Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 40 (1940)

Artikel: Sur une équation intégrale de l'analyse démographique et industrielle

Autor: Lotka, Alfred J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-554974

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

B. Wissenschaftliche Mitteilungen

Sur une équation intégrale de l'analyse démographique et industrielle.

Par *Alfred J. Lotka,* New York.

Dans un récent cahier du Bulletin, M. Hadwiger nous a fait connaître une nouvelle solution d'une équation intégrale qui joue un rôle fondamental dans l'analyse démographique aussi bien que dans certains problèmes de l'assurance, de la génétique, de l'économie politique, etc. En passant, cet auteur nous donne un résumé de la méthode appliquée à ce genre de problème en première ligne par Sharpe et Lotka, ensuite par H. T. J. Norton, J. B. S. Haldane, A. Linder, et plusieurs autres. A ce propos, il fait la remarque que cette méthode (basée sur les travaux de P. Hertz et de G. Herglotz) présente des difficultés parfois peut-être insurmontables.

Ces difficultés, dans les cas que j'ai rencontrés en pratique, ne sont cependant pas sérieuses. Pour prévenir un malentendu à cet égard, il sera peut-être utile d'illustrer les faits par un exemple.

Rappelons d'abord que l'équation fondamentale citée par M. Hadwiger,

$$G(t) = \int_0^a G(t - \xi)\, K(\xi)\, d\xi \tag{1}$$

s'applique à divers problèmes, selon l'interprétation que nous donnons aux symboles. Dans son application démographique $G(t)$ désigne, par exemple, les naissances annuelles de filles à l'instant t, et $K(\xi)$ la reproductivité nette des femmes d'âge ξ, c'est-à-dire le produit $l(\xi)\, m(\xi)$ dont le premier facteur $l(\xi)$ est la probabilité pour un nouveau-né du sexe féminin de survivre à l'âge ξ; quant au second facteur, $m(\xi)\, d\xi$ est la probabilité pour une femme d'âge ξ de donner naissance à une fille avant d'atteindre l'âge $\xi + d\xi$. Dans

une autre application, à un problème industriel, le symbole $G(t)$ désigne, par exemple, les remplacements annuels de certains articles d'emploi (tel que les traverses d'une voie ferrée), tandis que $K(\xi)$ désigne le produit $l(\xi)\,\mu(\xi)$ dont le premier facteur $l(\xi)$ est la probabilité pour une traverse, au moment de son installation, de durer en service jusqu'à l'âge ξ; le second facteur $\mu(\xi)$ est le «taux instantané de mortalité». La limite supérieure a de l'intégrale est le dernier âge pour lequel $K(\xi)$ a encore une valeur non nulle. Il est entendu que $K(\xi)$ ne peut avoir que des valeurs positives, en effet,

$$\left.\begin{array}{ll} K(\xi) \geqq 0 & 0 < \xi < a \\ K(\xi) = 0 & \xi > a \end{array}\right\} \qquad (2)$$

On peut alors se demander quel sera le nombre annuel de remplacements nécessaires à une époque donnée, dans un système installé au moment $t = 0$ et comprenant alors N pièces, étant donné que chaque pièce mise hors de service est immédiatement remplacée par une nouvelle, et que le système doit être maintenu constant. Ce problème est tout à fait analogue à une question d'assurance sur la vie traitée par L. Herbelot il y a une trentaine d'années [1]), cependant sans application à aucun effectif.

A titre d'exemple basé sur la pratique [2]), il conviendra ici d'illustrer notre méthode au moyen des données publiées par E. B. Kurtz dans son livre *Life Expectancy of Physical Property*, 1930, p. 104, fig. 50. Cet auteur trouve que la «courbe des décès», c'est-à-dire la fonction $l(\xi)\,\mu(\xi) = K(\xi)$ d'une certaine classe d'objets d'usage industriel est représentée assez bien par une fonction du type I de Pearson, laquelle, comme on le sait, est définie en termes des quatre premiers moments de la distribution observée. Dans la suite, nous admettrons [3]) également, en traitant cet exemple, que les quatre premiers moments suffiront à fixer les caractéristiques de la solution cherchée.

---

[1]) Bulletin de l'Institut des Actuaires de France, 1909, p. 292.

[2]) Pour une application démographique, voir A. J. Lotka, Théorie analytique des associations biologiques, Hermann et Cie., Paris, 1939, pp. 78 et seq.

[3]) Ce n'est pas que cette hypothèse soit nécessaire pour l'application de la méthode à illustrer. Voir p. 5, note [2]).

Cette solution, d'après F. Hertz et G. Herglotz [1]), a la forme

$$G(t) = \sum_{1}^{\infty} A_n e^{z_n t} \tag{3}$$

les quantités z_n étant les racines de l'équation caractéristique

$$f(z) = \int_0^a e^{-z\xi} K(\xi)\, d\xi = 1 \tag{4}$$

tandis que les constantes A dépendent des conditions initiales. Afin de déterminer ces constantes, il faut connaître les valeurs de $G(t)$ pour $0 < t < a$, ce qui est nécessaire pour préciser le problème. Par un procédé semblable à celui qui sert à définir les constantes dans une série de Fourier [2]), on trouve

$$A_n = \frac{\int_0^a e^{-z_n t} \left\{ G(t) - \int_0^t G(t-\xi)\, K(\xi)\, d\xi \right\} dt}{\int_0^a \xi\, e^{-z_n \xi} K(\xi)\, d\xi} \tag{5}$$

Racines de l'équation caractéristique ***(4)***.

Pour calculer ces racines, posons

$$M_0 = \int_0^a K(\xi)\, d\xi \tag{6}$$

$$\log_e f(z) = \log_e M_0 - \lambda_1 z + \frac{\lambda_2}{2!} z^2 - \frac{\lambda_3}{3!} z^3 + \frac{\lambda_4}{4!} z^4 \tag{7}$$

L'équation (7) n'est autre chose qu'une définition des semi-invariants λ (Thiele) de la fonction $K(\xi)$. Pour qu'elle satisfasse à (4), l'on doit avoir

$$\left.\begin{aligned} \log_e f(z) = \log_e 1 &= 2\pi n i \\ n &= \pm 1,\ 2,\ 3, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

---

[1]) P. Hertz, Mathem. Annalen 1907, vol. 65, p. 1; G. Herglotz, ibid. p. 87.

[2]) A. J. Lotka, Annals of Mathem. Statistics, 1939, vol. 10, p. 9.

Racine réelle. Dans les problèmes qui nous occupent, $K(\xi)$ ne peut avoir que des valeurs positives. On voit facilement qu'alors (4) ne peut avoir qu'une seule racine réelle z_0, qui d'ailleurs, dans l'exemple dont nous nous occupons ici, sera 0, puisque les pièces de l'installation sont remplacées immédiatement au fur et à mesure qu'elles sont usées, de sorte que

$$M_o = \int_o^a K(\xi)\, d\,\xi = 1 \tag{9}$$

et

$$\log_e M_o = 0 \tag{10}$$ [1]

Racines complexes. Pour dégager les racines complexes, nous posons dans (7)

$$z = u + i\,v \tag{11}$$

$$\log_e f(z) = \varphi(u, v) + i\,\psi(u, v) \tag{12}$$

où l'on a écrit, pour abréger

$$\varphi(u, v) = \log_e M_o - \lambda_1 u + \frac{\lambda_2}{2!}(u^2 - v^2) - \frac{\lambda_3}{3!} u\,(u^2 - 3\,v^2) + \\ + \frac{\lambda_4}{4!}(u^4 - 6\,u^2 v^2 + v^4) = 0 \tag{13}$$

$$\psi(u, v) = -\lambda_1 v + \lambda_2 u\,v - \frac{\lambda_3}{3!} v\,(3\,u^2 - v^2) + \\ + \frac{\lambda_4}{3!} u\,v\,(u^2 - v^2) = 2\,\pi\,n \tag{14}$$

Pour chaque valeur de n, on a donc une paire d'équations simultanées en u, v. Pour leur résolution numérique, le procédé suivant a été trouvé le plus pratique:

[1]) Même si $z_0 \neq 0$ la solution de (8) pour la racine réelle z_0, ne présente aucune difficulté pratique si $|z_0|$ est suffisamment petit, ce qui sera généralement le cas dans l'application au problème démographique. Les termes au-delà du deuxième degré sont alors négligeables, et on n'a qu'à résoudre une simple équation quadratique, en choisissant la racine qui satisfait à (4).

En admettant pour u une suite de valeurs convenablement choisies, on calcule d'après (13) les valeurs correspondantes de v, ce qui est facile puisque les puissances impaires de v sont absentes, de façon qu'on a affaire à une équation biquadratique [1]).

On introduit ensuite dans (14) les couples de valeurs u, v ainsi obtenus, et l'on calcule les valeurs de n qui en résultent et qui, en général, ne seront pas des nombres entiers. Cependant, en traçant la courbe de n en fonction de u et de v, il est facile d'en extraire des valeurs (provisoires si l'on veut) de u, v correspondant aux valeurs entières de n. Ces valeurs provisoires peuvent servir à calculer des valeurs plus exactes d'après les méthodes bien connues [2]).

Ces calculs et ces graphiques ont été faits en partant des données de Kurtz; les résultats sont présentés dans la fig. 1 et le tableau I.

Valeurs numériques et courbes correspondantes.

Dans l'exemple déjà cité de Kurtz, les valeurs de u et v ont été calculées jusqu'au vingtième ordre ($n = 20$); les résultats in-

---

[1]) Il faut, cependant, prendre garde en formant la racine carrée, de choisir le signe qui rend correctement la racine réelle. Voir page 4, note [1]).

[2]) Dans ce qui précède, nous nous sommes tenu particulièrement à l'exemple où le semi-invariant de plus haut ordre était λ_4, ce qui comprendra la plupart des cas pratiques. Des remarques plus ou moins analogues s'appliquent cependant, *mutatis mutandis*, aux cas où les semi-invariants jusqu'au septième ordre entrent en ligne de compte. L'équation (13) sera alors une bicubique en v dont la résolution algébrique sera toujours possible. A la rigueur, on pourrait même aller jusqu'à λ_9, et résoudre l'équation (13) comme une équation du 4e degré en v^2.

Toutefois, ce n'est que très rarement, dans les problèmes de cette sorte, qu'il est nécessaire, ou même justifié, d'aller au-delà de λ_7.

Il convient d'effectuer les opérations dans l'ordre indiqué, ce procédé étant le plus direct. Cependant, il y a diverses possibilités.

Au lieu de calculer n d'après (14) pour des paires de valeurs données de u et v correspondant à (13), on peut calculer d'après l'équation cubique (14) une suite de valeurs de v pour une suite de valeurs données des u et une valeur de n entier. En admettant pour $-n$ les valeurs 1, 2, 3,... on obtient ainsi une famille de courbes (14) dont les intersections avec (13) correspondent aux racines de (4).

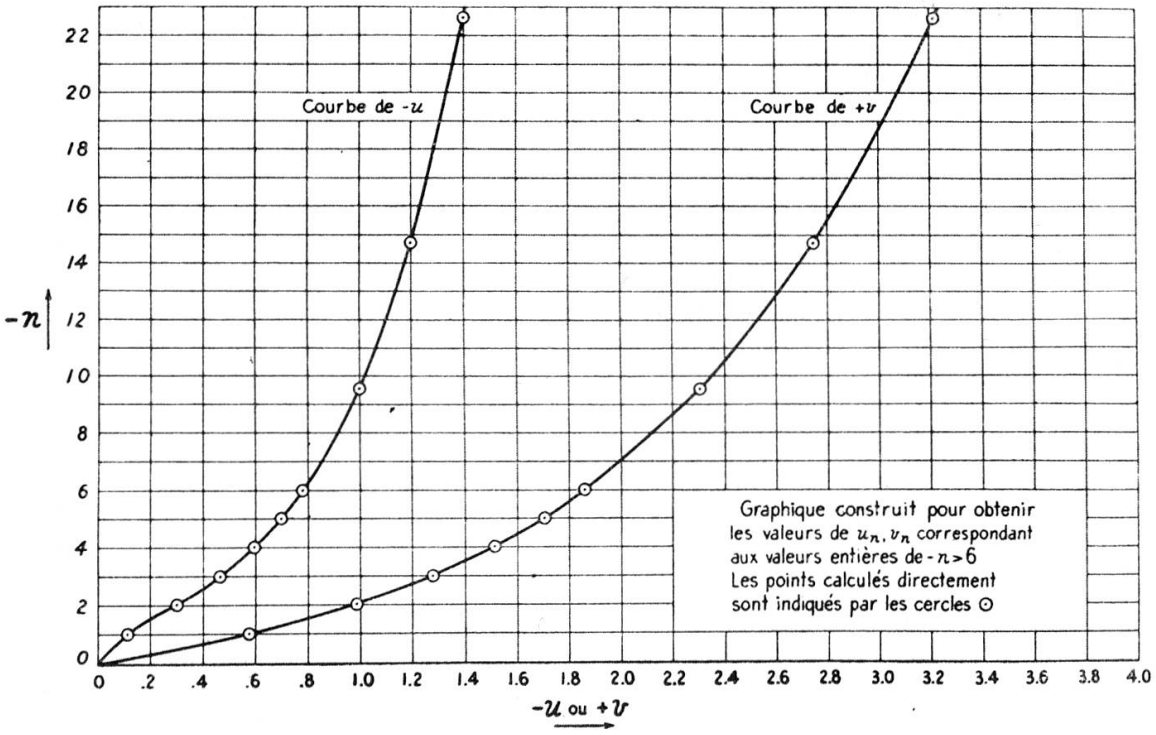
On peut même éviter l'inconvénient d'équations cubiques et n'avoir à résoudre que des équations quadratiques en éliminant v^4 de (13) et de (14) multipliée par v. On obtient de cette façon une nouvelle famille de courbes pour $-n =$ 1, 2, 3,... qui, elles aussi, donnent par leurs intersections avec (13), les racines voulues de (4). Cependant, il y a lieu de remarquer que l'orthogonalité des courbes (13), (14), propriété avantageuse pour le calcul, n'appartient plus à la famille de courbes obtenue par l'élimination de v^4.

diqués dans le tableau I ont été obtenus au moyen du graphique (fig. 1) [1].

Dans la fig. 2, la position des racines successives a été indiquée le long de la courbe (13). On voit les points en question se serrer de plus en plus étroitement à mesure que n augmente. En effet, le calcul montre que si la valeur de v est d'environ 14, n est de l'ordre de 5000. Toutefois, la suite de ces points s'étend à l'infini. Les six premières composantes oscillatoires sont tracées dans la fig. 3, et pour les étapes initiales, plus en détail, dans la fig. 4.

Puis, la fig. 5 présente la courbe définie par la solution (3), en retenant les six premières composantes oscillatoires. Sur le même graphique, on a tracé la distribution à travers le temps des remplacements d'après leurs rangs [2]) successifs. On s'assure facilement que

VALEURS DE $-n$ SELON L'ÉQUATION (14), CORRESPONDANT AUX PAIRES DE VALEURS u_n, v_n DÉFINIES PAR L'ÉQUATION (13)



D'après les observations de Kurtz, E. B., «Life Expectancy of Physical Property» 1930, page 104, fig. 50.

Fig. 1.

[1]) Jusqu'au sixième ordre, ces valeurs étaient toutefois connues par un calcul antérieur effectué par une méthode un peu différente.

[2]) Les remplacements directs de l'installation initiale sont «de premier rang», leurs remplacements à leur tour sont «de deuxième rang», et ainsi de suite.

Tableau I.

Valeurs de $-n$ selon l'équation (14) correspondant aux paires de valeurs u_n v_n définies par l'équation (13).

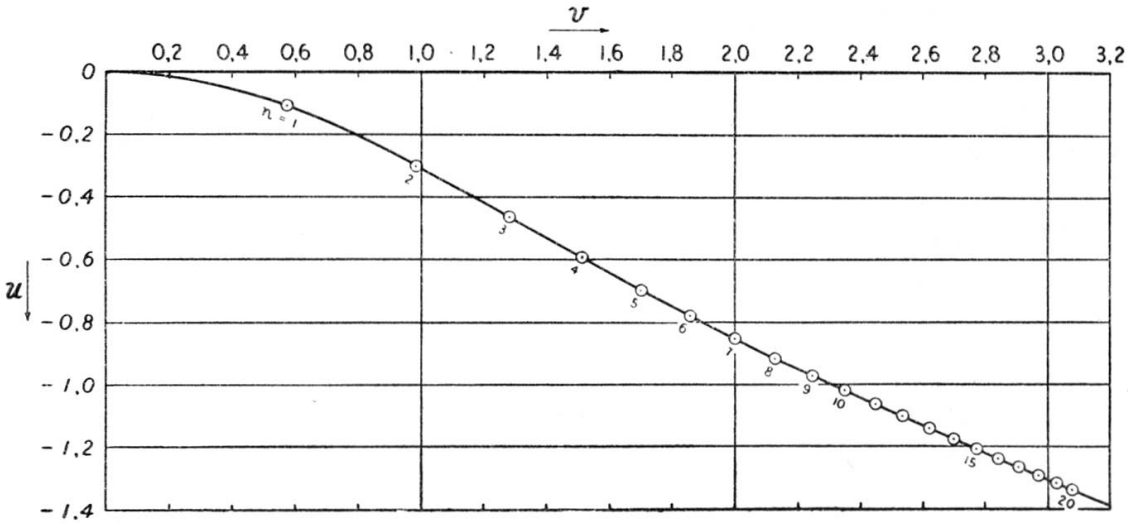
(Voir le graphique fig. 1.)

$-n$	u_n	v_n	$-n$	u_n	v_n
1	— 0,110	0,578	12	— 1,100	2,535
2	— 0,301	0,989	13	— 1,137	2,620
3	— 0,465	1,284	14	— 1,175	2,700
4	— 0,595	1,515	14,71	— 1,200	2,750
5	— 0,698	1,705	15	— 1,213	2,775
6	— 0,780	1,861	16	— 1,238	2,840
7	— 0,860	2,000	17	— 1,260	2,905
8	— 0,918	2,130	18	— 1,290	2,960
9	— 0,975	2,250	19	— 1,310	3,010
9,55	— 1,000	2,309	20	— 1,340	3,080
10	— 1,020	2,350	22,62	— 1,400	3,219
11	— 1,070	2,445			

Les valeurs de u_n, v_n correspondant à $-n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et à 9,55, 14,71, 22,62 sont calculées directement; les autres sont interpolées par la méthode graphique. D'après les observations de Kurtz, E. B., «Life Expectancy of Physical Property», 1930, p. 104, fig. 50.

la solution reproduit en effet la sommation à chaque instant des remplacements contemporains. Au début seulement, jusque vers $t = 5$, ces six premières composantes oscillatoires sont insuffisantes. Ce ne serait qu'une perte de temps de vouloir pousser les calculs plus loin pour cette partie de la courbe, car dans ces premières étapes il ne s'agit que des remplacements de premier rang qui ont une valeur appréciable. En effet, pour $t = 5$, ils représentent à peu près 999 pour mille de la somme totale des remplacements. Or, ces remplacements de premier rang ne sont autre chose que les valeurs de la fonction $K(t)$, connues pour $0 < t < a$ comme données fondamentales du problème.

20 PREMIÈRES RACINES COMPLEXES DE L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE (4)
Représentées par les intersections de la courbe (13) avec les courbes de la famille (14)

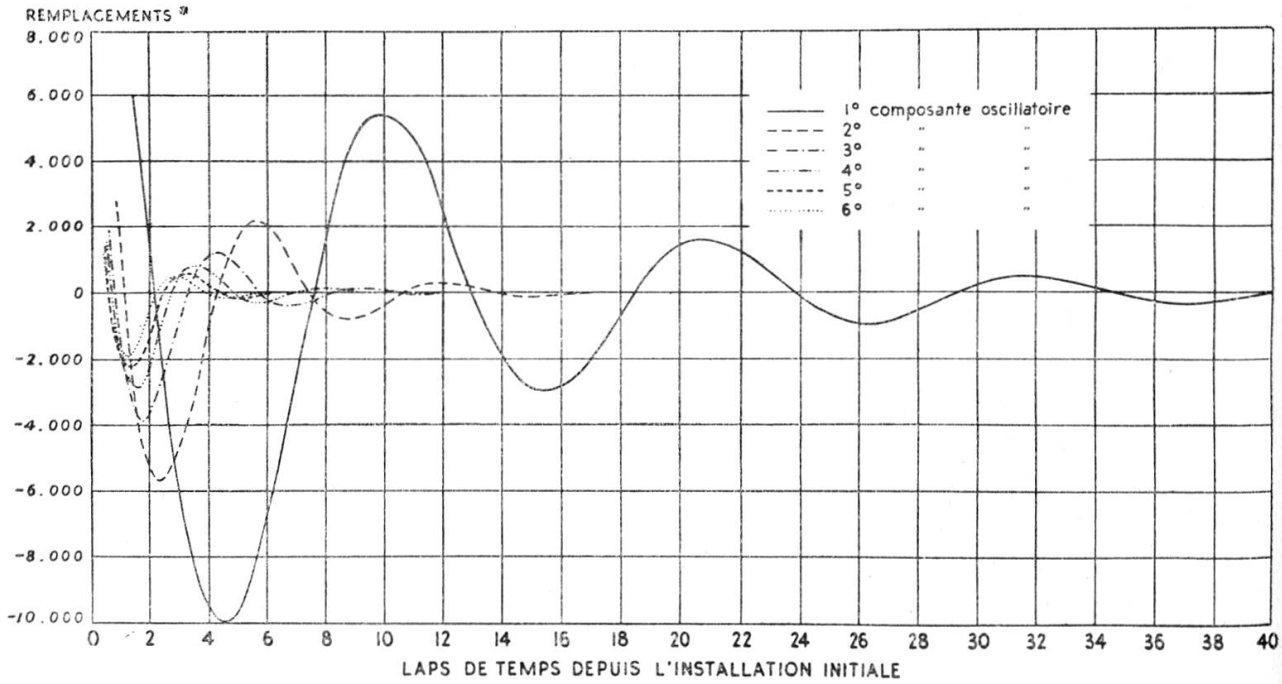


Les points d'intersection sont indiqués par les cercles ⊙

En tenant compte des 4 premiers semi-invariants, les équations (13) et (14) étant alors du 4e degré.
D'après les observations de Kurtz, E. B., «Life Expectancy of Physical Property», 1930, page 104, fig. 50.

Fig. 2.

PREMIÈRES SIX COMPOSANTES OSCILLATOIRES DE LA COURBE DES REMPLACEMENTS



* Écarts mesurés de la composante apériodique comme base.
D'après les observations de Kurtz, E. B., loc. cit.

Fig. 3.

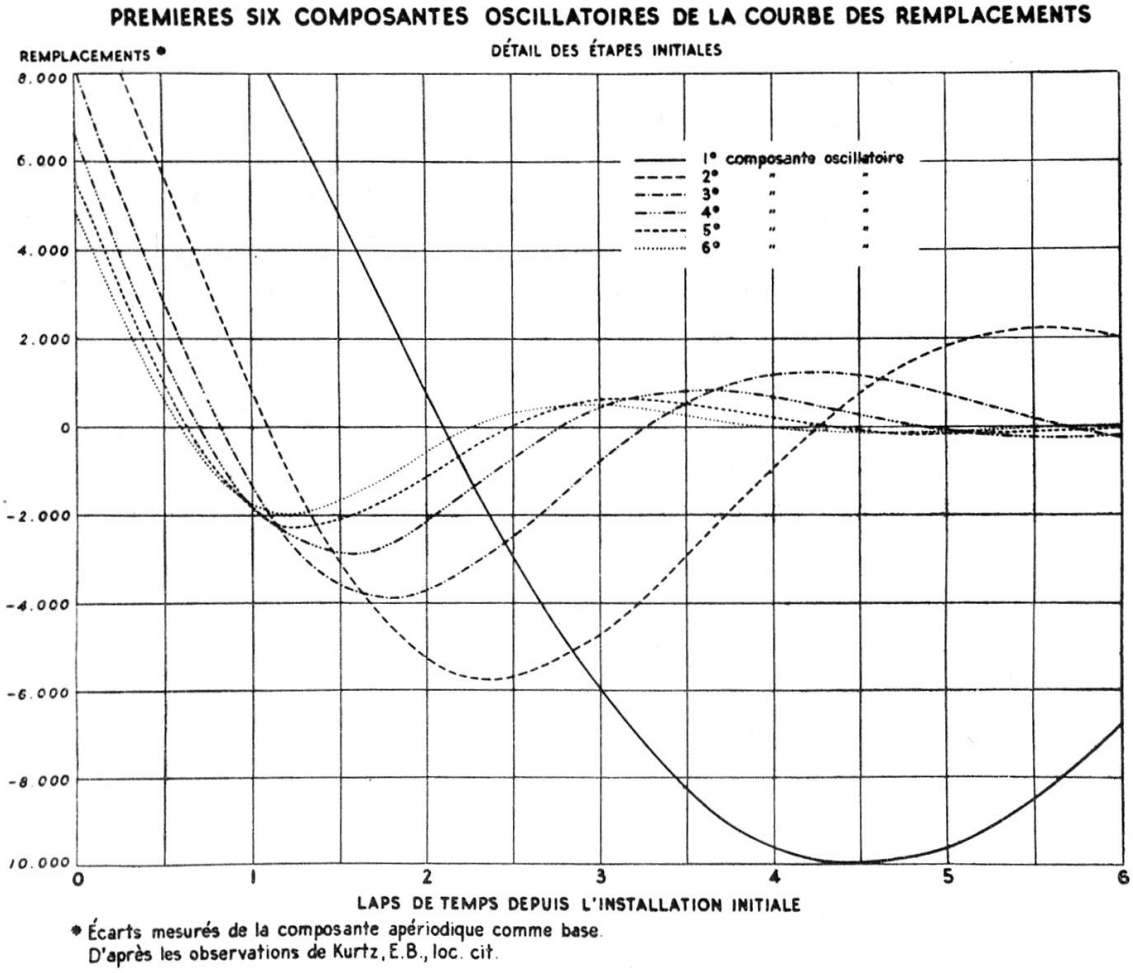


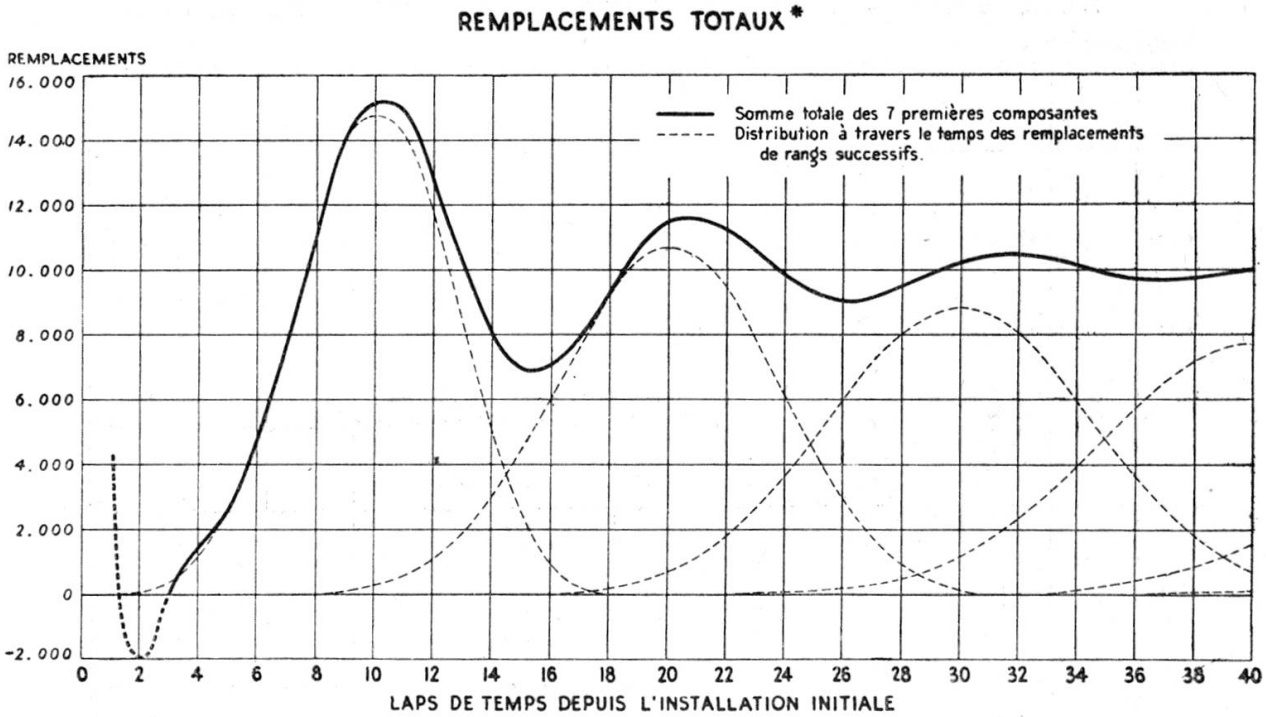
Fig. 4.

Enfin, la fig. 6 présente en détail les premières étapes de la courbe de la fig. 5. Elle montre aussi l'histogramme des données originales et le fragment correspondant de la courbe de Pearson.

Il faudrait encore noter que l'application de la méthode Hertz-Herglotz n'est nullement bornée au cas où l'installation initiale a lieu à un instant t. Cette méthode s'applique aussi, par exemple, au cas d'une population dont la répartition par âge est donnée à l'instant t, et dont on veut connaître l'évolution ultérieure sous le régime d'une table de mortalité et de fécondité donnée. En effet, ce fut là la première application [1]) de cette méthode aux problèmes du genre qui nous intéresse ici.

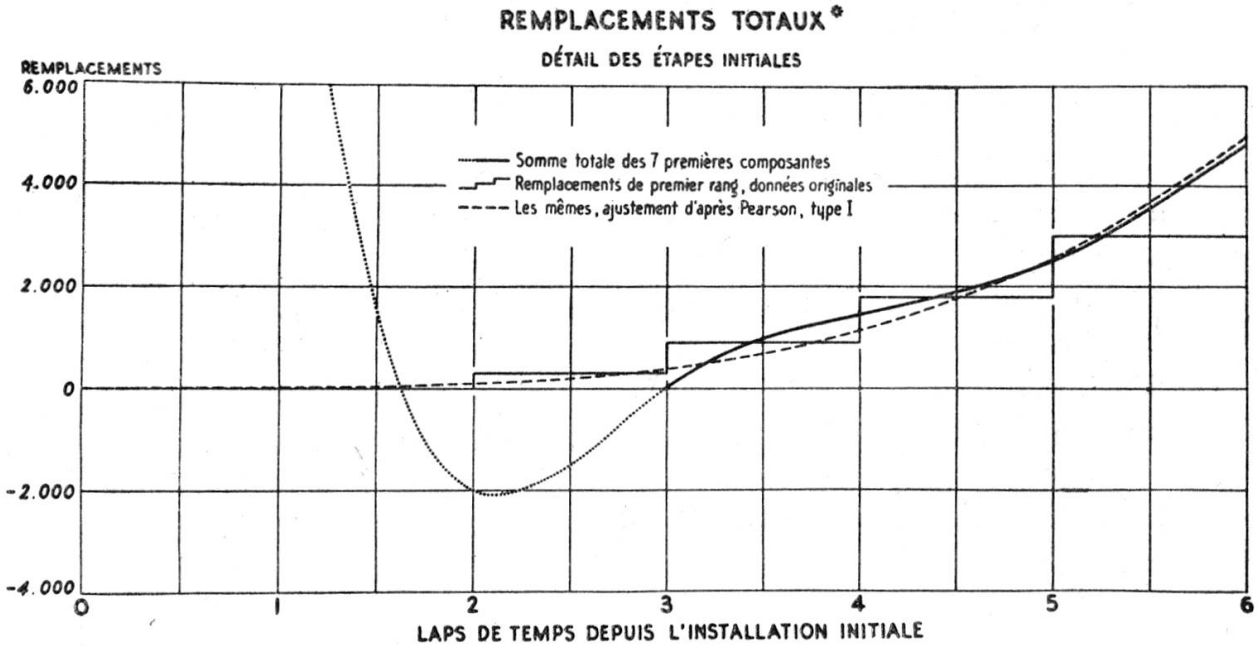
---

[1]) F. R. Sharpe et A. J. Lotka, A Problem in Age Distribution, Phil. Mag., 1911, tome 21, p. 435.



* D'après les observations de Kurtz, E.B., loc. cit.

Fig. 5.



* D'après les observations de Kurtz, E.B., loc. cit.

Fig. 6.

Ordre des racines u_n, v_n. Pour que la solution formelle (3) soit utile, il faut

1° que cette série soit convergente;

2° que le procédé (13), (14) pour calculer les racines de (4) les produise comme suite ordonnée selon les valeurs décroissantes de u_n, du moins pour les valeurs de n plus grandes qu'un certain nombre connu n_1.

Examinons quelles sont les circonstances à cet égard dans l'exemple emprunté aux observations de Kurtz.

En ordonnant les termes de l'équation (13) selon les puissances de v on a

$$\frac{\lambda_4}{4!} v^4 - v^2 \left(\frac{\lambda_4}{4} u^2 - \frac{\lambda_3}{2} u + \frac{\lambda_2}{2} \right) + \\ + \left(\frac{\lambda_4}{4!} u^4 - \frac{\lambda_3}{3!} u^3 + \frac{\lambda_2}{2!} u^2 - \lambda_1 u \right) = 0 \tag{15}$$

ou, pour abréger

$$\alpha v^4 + \beta v^2 + \gamma = 0 \tag{16}$$

$$v^2 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \tag{17}$$ [1]

Dans les observations déjà citées de Kurtz, les semi-invariants ont les valeurs suivantes:

$$\left. \begin{array}{ll} \lambda_1 = +10{,}00 & \lambda_3 = -1{,}30 \\ \lambda_2 = +6{,}72 & \lambda_4 = -12{,}12 \text{ [2]} \end{array} \right\} \tag{18}$$

Avec ces valeurs, la quantité $-\beta$ aussi bien que $(\beta^2 - 4\alpha\gamma)$ pour toute valeur de $u < 0$, va en augmentant lorsque n augmente. Il en résulte que le graphique de (13) dans le quadrant $-u$, $+v$ est incliné de gauche à droite dans toute son étendue; la dérivée $\frac{du}{dv}$ y est constamment négative, excepté au point 0,0, où elle s'annulle.

---

[1]) Ce n'est que la racine carrée positive qui doit être acceptée ici, selon la règle indiquée dans la note [1]) de la page 4, car pour $v = 0$ il n'y a que la valeur $u = 0$ qui est admissible, correspondant à l'unique racine réelle de (4).

[2]) Une correction, d'ailleurs sans importance pour notre exemple, qui m'a été indiquée trop tard pour en profiter dans les calculs, donne la valeur de $\lambda_4 = 12{,}21$.

Puis, remarquons que ce graphique reste entièrement dans le demi-quadrant limité au-dessus par l'axe des v positifs et au-dessous par la diagonale

$$u = -v$$

car, en posant $u = -v$ dans (13) on constate qu'aucune valeur positive de v ne peut satisfaire à cette équation, de sorte que la courbe (13) ne peut franchir la diagonale.

Or, dans ce demi-quadrant, les courbes (14) correspondant à la suite des nombres entiers $n = -1, -2, -3, \ldots$ se rangent de gauche à droite dans l'ordre de leurs indices n. Pour s'en rendre compte, on forme la dérivée partielle d'après (14) en considérant u comme constant

$$\frac{\delta v}{\delta n} = \frac{-2\pi}{\frac{\lambda_4}{3!} u (u^2 - 3v^2) - \frac{\lambda_3}{2!} (u^2 - v^2) + \lambda_2 u - \lambda_1} \tag{20}$$

Avec les valeurs (18) des λ, on constate que

$$\frac{\delta v}{\delta n} > 0$$

dans le demi-quadrant en question, où $-u < v$. Donc, pour toutes les valeurs de u, les courbes (14) dans ce demi-quadrant sont ordonnées de gauche à droite selon les valeurs croissantes de n. Il s'en suit que la courbe (13) coupe les courbes (14) de telle façon que les racines correspondant à $n = -1, -2, -3 \ldots$ sont elles-mêmes ordonnées selon les valeurs croissantes de $-u$ et de $+v$. Le cas des racines conjuguées correspondant à $n = +1, 2, 3 \ldots$ est tout analogue. En calculant les racines dans l'ordre indiqué, il n'y a donc pas de danger d'en omettre une plus importante que celles qu'on a déjà calculées.

Nous étant ainsi assurés que notre procédé donne les racines z_n dans l'ordre voulu, il reste à voir si la série qui en résulte est convergente. Dans ce but, nous allons examiner l'allure asymptotique de ses termes.

Valeurs asymptotiques de u et v. Pour n suffisamment grand, les termes de quatrième degré dominent les expressions (13), (14). Les quantités u, v tendent alors vers les valeurs correspondant d'après (13) à

$$u^4 - 6u^2 v^2 + v^4 = 0 \tag{22}$$

$$u = (1 - \sqrt{2})\, v \tag{23}$$

$$-v = (1 + \sqrt{2})\, u \tag{24}$$

et ensuite, d'après (14), à

$$v^4 = \frac{-6\pi n\,(3 + 2\sqrt{2})}{\lambda_4} \tag{25}$$

$$v = \left\{\frac{-6\pi\,(3 + 2\sqrt{2})}{\lambda_4}\right\}^{1/4} n^{1/4} = K_1\, n^{1/4} \tag{26}$$

$$u = \left\{\frac{-6\pi\,(3 - 2\sqrt{2})}{\lambda_4}\right\}^{1/4} n^{1/4} = K_2\, n^{1/4} \tag{27}$$

les coefficients K_1, K_2 étant indépendants de n.

Valeurs asymptotiques des coefficients A. Dans la formule (5), le dénominateur a la forme

$$-f'(z_n) = -\left\{\frac{\delta f(z)}{\delta z}\right\}_{z = z_n} \tag{28}$$

et puisque $f(z_n) = 1$

$$-f'(z_n) = -\left\{\frac{\delta f(z)}{f(z)\,\delta z}\right\}_{z = z_n} \tag{29}$$

$$= -\left\{\frac{\delta \log_e f(z)}{\delta z}\right\}_{z = z_n} \tag{30}$$

$$= -\left\{\frac{\delta \varphi}{\delta u} + i\,\frac{\delta \psi}{\delta u}\right\}_{z = z_n} \tag{31}$$

$$= U - i\,V = \frac{U^2 + V^2}{U + i\,V} \tag{32}$$

les coefficients U, V étant donnés d'après (13), (14)

$$U = \lambda_1 - \lambda_2 u + \frac{\lambda_3}{2!}(u^2 - v^2) - \frac{\lambda_4}{3!} u (u^2 - 3 v^2) \tag{33}$$

$$V = (\lambda_2 - 3 \lambda_3 u) v + \frac{\lambda_4}{3!} v (3 u^2 - v^2) \tag{34}$$

Le numérateur a une forme particulièrement simple dans l'exemple d'un système installé à l'époque $t = 0$ et maintenu constant par le remplacement immédiat des articles mis hors de service. Si l'installation originale comprend N articles, N étant aussi le nombre constant de l'installation, alors le terme correspondant à la racine réelle z_0 est tout simplement

$$A\, e^{z_0 t} = \frac{N\, e^{z_0 t}}{-f'(z_0)} \tag{35}$$

Pour les termes correspondant aux racines complexes, on trouve

$$A' e^{(u+iv)t} + A'' e^{(u-iv)t} = \frac{2 N e^{ut}}{U^2 + V^2} (U \cos vt - V \sin vt) \tag{36}$$

Les valeurs de U_n, V_n jusqu'à $n = 6$ sont présentées dans le Tableau II.

Tableau II.

Valeurs des constantes U_n, V_n.

n	U	V	$\frac{U}{U^2+V^2}$	$\frac{V}{U^2+V^2}$
0	10,0000	0,0	0,10000	0,0
1	11,1688	4,1458	0,07869	0,02921
2	14,3353	7,6696	0,05423	0,02902
3	18,4982	10,4425	0,04100	0,02314
4	23,1094	12,7773	0,03314	0,01832
5	27,8759	14,8877	0,02791	0,01491
6	32,5165	16,7797	0,02429	0,01253

Valeurs asymptotiques de U et V. On obtient des expressions pour les valeurs asymptotiques de U et V en retenant seulement les termes de plus haut degré dans (33), (34) et en introduisant la relation asymptotique

$$u = (1 - \sqrt{2})\, v \tag{23}$$

$$-v = (1 + \sqrt{2})\, u \tag{24}$$

On obtient ainsi les formules alternatives

$$U = -\frac{\lambda_4}{3}(2 - \sqrt{2})\, v^3 = \frac{\lambda_4}{3}(4 + 3\sqrt{2})\, u^3 \tag{37}$$

$$V = \frac{\lambda_4}{3}(4 - 3\sqrt{2})\, v^3 = \frac{\lambda_4}{3}(2 + \sqrt{2})\, u^3 \tag{38}$$

et par conséquent

$$V = (\sqrt{2} - 1)\, U \tag{39}$$

puis les valeurs asymptotiques

$$\frac{U}{U^2 + V^2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4\,U} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{(3 + 2\sqrt{2})}{\lambda_4} \cdot \frac{1}{v^3} \tag{40}$$

$$= C_1/n^{3/4} \qquad \text{d'après (26)} \tag{41}$$

$$\frac{V}{U^2 + V^2} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{(1 + \sqrt{2})}{\lambda_4} \cdot \frac{1}{v^3} \tag{42}$$

$$= C_2/n^{3/4} \qquad \text{d'après (26)} \tag{43}$$

les coefficients C étant indépendants de n.

Donc, dans la solution (3), les valeurs absolues des termes de la forme

$$\frac{U}{U^2 + V^2}\, e^{ut} \cos vt\,,$$

tendent vers

$$\left| \frac{C\, e^{-kn^{1/4}}\, e^{ut} \cos vt}{n^{3/4}} \right| < \left| C\, e^{-kn^{1/4} t} \right|$$

pour les grandes valeurs de n, les coefficients C et K étant indépendants de n. Le cas des termes en *sin vt* est tout à fait analogue. La convergence de la série (3) est alors assurée pour toute valeur de $t > 0$ par celle de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x^{1/4} t}\, dx$$

Les deux conditions que nous avons notées, auxquelles la solution formelle (3) doit satisfaire pour qu'elle soit utile, sont donc remplies dans le cas de notre exemple : la série (3) converge, et ses termes se produisent dans l'ordre voulu, si on les calcule selon la méthode indiquée, basée sur les équations (13), (14).