

Bemerkung zum Problem des Ruins beim Spiele

Autor(en): **Hadwiger, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **40 (1940)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-554977>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Bemerkung zum Problem des Ruins beim Spiele¹⁾.

Von *H. Hadwiger*, Bern.

Das Anfangsvermögen eines Spielers sei a . Bei jedem Spiele hat er mit gleicher Wahrscheinlichkeit einen Gewinn α oder einen Verlust β zu erwarten ($\alpha \leq \beta$).

Ein altbekanntes Ruinproblem besteht darin, die Wahrscheinlichkeit $p_n(a)$ zu ermitteln, dass der Spieler n Spiele hintereinander, ohne ruiniert zu werden, spielen kann. Der Spieler ist ruiniert, wenn sein Vermögen 0 erreicht oder unterschreitet. Derartige Probleme hat bereits *Laplace* (*Théorie analytique des probabilités*, Paris 1820, S. 228—242) aufgestellt und gelöst.

In dieser Note soll gezeigt werden, wie eine asymptotische Funktion für $p_n(a)$ als Lösung einer Randwertaufgabe gewonnen werden kann. Das Verhalten von $p_n(a)$ für grosse n kann dann mühelos abgelesen werden.

Wir gehen aus von der rekursiven Beziehung

$$(1) \quad p_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

$$(2) \quad p_{n+1}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{p_n(x + \alpha) + p_n(x - \beta)}{2}, & x > 0, \end{cases}$$

deren Gültigkeit direkt aus der Definition von $p_n(x)$ folgt. Wenn wir die Geldeinheit mit ε , die Dauer eines Spieles mit τ bezeichnen, so kann mit Hilfe einer Funktion von zwei Veränderlichen geschrieben werden

$$(3) \quad p_n(x) \sim p(x\varepsilon, n\tau) = p(u, t) \quad (x\varepsilon = u, n\tau = t).$$

¹⁾ Die Anregung zu dieser Studie verdanke ich Herrn *A. Alder* in Bern.

Die Rekursion (2) lesen wir jetzt

$$(4) \quad p(x\varepsilon, n\tau + \tau) = \frac{1}{2} \left\{ p([x + \alpha]\varepsilon, n\tau) + p([x - \beta]\varepsilon, n\tau) \right\},$$

wo ε und τ als sehr klein angenommen werden. Wenn wir den Ausdruck rechts nach der Formel von Taylor entwickeln und die 3. und höheren Potenzen von ε vernachlässigen, so erreichen wir

$$(5) \quad p(u, t - \tau) = p(u, t) + \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \varepsilon \frac{\partial p}{\partial u} + \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} \right) \varepsilon^2 \frac{\partial^2 p}{\partial u^2},$$

oder

$$(6) \quad \frac{p(u, t + \tau) - p(u, t)}{\tau} = \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \frac{\varepsilon}{\tau} \frac{\partial p}{\partial u} + \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} \right) \frac{\varepsilon^2}{\tau} \frac{\partial^2 p}{\partial u^2}.$$

Wird

$$(7) \quad A = \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \frac{\varepsilon}{\tau}, \quad B = \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} \right) \frac{\varepsilon^2}{\tau}$$

und für die linke Seite in (6) der partielle Differentialquotient gesetzt, so gewinnen wir die partielle Differentialgleichung

$$(8) \quad \frac{\partial p}{\partial t} = A \frac{\partial p}{\partial u} + B \frac{\partial^2 p}{\partial u^2}.$$

Mit Rücksicht auf die Bedeutung von $p(u, t)$ müssen noch die Randbedingungen erfüllt sein:

$$(9) \quad \begin{aligned} p(u, 0) &= 1, \quad u > 0 \\ p(0, t) &= 0, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Randwertaufgabe lautet

$$(10) \quad p(u, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-\frac{At+u}{\sqrt{4Bt}}}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4Bt}} d\xi - e^{-\frac{Au}{B}} \int_{-\frac{At-u}{\sqrt{4Bt}}}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4Bt}} d\xi \right\}.$$

Führen wir noch die Gaußsche Transzendent

$$(11) \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

ein, so kann für die Lösung geschrieben werden

$$(12) \quad p(u, t) = \Phi \left\{ -\frac{At+u}{\sqrt{4Bt}} \right\} - e^{-\frac{Au}{B}} \Phi \left\{ -\frac{At-u}{\sqrt{4Bt}} \right\}.$$

Wenn wir für u, t, A, B wieder die ursprünglichen Werte einsetzen, ergibt sich

$$(13) \quad p_n(x) \sim \Phi \left\{ -\frac{n(\alpha-\beta)+x}{\sqrt{2n(\alpha^2+\beta^2)}} \right\} - e^{-\frac{2x(\alpha-\beta)}{\alpha^2+\beta^2}} \Phi \left\{ -\frac{n(\alpha-\beta)-x}{\sqrt{2n(\alpha^2+\beta^2)}} \right\}.$$

Das asymptotische Verhalten von $p_n(x)$ für grosse n ist nach (13) in den drei Fällen

1. Fall $\alpha > \beta$;
2. Fall $\alpha = \beta$;
3. Fall $\alpha < \beta$;

völlig verschieden, und zwar gilt

$$1. \text{ Fall } \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = 1 - e^{-\frac{2x(\alpha-\beta)}{\alpha^2+\beta^2}};$$

$$2. \text{ Fall } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} p_n(x) = \frac{x}{\alpha \sqrt{\pi}};$$

$$3. \text{ Fall } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3} e^{\frac{(\alpha-\beta)}{2(\alpha^2+\beta^2)} n} p_n(x) = \frac{x}{(\alpha-\beta)^2} \sqrt{\frac{2(\alpha^2+\beta^2)}{\pi}} e^{-\frac{x(\alpha-\beta)}{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Zur Verifikation der Grenzwertrelation im 3. Fall kann die asymptotische Formel

$$\Phi(u) \sim \frac{e^{-u^2}}{2\sqrt{\pi}u}, \quad (u \gg 1)$$

angewendet werden ¹⁾).

Eine nicht verschwindende Wahrscheinlichkeit, beliebig lange ohne Ruin zu spielen, gibt es nur, wenn der Erwartungswert pro Spiel positiv ist. In den anderen Fällen strebt die genannte Wahrscheinlichkeit mit der Zahl n der Spiele gegen 0, und zwar wie die reziproke Quadratwurzel, wenn der Erwartungswert 0 ist, und sogar exponentiell, wenn er negativ ist.

¹⁾ Vgl. etwa: *R. v. Mises*, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen. Fr. Deuticke, Leipzig und Wien, 1931, S. 45.