31	3.38	3.50	3.48
20	25	99.19	3.42	3.50	3.49
15	25	100.22	3.47	3.50	3.49
10	25	101.46	3.53	3.50	3.49
5	25	102.92	3.62	3.50	3.49
25	25	87.54	3.38	4.00	3.99
20	25	88.73	3.42	4.00	4.00
15	25	90.17	3.47	4.00	4.00
10	25	91.93	3.53	4.00	4.00
5	25	94.07	3.62	4.00	4.00
25	25	78.50	3.38	4.50	4.51
20	25	79.85	3.42	4.50	4.51
15	25	81.54	3.47	4.50	4.51
10	25	83.63	3.53	4.50	4.51
5	25	86.24	3.62	4.50	4.51

[1]) Voir la remarque du tableau III.

Avant de terminer, nous voulons encore faire remarquer que nous pourrions obtenir une valeur approchée du taux de rendement en résolvant directement l'équation (13) par rapport à δ, ce qui donne:

$$\delta = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\,\dfrac{z_0}{z_1}\cdot\dfrac{\log \sum\limits_{t=1}^{t=n_1+n_2} A_t - \log K_{\overline{n_1+n_2}|}}{\log e}}}{z_0} \tag{28}$$

Nous n'entreprendrons cependant pas cette étude, car la recherche du taux de rendement approché par cette méthode est beaucoup moins pratique et moins rapide que le procédé que nous préconisons plus haut. En effet, pour chaque cours, il y aurait lieu de calculer la quantité sous le radical, alors qu'avec la méthode du taux d'intérêt constant, il suffit, comme nous l'avons déjà fait remarquer, de calculer 4 ou 5 valeurs de i_0' pour toute la période n_1, les autres étant obtenues par interpolation linéaire.

IV.

Le procédé de détermination du taux de rendement des emprunts à échéance fixe à taux d'intérêt nominal variable basé sur un taux d'intérêt nominal constant auxiliaire calculé d'après les formules des chapitres II et III paraîtra extrêmement simple à un actuaire, mais il est probable que celui qui a peu l'habitude de manier des formules et des tables de logarithmes aura quelques difficultés à utiliser rapidement notre méthode. Nous nous sommes donc demandé s'il ne nous était pas possible de proposer une méthode approximative ne nécessitant seulement que l'emploi des quatre opérations simples de l'arithmétique et des tables de cours et rendement en usage.

Remarquons que la formule (8), qui donne le cours $K^{(2)}_{\overline{n_1+n_2|}}$ d'un emprunt à échéance fixe remboursable au pair dans $n_1 + n_2$ années, dont le taux d'intérêt nominal est i_1 pendant les n_1 premières années et i_2 pendant les n_2 dernières années, dont les coupons sont semestriels et i le taux de rendement annuel, peut s'écrire de la manière suivante:

$$K^{(2)}_{(i)\,\overline{n_1+n_2|}} = i_1\,(1+\varepsilon)\,a_{\overline{n_1|}} + v^{n_1}\,K^{I(2)}_{(i_2,\,i)\,\overline{n_2|}} \tag{29}$$

où sous la forme:

$$K^{(2)}_{(i)\,\overline{n_1+n_2|}} = K^{I(2)}_{(i_0,\,i)\,\overline{n_1|}} \cdot K^{I(2)}_{(i_2,\,i)\,\overline{n_2|}} \tag{30}$$

après avoir convenu de poser

$$\dot{i}_0 = \frac{\dot{i}_1}{K^{I(2)}_{(i_2,\,i)\,\overline{n_2|}}} \tag{31}$$

La formule (30) montre que le cours de notre emprunt à taux d'intérêt nominal variable se présente comme le produit du cours de deux emprunts à taux d'intérêt nominal constant, cours dont on peut trouver la valeur, multipliée par 100, dans les tables de cours est rendement en usage, celles de Huss & Hagström par exemple. Seulement, il est nécessaire de connaître i, quantité que nous recherchons précisément. Cette difficulté ne peut néanmoins pas nous arrêter. En effet, nous avons vu qu'en utilisant le procédé de détermination du taux de rendement du chapitre I basé sur le calcul de la formule (7), formule très simple, on peut obtenir rapidement une première approximation par excès de i. Désignons donc par i' cette approximation ou une valeur approchée de celle-ci et par i'' une approximation par défaut de manière que pour

$$i'' < i'$$

on ait

$$\underset{n_1|}{K^{I(2)}_{(i_0,\, i')}} \cdot \underset{n_2|}{K^{I(2)}_{(i_2,\, i')}} < \underset{\overline{n_1+n_2|}}{K^{(2)}_{(i)}} < \underset{n_1|}{K^{I(2)}_{(i_0,\, i'')}} \cdot \underset{n_2|}{K^{I(2)}_{(i_2,\, i'')}} \tag{32}$$

Les différents nombre K^I s'obtiennent directement ou par simple interpolation ou extrapolation linéaire par rapport au taux d'intérêt nominal dans les tables de cours et rendement en usage. Une fois ces simples calculs effectués, nous pourrons alors déterminer i par interpolation linéaire. Nous aurons donc:

$$i = i'' + \frac{(i' - i'')\left[\underset{n_1|}{K^{I(2)}_{(i_0,\, i'')}} \cdot \underset{n_2|}{K^{I(2)}_{(i_2,\, i'')}} - \underset{\overline{n_1+n_2|}}{K^{(2)}_{(i)}}\right]}{\underset{n_1|}{K^{I(2)}_{(i_0,\, i'')}} \cdot \underset{n_2|}{K^{I(2)}_{(i_2,\, i'')}} - \underset{n_1|}{K^{I(2)}_{(i_0,\, i')}} \cdot \underset{n_2|}{K^{I(2)}_{(i_2,\, i')}}} \tag{33}$$

Les deux exemples numériques ci-après montreront comment il convient de conduire les calculs.

Exemple I: Déterminer le taux de rendement d'un emprunt à échéance fixe remboursable au pair dans 45 ans, si le taux d'intérêt nominal est de 3.25 % pendant les 20 premières années et de 3.75 % pendant les 25 dernières. Les coupons se paient semestriellement et le cours est de 108.28 %.

Solution.

Suivant nos notations, nous aurons

$$i_1 = 3.25\ \% \qquad i_2 = 3.75\ \%$$
$$n_1 = 20 \qquad n_2 = 25$$

$$i_0'(7) = \frac{3.25 \times 20 + 3.75 \times 25}{45} = 3.52\ \%$$

Si l'emprunt avait un taux d'intérêt nominal fixe de 3.52 % pendant 45 ans, le taux de rendement serait, suivant la méthode du chapitre I et la table I de Huss & Hagström, de 3.188 %. Prenons donc pour i' la valeur 3.2 % et pour i'' la valeur 3.1 % et calculons sur la base de ces taux les formules (30) et (31) en utilisant toujours la table I de Huss & Hagström.

	$i' = 3.2\ \%$	$i'' = 3.1\ \%$
$\underset{25\rceil}{K^{I(2)}_{(i_2,\, i)}}$	1.09875	1.1169
$i_0 = i_1 : \underset{25\rceil}{K^{I(2)}_{(i_2,\, i)}}$	2.958 %	2.910 %
$\underset{20\rceil}{K^{I(2)}_{(i_0,\, i)}}$	0.9691	0.9753
$\underset{20\rceil}{K^{I(2)}_{(i_0,\, i)}} \cdot \underset{25\rceil}{K^{I(2)}_{(i_2,\, i)}}$	1.0648	1.0893

En appliquant maintenant la formule (33), on obtient pour taux de rendement:

$$i = 3.1 + \frac{(3.2 - 3.1)\,(1.0893 - 1.0828)}{1.0893 - 1.0648} = \underline{3.1265\ \%}$$

Les taux de rendement exact est de 3.125 %. L'approximation est donc très satisfaisante.

Exemple II: Déterminer le taux de rendement d'un emprunt à échéance fixe remboursable au pair dans 35 ans, si le taux d'intérêt nominal est de 3.5 % pendant les 15 premières années et de 4 % pendant les 20 dernières. Les coupons se paient semestriellement et le cours est de 74.21 %

Solution.

$$i_1 = 3.5\ \% \qquad i_2 = 4\ \%$$
$$n_1 = 15 \qquad n_2 = 20$$
$$i_0'(7) = 3.78\ \%$$

Le taux de rendement d'un emprunt à échéance fixe d'une durée de 35 ans dont le taux d'intérêt nominal est 3.78 % est de 5.51 %. On sait par les résultats du chapitre I que si le cours est assez bas, comme c'est présentement le cas, que 5.51 % dépasse sensiblement i. Ceci nous incite à prendre pour i' 5.4 % et pour i'' 5.3 %. A l'aide de la table I de Huss et Hagström, on obtient pour (30) et (31) les valeurs numériques suivantes:

	$i' = 5.4\ \%$	$i'' = 5.3\ \%$
$K^{I(2)}_{\underset{20\rceil}{(i_2,\ i)}}$	0.8377	0.8484
$i_0 = i_1 : K^{I(2)}_{\underset{20\rceil}{(i_2,\ i)}}$	4.178 %	4.125 %
$K^{I(2)}_{\underset{15\rceil}{(i_0,\ i)}}$	0.8821	0.8859
$K^{I(2)}_{\underset{15\rceil}{(i_0,\ i)}} \cdot K^{I(2)}_{\underset{20\rceil}{(i_2,\ i)}}$	0.7389	0.7516

La formule (33) nous donne:

$$i = 5.3 + \frac{(5.4 - 5.3)\,(0.7516 - 0.7421)}{0.7516 - 0.7389} = \underline{5.3748\ \%}$$

Le taux de rendement exact est de 5.375 %.

Remarque: Si les coupons de l'emprunt sont soumis à un impôt sur le revenu de α %, il y aura lieu de remplacer dans les formules précédentes les taux d'intérêt i_1 et i_2 par les nouveaux taux d'intérêt suivants liés aux anciens par les relations:

$$i_1' = i_1\,(1 - \alpha)$$
$$i_2' = i_2\,(1 - \alpha)$$

Conclusion.

Des deux méthodes qu'il sera possible d'utiliser pour déterminer approximativement le taux de rendement d'un emprunt à échéance fixe à taux d'intérêt nominal variable, la méthode du taux d'intérêt nominal constant auxiliaire des chapitres II et III s'emploiera surtout pour les emprunts dont le taux de rendement devra être fréquemment calculé. En effet, une fois les taux auxiliaires i_0' obtenus pour la durée n_1, le taux de rendement s'obtient par une interpolation linéaire dans les tables de cours et rendement, ce qui est très pratique. Par contre, la méthode du chapitre IV s'utilisera de préférence dans tous les cas où l'on peut estimer que la connaissance des i_0' ne se justifie pas, étant donné que l'on n'aura pas souvent l'occasion de les employer. Nous pensons, par exemple, aux emprunts étrangers aux marchés financiers du pays où l'actuaire travaille.

Remarque sur la formule (30): La mise sous forme d'un *produit* du cours d'un emprunt à taux d'intérêt nominal variable pourrait également se faire pour celui des emprunts à *amortissement différé.* Etant donné que pour certains emprunts amortissables (système de l'annuité constante, serial loan) on possède des tables actuarielles de cours et de rendement, l'expression sous forme de produit du cours des emprunts à amortissement différé serait à recommander. Nous n'avons pas connaissance d'un traité de mathématiques financières indiquant cette méthode, dont les avantages pratiques nous semblent manifestes.