Die Wahrscheinlichkeitstheorie im Versicherungswesen

B. Wissenschaftliche Mitteilungen

Die Wahrscheinlichkeitstheorie im Versicherungswesen.

Von *Heinrich Jecklin,* Zürich

Im wissenschaftlichen Programm des für 1940 vorgesehenen, zufolge der Zeitumstände aber leider nicht stattgehabten internationalen Kongresses der Versicherungsmathematiker stand als erstes Thema «die Wahrscheinlichkeitstheorie im Versicherungswesen». Der wissenschaftliche Ausschuss des Kongresses hat in seinerzeitigem Zirkular ausgeführt, dass es in Ansehung der Fortschritte, welche die Wahrscheinlichkeitsrechnung in der letzten Zeit zu verzeichnen hat, wertvoll zu wissen wäre, ob und wie sich diese Fortschritte für die Versicherungsmathematik auswirken. Es wurden in diesem Sinne die folgenden drei präzis formulierten Fragen vorgelegt: «Welche Hypothesen liegen der Versicherungsmathematik zugrunde und wie kann die Anwendung der Wahrscheinlichkeits- und Risikotheorie im Versicherungswesen begründet werden? Wie kann die Theorie unter besonderer Berücksichtigung ihrer Fortschritte für die Praxis nutzbar gemacht werden? Welche Bestätigung findet die Wahrscheinlichkeits- und Risikotheorie durch Erfahrungen aus dem Versicherungswesen?»

Verfasser amtete als Sachbearbeiter des ersten Kongressthemas und hat auf Einladung des Vorstandes der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker an der Jahresversammlung vom 19. Oktober 1940 in Zürich ein Referat über «Die Wahrscheinlichkeitstheorie im Versicherungswesen» gehalten. Einem mehrfach geäusserten Wunsche entsprechend werden die Ausführungen nachfolgend publiziert, allerdings in etwas umgearbeiteter Form. Diese Umgestaltung schien wünschenswert, weil die Kongress-Schriften mittlerweile im Druck erschienen sind, und es sich daher erübrigt, eingehend über jede einzelne Kongressarbeit zu referieren, wie dies anlässlich des Vortrages geschah. Unsere Darlegungen können sich vielmehr beschränken auf die seinerzeit gegebene gedrängte Übersicht über die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie in ihrer Beziehung zum Versicherungswesen, sowie deren gegenwärtigen Stand unter Berücksichtigung der durch die Kongress-Abhandlungen gezeitigten Ergebnisse.

Wenn man bedenkt, welch grosse Bedeutung die Wahrscheinlichkeitsrechnung und gewisse mit ihr in Zusammenhang stehende Theorien der mathematischen Statistik heute nicht nur im Versicherungswesen, sondern in weiten Gebieten von Wissenschaft, Technik und Wirtschaft überhaupt erlangt haben, so ist man versucht, von einem Siegeszug zu sprechen, über den die ursprünglichen Väter dieses Wissenszweiges (insbesondere Pascal 1623—1662) jedenfalls selbst erstaunt, ja betroffen gewesen wären. Die ersten Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung bezogen sich nur auf die Glücksspiele. Zwar hat bereits Jakob Bernoulli 1713 in seiner «ars conjectandi» dargelegt, dass die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung sich nicht nur auf die Glücksspiele erstrecke, sondern für viele Gebiete des praktischen Lebens von Bedeutung sei. In seiner modernen «Einführung in die mathematische Statistik» (1935) führt Anderson fast etwas boshaft aus: «Der Geburtsort der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist bekanntlich der Spieltisch. Aus einer Lehre, die sich hauptsächlich mit Würfeln, Münzenwerfen, Kartenziehen, Lotterielosen und dergleichen beschäftigte und sich nur zuweilen (und zwar ohne sichtbaren Erfolg) in das Gebiet der Wertung von Zeugenaussagen verirrte, ist sie allmählich zum Grundpfeiler der Statistik, des Versicherungswesens, der Physik und einer grossen Anzahl anderer Wissenschaften geworden. Die Traditionen ihrer Kinderjahre lasten aber bis jetzt noch ziemlich schwer auf der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung, und obwohl in ihr den Interessen des Spieltisches eigentlich herzlich wenig Bedeutung zukommt — kaum mehr als z. B. dem Küchentische in der Chemie —, kann man im Streite der Theoretiker, der noch immer um den Wahrscheinlichkeitsbegriff geführt wird, den Einfluss der einstigen hasardspielerischen Einstellung leicht erkennen.» — Von diesem Widerstreit der Meinung wird im folgenden eingehender zu sprechen sein.

Die auf Laplace zurückgehende klassische Definition des Begriffes «Wahrscheinlichkeit» lautet bekanntlich: «Unter der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird der Quotient aus der Anzahl der ihm günstigen Fälle durch die Anzahl aller gleichmöglichen Fälle verstanden.» Es ist nicht zu verwundern, dass diese Definition in der Folge zu zahlreichen Kontroversen und Interpretationen Anlass gegeben hat, worüber z. B. im Buche «Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung» von Czuber (1923) ausführlich berichtet wird. Insbesondere bereitete der Begriff der «Gleichmöglichkeit» grösste logische Schwierigkeiten. Es sei nur kurz daran erinnert, dass zahlreiche hervorragende Wahrscheinlichkeitstheoretiker (wie v. Kries, Lexis, Bortkieviez, Tschuprov) sich hinsichtlich der Aufstellung gleichmöglicher Fälle zum sogenannten «Prinzip des zwingenden Grundes» bekennen. (Etwas abgeschwächter spricht man auch vom «Prinzip des zureichenden Grundes».) Auch Altmeister Czuber gibt in seiner zweibändigen «Wahrscheinlichkeitsrechnung» (erste Ausgabe 1902) dieser Auffassung den Vorzug. Nach ihm geht die Wahrscheinlichkeitsrechnung von folgenden grundlegenden Annahmen aus:

1. «Von der Kausalität des Geschehens wird abgesehen, somit die Hypothese eines absoluten oder *reinen* Zufalls gemacht.

2. Dadurch ist auch die *Unabhängigkeit* zeitlich verschiedener Verwirklichungen der allgemeinen Bedingungen vorausgesetzt.

3. Bei jeder der Rechnung unterzogenen Materie wird eine Festsetzung über die *gleichmöglichen* Fälle getroffen.»

Als Definition der Wahrscheinlichkeit benutzt Czuber die genannte klassische Fassung, sagt aber gleichzeitig, dass diese *dann* Geltung hat, wenn das positive Wissen über eine Urteilsmaterie die Auflösung der Möglichkeiten in eine *zählbare* Menge gleichmöglicher Fälle gestattet. Damit will er schon darauf hinweisen, dass diese Definition nur zur Erledigung eines bestimmten Teiles von Fragen ausreiche; es handle sich hier um die sogenannte «mathematische Wahrscheinlichkeit» oder auch «Wahrscheinlichkeit a priori». Czuber sagt u. a. weiter: «Es bedeutet nun einen wichtigen Schritt in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie, dass man sie auch auf Ereignisse auszudehnen sucht, bezüglich welcher ein so geartetes Wissen (wie es die „Wahrscheinlichkeit a priori" voraussetzt) nicht vorliegt, wo jedoch der beobachtete Erfolg einer oder mehrerer Realisierungen zu Gebote steht. Denn die Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Naturerscheinungen und Vorgänge des praktischen Lebens bieten fast ausschliesslich Fälle dieser Art dar.» — «Neben die Ermittlung der Wahrscheinlichkeit auf Grund einer Analyse der Urteilsmaterie tritt als selbständige Methode die Wahrscheinlichkeitsbestimmung auf Grund von Erfahrungsdaten oder Versuchen über dieselbe.» Hier handle es sich um eine «Wahrscheinlichkeit a posteriori», auch «empirische» oder «statistische Wahrscheinlichkeit» genannt. Was die *Tragweite* der beiden Methoden anbetreffe, so sei die empirische Wahrscheinlichkeitsbestimmung der apriorischen weitaus überlegen! «Im speziellen Gebiet der menschlichen Massenerscheinungen», führt Czuber sodann an anderer Stelle weiter aus, «können unter bestimmten Voraussetzungen manche Relativ- resp. Verhältniszahlen der untersuchten Massenerscheinung als empirische Werte einer *festen* Wahrscheinlichkeit oder einer Funktion derselben angesehen werden.» Es wird also eine relative Häufigkeit als statistische Wahrscheinlichkeit gewertet. Inwieweit die notwendigen Voraussetzungen erfüllt seien, müsse auf Grund des Dispersions-Kriteriums von Lexis entschieden werden.

In diesem Zusammenhang sei noch rasch die diesbezügliche Auffassung von Lexis selbst in Erinnerung gerufen, wie sie von ihm in seiner «Theorie der Bevölkerungsstatistik» (1875) im Kapitel über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Erscheinungen des Bevölkerungswechsels dargelegt wird: «Kann die innere Natur des Verursachungssystems, welches die gegebene Massenerscheinung der Sterblichkeit bedingt, nicht aufgedeckt und zergliedert werden, so wird die naturwissenschaftliche Aufgabe der Bevölkerungsstatistik auf die Untersuchung beschränkt, ob die wirkenden unbekannten Ursachensysteme einem regellosen Wechsel unterworfen sind oder ob sie sich mit einer gewissen Konstanz behaupten. Im letzteren Falle werden auch in den beobachteten Resultaten gewisse Regelmässigkeiten hervortreten, und umgekehrt kann man aus solchen beobachteten Regelmässigkeiten auf eine annähernde Konstanz der Ursachensysteme zurückschliessen. Aus diesen Bemerkungen ergibt sich sofort, dass die naturwissenschaftliche Untersuchung der statistischen Massenerscheinungen nur die Aufgabe hat, die inneren Beziehungen derselben in der Form darzulegen, welche der Wahrscheinlichkeitsrechnung eigentümlich ist.» — Ein Kriterium dafür, ob die

Beobachtungswerte einer statistischen Reihe als empirische Werte einer typischen Wahrscheinlichkeit aufgefasst werden dürfen, ist — wie Lexis u. a. in seiner Schrift «Über die Theorie der Stabilität statistischer Reihen» darlegt — durch den sogenannten Divergenzkoeffizienten gegeben. Diesen erhält man bekanntlich, wenn man die Dispersion resp. den mittleren Fehler der Versuchsreihe einmal mit den Differenzquadraten aus den einzelnen Beobachtungswerten und deren Durchschnittswert direkt bildet, und sodann nach den Voraussetzungen des Bernoullischen Theorems mit dem Durchschnittswert als aposteriorische Wahrscheinlichkeit; die erstere Grösse dividiert durch die letztere ergibt den Divergenzkoeffizienten, und ein Maximum der Stabilität liegt vor, wenn er den Wert eins aufweist. «Die Totalschwankungen der *beobachteten* Verhältniszahlen», sagt Lexis, «setzen sich aus zwei Komponenten zusammen: die eine kann man als die *unwesentliche* bezeichnen, weil sie einem Schwankungssystem angehört, das auch bei *konstant* bleibender Grundwahrscheinlichkeit auftritt; die andere dagegen beruht auf der physischen Änderung der Grundwahrscheinlichkeit von Serie zu Serie und mag daher die physische Schwankungskomponente heissen». Dadurch, dass sich die unwesentlichen mit den physischen Schwankungen der Grundwahrscheinlichkeit kombinieren, resultiert eine sogenannte übernormale Dispersion, gekennzeichnet durch einen Wert des Divergenzkoeffizienten grösser als eins. Ist dieser Wert wesentlich grösser als eins, so besitzt der empirisch bestimmte Häufigkeitswert nicht den Charakter einer mathematischen Wahrscheinlichkeit.

So hatte es den Anschein, als ob die Wahrscheinlichkeitsrechnung als ein wohldurchforschtes, quasi voll entwickeltes und abgeschlossenes Wissensgebiet mit ausgebautem Formularium und abgeklärter Beziehung zum wirklichen Geschehen in das 20. Jahrhundert eintreten könnte. Aber auch hier war die Rechnung ohne die Kritik der Grundlagen gemacht, und so spricht man denn, namentlich in den letzten zehn Jahren, von einer Krisis der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wobei nicht genau festzustellen ist, wieweit die Rekonvaleszenz gegenwärtig gediehen ist. — Der Anstoss kam von seiten der Physik und fand vor allem Ausdruck in den Arbeiten von v. Mises; bekannt ist namentlich sein grosses Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung (1931), seine früheren Aufsätze gehen aber bis 1914 zurück. Mises entwickelt in seinen Arbeiten die Wahrscheinlichkeitsrechnung als Häufigkeitstheorie. Darin ist ihm die englische statistische Schule (Venn, Keynes, Pearson, Fisher) gewissermassen vorangegangen. Es wird hier, grob gesagt, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit der Häufigkeit seines Vorkommens in der Gesamtmasse der Ereignisse identifiziert. Den Lesern deutschsprachiger Literatur ist diese englische Auffassung namentlich durch das Lehrbuch von Coolidge in der Übersetzung von Urban (1927) bekannt geworden.

Die v. Misessche Theorie stellt eine Fortbildung und mathematisch konsequente Durchführung der englischen Häufigkeitstheorie dar, die in ihrer Art axiomatischen Charakter hat. Die Grundgedanken der v. Misesschen Theorie finden wir in dem Werk «Logik der Forschung» von Popper (1935) wie folgt zusammengefasst: „Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Theorie gewisser «zufallsartiger Ereignisfolgen». Diese Ereignisfolgen werden durch zwei axiomatische Forderungen, das «Grenzwertaxiom» und das «Regellosigkeitsaxiom», definiert. Genügt eine Ereignisfolge diesen beiden Forderungen, so heisst sie «Kollektiv». Ein «Kollektiv» ist zunächst eine grundsätzlich unbegrenzt fortsetzbare Folge von Ereignissen; z. B. eine Folge von Würfen mit einem als unzerstörbar gedachten Würfel. Jedes dieser Ereignisse hat ein gewisses Merkmal, z. B. das Merkmal «Fünferwurf». Dividiert man die Anzahl der Fünferwürfe, die bis zu einem bestimmten Glied der Folge aufgetreten sind, durch die Anzahl sämtlicher Würfe bis zu diesem Glied, also durch dessen Gliednummer, so erhält man die relative Häufigkeit der Fünferwürfe bis zu dem betreffenden Glied. Bestimmt man diese relative Häufigkeit für jedes Glied der Folge, so kann man der ursprünglichen Folge — der «Ereignisfolge» oder «Merkmalsfolge» — eine neue Folge, die «Folge der relativen Häufigkeiten», zuordnen. Das Grenzwertaxiom fordert nun, dass diese Folge der relativen Häufigkeiten einem bestimmten *Grenzwert* zustrebt, wenn die Merkmalfolge immer länger und länger wird. Durch das Grenzwertaxiom erreicht v. Mises, dass er mit *festen* Häufigkeitswerten rechnen kann, obwohl die einzelnen Werte der relativen Häufigkeiten schwanken. Das Regellosigkeitsaxiom oder «Prinzip vom ausgeschlossenen Spielsystem» soll den «zufallsartigen» Charakter der Folge mathematisch erfassen. «Wahrscheinlichkeit» ist also für v. Mises ein anderes Wort für «Grenzwert der relativen Häufigkeit innerhalb eines Kollektivs». Dieser Begriff ist somit nur auf Ereignisfolgen anwendbar. v. Mises fasst das Charakteristische seiner Theorie in vier Punkten zusammen: Der Begriff des Kollektivs wird dem der Wahrscheinlichkeit vorausgeschickt; diese wird als Grenzwert der relativen Häufigkeiten definiert; ein Regellosigkeitsaxiom wird aufgestellt; die Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird präzisiert.“ — In diesem Zusammenhange mag auch auf den unabhängigen, aber gedanklich verwandten Versuch einer Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie hingewiesen werden, der von Guillaume (1916) in der Zeitschrift «L'Enseignement Mathématique» veröffentlicht wurde.

Die Neubegründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch v. Mises wurde mancherseits lebhaft begrüsst, indem vor allem der Meinung Ausdruck gegeben wurde, es ergebe sich daraus eine befriedigendere Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung und bessere Klärung der Beziehungen zwischen Wahrscheinlichkeit und Erfahrung. Anderson z. B. sagt, es habe offensichtlich in der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorher ein gewisses Missverhältnis bestanden zwischen dem mathematisch zu *engen* Fundament der Grundbegriffe und dem stolzen mathematischen Bau, der darauf ausgeführt ist. Als eine — für uns besonders interessante — Zustimmung ist auch zu werten, dass im «Leitfaden der Algebra» im Unterrichtswerk des Vereins schweizerischer Mathematiklehrer (1938) die v. Misessche Auffassung Eingang gefunden hat. Wir lesen dort: «Es ist Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, den Grad der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Merkmals in regellos verlaufenden *nicht abbrechenden* Ereignisfolgen zu bestimmen, mit den gefundenen Werten zu rechnen und die Ergebnisse zu deuten.» «Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Merkmals in einer nicht abbrechenden, regellos verlaufenden Ereignisfolge ist gleich dem Grenzwert, dem die Häufigkeitsfolge mit wachsender Gliederzahl zustrebt.»

Anderseits erhoben sich auch sehr bald Einwände und Bedenken, welchen eine Berechtigung nicht abgesprochen werden kann. Von seiten der Mathematiker wurde insbesondere am Regellosigkeitsaxiom, seitens der Statistiker dagegen am Grenzwertaxiom Kritik geübt. So ist, wie Popper ausführt, eingewendet worden, «dass es unzulässig ist, den mathematischen Grenzwertbegriff auf eine Folge anzuwenden, die per definitionem (eben wegen des Regellosigkeitsaxioms) durch kein Bildungsgesetz darstellbar ist. Denn der Grenzwert oder Limes des Mathematikers ist ja nichts anderes als eine *Eigenschaft des Bildungsgesetzes* der Folge; nämlich die, dass man auf Grund des Bildungsgesetzes der Reihe immer ein Glied angeben kann, von dem ab die Abweichungen von einem festen Wert, eben ihrem Grenzwert, kleiner sind als eine beliebig kleine vorgegebene Grösse. So lesen wir denn auch in dem vorher genannten schweizerischen Algebra-Lehrmittel als Anmerkung: «Inwieweit es gestattet ist, Grenzwertbetrachtungen in die Wahrscheinlichkeitsrechnung einzubeziehen, ist noch nicht ganz abgeklärt.»

Es wurde darum von neuern Autoren versucht, nur das Grenzwertaxiom beizubehalten, das Regellosigkeitsaxiom dagegen durch eine weniger strenge Forderung zu ersetzen oder ganz wegzulassen. Als Beispiel des letzteren Standpunktes seien insbesonders die Lehrbücher von Kamke (1932) und Dörge (1939) genannt. Es werden dort nicht nur regellose Ereignisfolgen, sondern auch Zahlreihen mit offensichtlichem Bildungsgesetz zugelassen. Kamke unterscheidet darum zwischen «aussermathematischen» und «innermathematischen» Beispielen. Nun ist es aber leicht möglich, alternierende Folgen zweier Merkmale (z. B. 0 und 1) anzugeben, bei welchen das zu betrachtende Merkmal (z. B. 0) unendlich oft auftritt, wobei aber die zugeordnete Folge der Häufigkeiten doch eine Nullfolge ist, d. h. dem Limes Null zustrebt. Wir lesen darum bei Dörge: «Die Aussage, dass die Wahrscheinlichkeit eines Merkmals Null ist, ist demnach nicht gleichbedeutend mit der Unmöglichkeit des Auftretens dieses Merkmals», und «die Aussage, dass die Wahrscheinlichkeit eines Merkmals Eins ist, ist nicht gleichbedeutend mit der Gewissheit des Auftretens nur dieses Merkmals».

Hier wird mancher Leser bedauernd der «ehrlich-eindeutigen» klassischen Wahrscheinlichkeitsdefinition gedenken. In der Tat ist dadurch, dass auch gesetzmässige Folgen zugelassen werden, die Schwierigkeit der mathematischen Erfassung des Limesbegriffes bei regellosen Folgen in keiner Weise verringert, ja nicht einmal tangiert. Durch die Fortlassung der Forderung nach Regellosigkeit wird der Wahrscheinlichkeitsbegriff u. E. seinem innern Wesen nach zu etwas anderem und neuem gestempelt, indem — mit den Worten der klassischen Auffassung — die Hypothese des reinen Zufalls fallen gelassen wird. — Es kann in diesem Zusammenhange auch kaum als Beruhigung aufgefasst werden, wenn Dörge bemerkt, dass in einem anderen (speziell für die Physik bestimmten) Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Dinge in dieser Hinsicht anders liegen.

Andere Autoren wieder halten das Grenzwertaxiom für verfehlt. Die Ausschaltung des Grenzwertaxioms entspricht gewissermassen einem erkenntnistheoretischen Bedürfnis, fussend auf der Tatsache, dass eine unendliche Folge stets hypothetischer Natur und nie verifizierbar sein wird. Popper reicht unseres Erachtens an den Kern der Sache, wenn er sagt: «Es werden (zufolge der Grenzwertforderung) Folgen ohne Häufigkeitsgrenzwerte ausgeschlossen. In der angewandten Wahrscheinlichkeitstheorie hat man es aber nicht unmittelbar mit mathematischen Regelfolgen zu tun, sondern nur mit hypothetischen Ansätzen über empirische Folgen. Was für Überlegungen oder Vermutungen über Konvergenz und Divergenz sollten wir wohl über empirische Folgen anstellen, da doch Konvergenzkriterien auf sie ebensowenig anwendbar sind wie Divergenzkriterien? Alle diese unangenehmen Fragen entfallen mit dem Grenzwertaxiom!» Vom Standpunkt des Statistikers kann man den Einwand auch etwa so formulieren (siehe z. B. Hempel, Annalen der Philosophie, Bd. 5, 1935): Die Deutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes als Grenzwert hat keinen empirischen Gehalt. Der empirischen Nachprüfung sind stets nur endliche statistische Reihen zugänglich, und in der Anwendung werden die Wahrscheinlichkeitsaussagen einem empirischen Nachprüfungsverfahren unterzogen; es wird ihnen also ein empirischer Gehalt zugeschrieben. In diesem wichtigen Punkte ist also der Charakter des Wahrscheinlichkeitsbegriffes durch die Theorie nicht zutreffend erfasst.

Anderson ersetzt deshalb in seinem genannten Buche das unendliche Kollektiv durch das «statistische Kollektiv». Dieses ist eine gut durchmischte endliche Gesamtheit. «Das Ergebnis einer guten Mischung muss so sein, dass die Gesamtheit höherer Ordnung und die aus ihr entstandenen Gesamtheiten niederer Ordnung *ungefähr* dieselbe Zusammensetzung und Gliederung besitzen, d. h. mehr oder weniger *homogen* sind.» Die Mischung ist hier, wie Anderson bemerkt, durchaus keine mathematische, sondern eine rein technische, sozusagen alltägliche Angelegenheit, wie z. B. das Mischen von Beton; es handelt sich also um eine «*quaestio facti*, die durch keine Transformation von noch so komplizierten mathematischen Formeln herbeigeführt werden kann». Es wird dann definiert: «Wahrscheinlichkeit eines Merkmals im Bereiche eines statistischen Kollektivs ist seine Häufigkeit in einer andern Gesamtheit höherer Ordnung, aus der die gegebene entstanden ist. Ihr Entstehungsweg ist für die praktischen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie genauer zu präzisieren.» Und weiter sagt Anderson: «Wenn man einer mehr oder weniger durchmischten statistischen Gesamtheit aufs Geratewohl, d. h. ohne speziell auszuwählen und zu suchen, ein Element entnimmt, so wird es sehr selten vorkommen, dass dieses Element gerade ein solches Merkmal aufweist, dessen relative Häufigkeit in der Gesamtheit sehr klein ist.» — «Bei statistischen Kollektiven genügend grossen Umfanges kommen grössere Abweichungen der relativen Häufigkeiten von den ihnen entsprechenden statistischen Wahrscheinlichkeiten nur selten vor.»

Hiezu führt Mahr (in der Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, 1937, 4. Heft) aus: «Den Tatbestand dieses Gesetzes lässt sich die Wirklichkeit nicht aufzwingen, der Mensch kann ihn nur in ihr feststellen. Nicht alle Massen, nur jene, in denen sich eine gewisse Ordnung vollzieht, kennen eine Wahrscheinlichkeitsgliederung, und allein unter der Voraussetzung der durchgängigen Gültigkeit dieser Ordnung können wir die Wahrscheinlichkeitsziffer auf artgleiche, noch unbekannte Massen übertragen. In zu kleinen Massen kann diese Ordnung unvollendet und damit unerkennbar sein, in grossen wird sie sich immer sicherer finden lassen. Die Wahrscheinlichkeit selbst stellt sich uns dann als der in hinreichendem Masse beständige Häufigkeitswert dar, dessen Schwankungsbreite mit zunehmender Massengrösse abnimmt. Wahrscheinlichkeit und statistisches Kollektiv sind so innig verbunden, dass nur der in einer gewissen Variationsbreite bleibende Häufigkeitswert das tatsächliche Vorliegen eines statistischen Kollektivs verbürgt.» Und weiter: «Die dargestellte Bestimmung des Begriffes Wahrscheinlichkeit gewährt die Möglichkeit, ihn zu erkennen: Man beobachtet mehrere artgleiche Massen auf den Häufigkeitswert eines bestimmten Ereignisses und untersucht, ob die Streuung der so erhaltenen Häufigkeitszahlen um ihren Mittelwert dem Gaußschen Wahrscheinlichkeitsintegral entspricht. Sofern dies zutrifft, kann man diesem Mittelwert einen Wahrscheinlichkeitscharakter zusprechen; im gegenteiligen Falle weist die untersuchte Gesamtheit keine Wahrscheinlichkeitsgliederung auf und ist kein statistisches Kollektiv.»

Einmal so weit, kann man sich unseres Erachtens doch fragen, ob man nicht auf einem Umwege wieder zu einer Stellungnahme gelangt ist, die von früheren Ansichten nicht allzusehr verschieden ist. Man erinnere sich nur der bereits vorgetragenen Auffassung, die von Czuber hinsichtlich der «empirischen Wahrscheinlichkeit» vertreten wird. Es muss allerdings darauf hingewiesen werden, dass Anderson ausdrücklich bemerkt, es handle sich bei ihm um eine auf die Bedürfnisse der mathematischen Statistik zugestutzte Wahrscheinlichkeitsrechnung, und es bleibe die Frage ganz unberührt, welche Wahrscheinlichkeitsdefinition im Bereiche anderer Wissenschaften bequemer sei. In der Tat könnte man z. B. im Hinblick auf erkenntnistheoretisch-logische Probleme auf die Untersuchungen von Reichenbach mit seiner Theorie der «mehrwertigen Logik» oder bezüglich der exakten Naturwissenschaften auf den Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung nach Tornier mit der «Versuchsvorschrift» als Ausgangsbasis verweisen usw. Aber damit, dass die einzelnen Wissensgebiete je eigene Definitionen des Begriffes der Wahrscheinlichkeit aufstellen, dürfte die Gesamtsituation kaum klarer geworden sein.

Mit den Augen des Praktikers gesehen wird einem Lehrgang der Wahrscheinlichkeitsrechnung der Vorzug zu geben sein, der kurzgefasst und doch leicht verständlich das notwendige Rüstzeug vermittelt, wie dies z. B. in der Darstellung von Pólya in Abderhaldens Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden geschieht. Wenn hiebei der klassischen Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs als Ausgangspunkt der Vorzug gegeben wird, so ist das im Hinblick auf die unmittelbare Möglichkeit der Veranschaulichung mit Urnenschema und ähnlichen Hilfsmitteln zumindest kein Mangel. Beim Übergang zur Behandlung der empirischen Häufigkeits- und Wahrscheinlichkeitswerte ergibt sich immer noch genügend Gelegenheit, die Beziehungen zwischen Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischer Statistik zu klären, wobei die bezüglichen Kapitel des Buches «Die statistischen Forschungsmethoden» von Czuber-Burkhardt gute Dienste leisten können.

Wenden wir uns nun speziell der Rolle des Wahrscheinlichkeitsbegriffs im Versicherungswesen zu. «Die älteren Statistiker und die ersten Lebensversicherungstechniker», führt Braun in seiner «Geschichte der Lebensversicherung und der Lebensversicherungstechnik» (1925) aus, «haben bei der Verwendung der Verhältniszahlen, die man Sterbens- oder Lebenswahrscheinlichkeiten nennt, sich keine besonderen Gedanken darüber gemacht, ob den Massenerscheinungen, aus denen diese Werte abgeleitet sind, ein solcher Komplex von Bedingungen zugrunde liegt, dass diese Zahlen als empirische Werte einer festen Wahrscheinlichkeit oder einer Funktion dieser Wahrscheinlichkeit angesehen werden könnten.» Es dauerte ordentlich lange, bis sich bezügliche Bedenken und Zweifel äusserten. Aber auch als durch die Publikationen von Lexis (mehr als hundert Jahre nach Gründung der ersten Lebensversicherungsgesellschaft auf richtiger Grundlage) die Hilfsmittel bzw. methodischen Verfahren an die Hand gegeben und verschiedentlich (Peek, Blaschke, Braun u. a.) Untersuchungen über die Divergenzkoeffizienten verschiedener statistischer Verhältniszahlen, insbesondere der Sterbenswahrscheinlichkeit, durchgeführt worden waren, konnte keine überzeugende Klarheit geschaffen werden. So äussert v. Kries in seinen «Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung» (1886) die Ansicht, dass gerade durch die ausgedehnten zahlenmässigen Untersuchungen von Lexis dargetan sei, «dass im Gebiete der Massenerscheinungen der menschlichen Gesellschaft eine zutreffende Angabe numerischer Wahrscheinlichkeit fast nirgends gemacht werden kann». Blaschke in seinen «Vorlesungen über mathematische Statistik» (1906) hingegen äussert sich schon ganz positiv: «Die Frage, ob die Fundierung des Versicherungswesens auf der Wahrscheinlichkeitstheorie möglich sei, kann für die Lebensversicherung unbedingt bejaht werden.» Czuber ist in seinem bereits genannten grossangelegten Lehrbuche auffallend vorsichtig. Ganz im Konjunktiv führt er aus, dass der gewöhnlich als einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit bezeichnete Quotient als empirische Wahrscheinlichkeitsgrösse anzusehen wäre, wenn eine vorausgehende Untersuchung gezeigt hätte, dass die für gleichaltrige Personen aus verschiedenen Geburtszeiten bestimmten Verhältniszahlen aus Toten- und Lebendenziffern normale Dispersion aufweisen. Er gibt zu, dass über diesen Gegenstand zurzeit erst wenige Arbeiten vorliegen. Auch Broggi in seiner «Versicherungsmathematik» (1911) hält es mit der Vorsicht. Nachdem er über die verschiedenen Berechnungen von Divergenzkoeffizienten hinsichtlich der Sterblichkeit berichtet hat, kommt er zum Schluss: «Wenn es also auch nicht völlig begründet ist, die Frage der Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Lebensversicherungsmathematik entschieden zu bejahen, so scheinen doch die vorhergehenden Untersuchungen (jedenfalls, wenn man die ersten Altersstufen ausschliesst) eher eine bejahende als eine verneinende Antwort zuzulassen.»

Mises hält die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Lebensversicherung offenbar als durchaus zulässig. Er streift zwar in seiner «Wahrscheinlichkeitsrechnung» die Frage nur äusserst kurz, indem er auf die Konstruktion von Absterbeordnungen auf Grund von Beobachtungen der Lebensdauer hinweist und dies als eines der wichtigsten Anwendungsgebiete bezeichnet. Eine gründlichere Behandlung wäre um so erwünschter, als Mises in seinem Buche «Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit» (1928) recht ausführlich über die durch die physische (resp. wesentliche) Schwankungskomponente verursachte übernormale Dispersion der Todesfallstatistik berichtet.

Eine sehr wesentliche Förderung haben wir den 1932 publizierten umfangreichen Untersuchungen von Lange zu verdanken (Wirtschaft und Recht der Versicherung 1932, Heft 2). Auf Grund der Statistik des Staates Preussen der Jahre 1867—1929 stellt er fest, dass sich die Sterbequotienten der verschiedenen erreichten Alter im wesentlichen so verteilen, dass ihre Abweichungen von der Sterbenswahrscheinlichkeit als durch die Zufallsgesetze bedingt gelten können, d. h. also, dass der Häufigkeitsstreckenzug der Schwankungen sich an eine Gaußsche Fehlerkurve anpasst. Ähnliche Untersuchungen hat Lange auch bezüglich der Feuerversicherung durchgeführt. Hier kommt er zum Schluss, dass sich die Häufigkeitsstreckenzüge der Abweichungen von der Schadenswahrscheinlichkeit den Pearsonschen Kurventypen anpassen. Über deren Zusammenhang mit dem Urnenschema für Wahrscheinlichkeitsansteckung haben bekanntlich die Untersuchungen von Pólya Klarheit gebracht. — Wir werden im folgenden noch auf die Arbeit von Lange zurückkommen müssen.

Die Misesschen Gedankengänge für eine Neufundamentierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung mussten, wie wohl zu erwarten, auch bei den Theoretikern des Versicherungswesens eine Reaktion hervorrufen. Auf dem internationalen Mathematikerkongress in Zürich 1932 hat Riebesell einen Vortrag gehalten über das Thema «Was folgt aus dem Misesschen Wahrscheinlichkeitsbegriff für die Versicherungsmathematik?» (Abgedruckt in den «Blättern für Versicherungsmathematik».) Riebesell erinnerte an eine Abhandlung von Englund in der österreichischen Revue 1932, wo die Behauptung aufgestellt wird, dass der Begriff Wahrscheinlichkeit aus der Versicherungsmathematik entfernt werden müsse, wobei sich Englund auf die Misessche Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs beruft. «Diese Berufung», sagt Riebesell, «ist unzulässig. Der Begriff der Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeit in einem Kollektiv führt allerdings dazu, sowohl in der Lebensversicherungsmathematik als auch in der Sachversicherungsmathematik die Begriffe Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit voneinander zu trennen. Die Untersuchung der Frage, ob es sich bei einem Versicherungsbestand um einen endlichen Abschnitt eines echten Kollektivs handelt, ist aber eine typische Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.» Wenn man sich zunächst frage, ob man es in der Lebensversicherung mit echten Kollektiven zu tun habe, so sei zu prüfen, ob ein Grenzwert in der relativen Häufigkeit vorhanden ist und ob das Axiom der Regellosigkeit erfüllt ist. Das Kollektiv ist uns gegeben durch die auf den Versicherungsbestand bezogene, gedanklich ad infinitum fortsetzbare Ereignisfolge, mit den Merkmalsalternativen 0 und 1, die den einzelnen Policen fortlaufend zu Ende ihres Versicherungsjahres zugeteilt werden, je nachdem, ob der Versicherte noch lebt oder innerhalb desselben verstorben ist. Will man nun feststellen, ob es sich bei einzelnen Zeitabschnitten, z. B. Kalenderjahren, um beliebige Teilfolgen eines echten Kollektivs handelt, so sind die Ergebnisse mehrerer solcher Zeitabschnitte bzw. Jahre zu betrachten. «Wären sie beliebige Teilfolgen eines echten Kollektivs, so würde sich, wenn man in jeder Teilfolge die relative Häufigkeit für das Auftreten der 1 feststellen würde, eine Gauss-Verteilung ergeben. Die Umkehrung dieses Satzes gilt aber nicht. Ich darf nicht schliessen, dass, wenn für mehrere Jahre die Häufigkeiten eine Gauss-Verteilung aufweisen, unbedingt das zugrunde liegende Kollektiv ein echtes Kollektiv im Sinne der Misesschen Definition ist. Dieser Schluss ist immer nur mit den durch das Gaußsche Wahrscheinlichkeitsintegral gezogenen Grenzen zulässig. Immerhin kann als erstes Erkennungsmerkmal für die Existenz einer Wahrscheinlichkeit das Kriterium der Gauss-Verteilung der relativen Häufigkeiten dienen. Führt man diese Untersuchungen in der Lebensversicherung durch, so ergibt sich, dass die Abweichungen in den Sterbequotienten von ihrem „Erwartungswert“ eine „Gauss-Verteilung“ ergeben.» Riebesell erinnert in diesem Zusammenhange an die genannten Untersuchungen von Lange. — Im weitern weist Riebesell darauf hin, dass die Sachlage in der Sachversicherung komplizierter ist als in der Lebensversicherung, und zwar hauptsächlich wegen des Auftretens von Teilschäden. Die Schadenwahrscheinlichkeit ist als Produkt aus «Ausbruchswahrscheinlichkeit» und «Ausbreitungswahrscheinlichkeit» zu denken. (Statt «Ausbreitungswahrscheinlichkeit» wird oft auch, vielleicht etwas verständlicher, die Bezeichnung «durchschnittliche Entschädigungshöhe» verwendet.) Eine besondere Schwierigkeit besteht auch darin, dass vielfach (z. B. in der Feuerversicherung) die einzelnen Objekte verschieden hoch versichert sind und eine Aufteilung in Einheiten der Versicherungssumme prinzipiellen und praktischen Schwierigkeiten begegnet. Es ist zum vornhinein klar, dass die Schadenhäufigkeiten der Sachversicherung im allgemeinen keiner Gaußschen Verteilung genügen werden, doch ist Riebesell überzeugt, dass sich die hier vorliegenden Kollektive mit den Methoden der Wahrscheinlichkeitsansteckung analysieren lassen.

In seiner «Einführung in die Sachversicherungs-Mathematik» (1936) versucht dann Riebesell, wie er in der Einleitung sagt, den neuesten Stand der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik auf die Praxis zu übertragen. Bei der Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs wird hier das Regellosigkeitsaxiom nicht mehr erwähnt: Liegt eine *unendliche* Ereignisfolge vor, so wird diese, wenn bezüglich der zugeordneten Häufigkeitsfolge eines bestimmten Merkmals ein Grenzwert existiert, eine Wahrscheinlichkeitsfolge genannt, und genannter Grenzwert ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Merkmals in der gegebenen Ereignisfolge. Gewissermassen etwas wirklichkeitsnaher heisst es aber dann: «Da wir es in der Praxis niemals mit unendlichen Folgen zu tun haben, soll von Häufigkeit gesprochen werden, wenn wir es mit *bestimmten* Versicherungsbeständen zu tun haben, von Wahrscheinlichkeit dagegen, wenn wir die Häufigkeiten auf mehrere Versicherungsbestände ausdehnen und *Mittelwerte* aus den Häufigkeiten ableiten, die wir als kennzeichnend für das Geschehen in dem betreffenden Versicherungszweig betrachten.»

Wenn schon anfänglich viele Aktuare der gleichen Meinung sein mochten wie Boehm, der in seinem «Versuch einer systematischen Darstellung der modernen Risikotheorie» (erschienen in den «Blättern für Versicherungsmathematik» 1935) sagt, dass das Lehrbuch von

v. Mises auf lange Zeit für das Studium und für die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung massgebend sein werde, so zeigte sich doch bald, dass die von seiten der Statistiker vorgebrachten Einwände gegen die v. Misessche Wahrscheinlichkeitsdefinition nicht zuletzt auch wegen der Sachlage in der Versicherung begründet schienen. Als bezeichnend in dieser Hinsicht kann die Stellungnahme von Münzner in dem neuen Schulungs- und Nachschlagewerk «Deutsche Versicherungswirtschaft» (1939) gelten. Er sagt: «Die aus einer beobachteten Gesamtheit ermittelten statistischen Masszahlen haben zunächst nur für die *beobachteten* Merkmalsträger selbst Gültigkeit. Für die Versicherung und jedes andere Anwendungsgebiet der Statistik entsteht nun die wichtige Frage, unter welchen Bedingungen und in welchen Grenzen die gewonnenen Masszahlen auch für *andere*, nicht beobachtete Gesamtheiten *gleicher Art* zutreffen. Das Problem besteht also darin, auf Grund einer Reihe von Beobachtungen (Stichproben) Rückschlüsse auf die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeit (im Urnenbeispiel auf das Mischungsverhältnis) zu ziehen. Die Gesamtheit aller *gleichartigen* Merkmalsträger in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft stellen wir uns als eine solche Kugelgesamtheit in einer Urne vor. In dieser umfassenden Gesamtheit, die wir im Anschluss an Anderson als eine *Gesamtheit höherer Ordnung* bezeichnen, ist für jeden Merkmalswert eine bestimmte relative Häufigkeit vorhanden. Diese relativen Häufigkeiten in einer höheren Gesamtheit nennen wir *Wahrscheinlichkeiten.* Auf Grund der in der Vergangenheit gemachten Beobachtungen, die wir als Stichproben aus der höhern Gesamtheit auffassen, wollen wir Aussagen machen, die über die *beobachteten* Gesamtheiten hinausgehen.» Und weiter: «Die wichtigsten Bausteine der statistischen Masszahlen sind die relativen Häufigkeiten oder, wenn wir die höhern Gesamtheiten betrachten, die Wahrscheinlichkeiten. Diese Wahrscheinlichkeiten können aus beobachteten relativen Häufigkeiten geschätzt werden.»

Nach alledem ist es recht interessant festzustellen, dass die verschiedenen Autoren der Kongressabhandlungen 1940 hinsichtlich des Begriffs der Wahrscheinlichkeit und der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Versicherungswesen durchaus nicht einhelliger Meinung sind. Zwar sagt Berger in seiner äusserst interessanten Schrift, dass seines Erachtens die Möglichkeit einer theoretischen Begründung der Anwendung der Wahrscheinlichkeits- und Risikotheorie in der Lebensversicherung ausser allem Zweifel stehe. Es handelt sich bei ihm jedoch um einen rein formalen Aufbau, sozusagen axiomatischen Charakters, in welchem von einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Basis im Sinne des Bohlmannschen Axiomensystems ausgegangen wird und wobei als weitere Arbeitshypothese nur noch das Äquivalenzprinzip in Betracht kommt. Nicht nur Prämien- und Prämienreserveformeln, sondern auch die Sätze der Theorie des Risikos lassen sich in diesem Rahmen in elementarer Weise ableiten. Als zentraler Begriff der Mathematik der Lebensversicherung erscheint die Prämienreserve, welche auf Grund des Äquivalenzprinzips in verschiedener Weise definiert werden kann und im allgemeinen aus dem Schema der Gewinn- und Verlustrechnung abgeleitet wird. Es ist aber auch möglich, zu diesem Zwecke vom Risikobegriff Gebrauch zu machen, und unter Heranziehung des Begriffes der mittleren Verlusterwartung gibt Berger eine neue Definition der Prämienreserve, wonach diese als jene Rücklage erscheint, für welche stets das kleinste mittlere Risiko für die restliche Versicherungsdauer gegeben ist. Diese von Berger mit «Verschiebungssatz der Versicherungsmathematik» bezeichnete Beziehung wurde bereits in seiner Abhandlung im Festband Furtwängler aufgezeigt und hat auch in seinem neuen Lehrbuch Eingang gefunden. — Entscheidend bei diesem Aufbau der Lebensversicherungstechnik ist die Annahme von der Unabhängigkeit der Sterbens- und Überlebenswahrscheinlichkeiten. Von diesem theoretischen Standpunkt aus gesehen ist somit eine Lebensversicherung als ein über ein bestimmtes Zeitintervall erstrecktes Spielsystem im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung anzusehen. Die Überprüfung, ob sich die grundlegende Annahme der Unabhängigkeit in Wirklichkeit bewährt, wird hiebei offenbar ganz der praktischen Erfahrung zugewiesen.

Aber gerade in diesem letzteren Punkte gehen die Meinungen auseinander, und es will scheinen, dass die Ansichten der verschiedenen Aktuare mehr denn je differieren: Die einen verneinen die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Versicherungsprobleme, andere bejahen sie oder setzen sie als unumgänglich voraus, und über den Begriff der Wahrscheinlichkeit selbst herrscht erst recht keine einheitliche Meinung. Es dürfte wohl nützlich sein, in diesem Zusammenhange an den erkenntnistheoretischen Aufsatz «Versicherungsmathematik und Wirklichkeit» von Nolfi zu erinnern

(Mitteilungen, Bd. 37). Er führt dort ungefähr aus: Die strenge Nachprüfung, ob ein Versicherungsbestand ein Kollektiv im Misesschen Sinne darstellt, ist gar nicht möglich. Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff dagegen ist, obzwar ein dank unseres Abstraktionsvermögens entstandener Idealbegriff, klar und eindeutig. Wörtlich heisst es sodann: «Die „Mängel", die man der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie vorwirft, sind im Grunde dieselben, wie sie jeder abstrakten Darstellung konkreter Dinge der Aussenwelt naturgemäss innewohnen. Diese Theorie deshalb zu verwerfen, erscheint ebenso falsch wie ihre kritiklose Verwendung zur Lösung praktischer Aufgaben. Die Kernfrage kann nicht die sein, ob der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff wahr oder falsch ist, sondern inwieweit er *nützlich* sein kann für die Erfassung konkreter Vorgänge. Es ist unverkennbar, dass die Wahrscheinlichkeitstheorie im Versicherungswesen ausgezeichnete Dienste zu leisten vermag, wie es auch unbestreitbar ist, dass eine blinde Anlehnung an die Theorie zu falschen Resultaten führen kann.»

Soviel steht unbedingt fest, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung für die Entwicklung der Versicherungstechnik sich äusserst fruchtbar ausgewirkt hat und dass sich ihre Verwendung als eminent praktisch erweist, selbst dort, wo ohne ihre Hilfe auszukommen wäre. Daraus ist jedenfalls auch die Stoffgestaltung moderner Lehrbücher der Lebensversicherungsmathematik (z. B. Berger, Levi) zu erklären, welche weder auf eine Diskussion der Definition des Begriffes der Wahrscheinlichkeit, noch auf die Berechtigung seiner Verwendung näher eintreten und doch durchwegs davon Gebrauch machen. Anderseits muss man sich auch darüber klar sein, dass die elementare Versicherungstechnik sich unter Voraussetzung der Sterbetafel als statistischer Gegebenheit ganz ohne Benutzung der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufbauen lässt. So sagt z. B. Blaschke in seiner bereits zitierten «Mathematischen Statistik», dass die Behandlung aller Versicherungstheoreme im damaligen Umfange (das Buch erschien 1906) ohne alle Wahrscheinlichkeitsrechnung möglich sei. Verfasser selbst hat 1922 bei Tauber eine Einführungs-Vorlesung in die Mathematik der Lebensversicherung gehört, in welcher Lebens- und Sterbens-Wahrscheinlichkeit nur nebenbei Erwähnung fanden und bei der Aufstellung der Formeln für Barwerte, Prämien und Reserven nicht verwendet wurden. In der Einleitung zu seinem Aufsatz «Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlegung der Versicherungsmathematik» (Assekuranz-Jahrbuch 52) sagt Vajda ziemlich wörtlich folgendes: «Zwischen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Versicherungsmathematik bestehen bisher nur geringe Beziehungen. Zwar werden bei der Aufstellung von Ausscheideordnungen statistische Überlegungen angewendet, mit der Fertigstellung der Tafel hat aber die Statistik ihre Rolle ausgespielt. Die Prämienberechnung erfolgt auf Grund des Äquivalenzprinzips unter der Annahme, dass die in der Tafel vermerkte Anzahl von Personen eine Versicherung abschliesst und dass dann der Ablauf der für die Versicherung wesentlichen Ereignisse genau nach den Angaben der Rechnungsgrundlagen erfolgt. Die Beschreibung dieses Vorganges mit Hilfe von Ausdrücken, die der Wahrscheinlichkeitstheorie entnommen sind, ist eine naheliegende, doch häufig verwirrende Konvention. — Die geschilderte Methode lässt sich für die Berechnung der Prämien ohne Schwierigkeiten verwenden; sie versagt aber, wenn gerade die Abweichungen von den Tafelwerten Gegenstand der Untersuchung bilden sollen. Dies ist in der Risikotheorie der Fall.»

Damit kommen wir zum Schluss, dass zumindest mit Eintreten auf Fragen der Risikotheorie, und zwar sowohl bei Bejahung derselben als bei begründeter Ablehnung, es doch unumgänglich ist, sich mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung genauer zu befassen. Für die Befürworter der Risikotheorie erhebt sich sodann die weitere Frage, ob die Risikotheorie richtigerweise an den Anfang oder an das Ende der Versicherungsmathematik zu stehen kommt. In didaktischer Hinsicht wird man sich für das letztere entscheiden. In dem genannten Aufsatz dagegen beschreitet Vajda den ersteren Weg. Er führt aus: «Wenn nur eine Ausscheideordnung der gebräuchlichen Art vorliegt, verfährt die Risikotheorie so, dass sie gewisse der Ausscheideordnung entnommene Verhältniswerte als Wahrscheinlichkeiten auffasst und aus diesen andere, zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten berechnet. Für einen tieferen Einblick in den Umfang des Risikos muss aber verlangt werden, dass eine Ausscheideordnung für jeden Wert des Merkmals nicht nur eine einzige Angabe, sondern eine Verteilungsfunktion enthält. Für jede mögliche Abweichung wird so die Wahrscheinlichkeit ihres Eintreffens angegeben.» Eine solche Tafel nennt Vajda die «erweiterte Sterbetafel». Er nimmt damit Gedankengänge auf, die schon frühere Autoren zum Ausdruck gebracht haben. So lesen wir bei Lexis: «Der in der Regel als Sterbenswahrscheinlichkeit einer Altersklasse bezeichnete empirische Quotient ist in Wirklichkeit nur die relativ wahrscheinlichste Sterbenswahrscheinlichkeit, deren Schwankungsbreite von der Zahl der beobachteten Lebenden abhängig ist. Zwei Quotienten dieser Art, die für dieselbe Altersklasse aus verschiedenen Zahlen von Lebenden abgeleitet sind, können daher nicht ohne weiteres miteinander verglichen werden, weil die Grenzen ihrer Genauigkeit möglicherweise sehr verschieden sind. Es müssten also die wahrscheinlichen oder die äussersten Abweichungen beigefügt werden, oder es müssten die ursprünglichen absoluten Zahlen mitgeteilt werden, aus denen man jene Abweichungen bestimmen könnte.» Und Blaschke sagt hinsichtlich der Anwendung der Wahrscheinlichkeitslehre im Versicherungswesen: «Die Berechnungen der Prämien und Deckungskapitalien stützen sich allein auf den Satz, dass die einmal beobachteten Durchschnittsergebnisse der Statistik bei Wiederholung der Beobachtung nahezu wiederkehren und die Häufigkeit der Abweichung von bestimmter Grösse mit der Grösse selbst abnimmt. Über die Form des Gesetzes der Abweichungen wird keinerlei Voraussetzung gemacht und aus solcher Form demgemäss auch keinerlei Resultat gezogen. Und doch könnte die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung erst mit der Einführung eines Fehlergesetzes selbst ihren Anfang nehmen.»

Wir wissen, dass die klassische Risikotheorie auf der Annahme einer Normalverteilung der Schadenquotienten basiert. Vajda zeigt, dass es für einen wahrscheinlichkeitstheoretischen Aufbau der Versicherungsmathematik jedoch nicht nötig ist, die Gaußsche (resp. Bernoullische) Verteilung zu bevorzugen, es wird im Gegenteil die Verwendbarkeit anderer Verteilungsfunktionen (wie z. B. von Poisson, Pólya-Eggenberger usw.) durch mancherlei Überlegungen nahegelegt. Es werden dann aber die gewohnten Formeln der Risikotheorie nicht mehr gelten. Vajda nimmt den Gedanken der «erweiterten Sterbetafel» in seiner Kongressabhandlung wieder auf und wird dabei sekundiert durch die beiden Arbeiten von Lukacs und Boschan. Es ergibt sich, dass ausser der Voraussetzung einer Verteilungsfunktion für die Sterbehäufigkeit jeden Alters (an Stelle einer festen Sterbenswahrscheinlichkeit) und der Annahme, dass die beobachteten Todesfälle mit der Erweiterung des Beobachtungsmaterials zahlenmässig proportional anwachsen, keine zusätzlichen Annahmen nötig sind, um auch bei einer solchen Grundlegung der Lebensversicherungs-Mathematik die Formeln für Prämien, Prämienreserven und Risikotheorie zu erhalten. Für die Risikotheorie können verallgemeinerte Formeln hergeleitet werden, die sich unter Beiziehung bestimmter Verteilungsfunktionen spezialisieren lassen. Durch ein solches Vorgehen kann der Risikotheorie eine empirische Basis gegeben werden; um dies aber praktisch zu erreichen, müsste zukünftig die Verteilung der Abweichungen von den Mittelwerten der Sterblichkeit nicht mehr supponiert, sondern auf Grund von Beobachtungen festgestellt werden. — Die Frage wird besonders interessant, wenn wir auch die Sachversicherung miteinbeziehen. In einem Diskussionsvotum auf dem Pariserkongress äusserte Riebesell: Nur die einfachste Annahme über die Wirkung des Zufalls führt zur Normalverteilung (Gauss). Oft sind Beobachtungsgrössen *Funktionen* einer normal schwankenden Variablen. Man darf darum nicht annehmen, dass die Gaußschen und Pearsonschen Verteilungskurven die einzig möglichen seien; der Normalkurve gebührt nicht einmal ein Vorrang.

Die Theorie der Verteilungskurven ist sicher äusserst nützlich und deren hypothetische Verwendung in der Risikotheorie ganz interessant. Wenn wir aber im Hinblick auf die praktische Verwertung einen Schritt weiter kommen wollen, dann brauchen wir Statistiken, welche den verschiedenen Hypothesen ihre innere Berechtigung verleihen. In der Lebensversicherung z. B. kann es nicht voll befriedigen, wenn (wie dies fortwährend geschieht) beim Aufbau der Risikotheorie einfach auf das Bernoullische Urnenschema Bezug genommen wird, ohne dass die Berechtigung dieses Vorgehens durch Hinweis auf statistische Ergebnisse glaubhaft gemacht wird. Hier sind Untersuchungen mit Hilfe der uns zur Verfügung stehenden Kriterien der mathematischen Statistik vonnöten (wie z. B. Dispersionskoeffizient, χ^2-Methode usw.). Bekanntlich wird von manchen Aktuaren der Risikotheorie kein grosser praktischer Wert beigemessen, weil sie bereits als statistisch erwiesen erachten, dass die Voraussetzungen nicht genügend erfüllt seien. Wir kennen die betreffenden Einwände besonders in der Formulierung, die sie verschiedentlich durch Dumas erfahren haben. Auch in den Kongressarbeiten wird vereinzelt (insbesondere durch Shannon) die Ansicht vertreten, dass die Risikotheorie kaum je praktische Bedeutung erlangen werde. Uns will jedoch eine weniger defaitistische Stellungnahme berechtigt erscheinen, und man nimmt gerne die erfreuliche Erklärung von Nolfi in seiner Kongressarbeit zur Kenntnis: «Es ist verfehlt, die Risikotheorie mit ihren wertvollen Errungenschaften deswegen zu verwerfen, weil sie nicht in allen Teilen zu befriedigen vermag. Es ist Aufgabe der Wissenschaft, zu zeigen, in welcher Weise eine Theorie, die den wirklichen Verhältnissen noch nicht genügend nahe kommt, zweckmässig ausgebaut werden kann.»

Es ist bekannt, dass die jährlichen Sterblichkeitsschwankungen sicher nicht nur zufälliger Natur sind, sondern zum Teil auf Änderung der wirkenden Ursachen beruhen; es ist die bekannte Trennung in unwesentliche und wesentliche Schwankungen nach Lexis. Auf wirklicher Änderung der Sterblichkeitsverhältnisse beruht sicher die bekannte Tatsache der säkularen Sterblichkeitsänderung. Diese verläuft, im ganzen genommen, in linearem Abfall, wie dies von zahlreichen Autoren (in den Kongress-Schriften erneut von ten Pas) aufgezeigt wurde. Das gibt schon den Fingerzeig, dass die Sterbequotienten der einzelnen Jahre in Beziehung zu bringen sind zu der für die Sterblichkeitsabnahme charakteristischen Trendlinie, d. h. es sind die Abweichungen der einzelnen Jahre zu dem durch den Trend für das gleiche Jahr markierten Wert festzustellen und deren Häufigkeitsverteilung zu untersuchen. Die Untersuchungen Langes, auf welche speziell hingewiesen wurde, sind in dieser Weise durchgeführt. Auch wurde bereits erwähnt, dass Lange eine erfreuliche Anpassung an die Normalverteilung feststellen konnte. Immerhin zeigt der Lexissche Divergenzkoeffizient für alle Altersstufen eine betont übernormale Dispersion. Durch die Bezugnahme auf den Trend der säkularen Sterblichkeitsänderung können also nicht alle wesentlichen Schwankungen ausgeschaltet werden, als verbleibende ursächliche Faktoren sind Witterungseinflüsse, Teuerungen usw. denkbar. Aus dem Umstand, dass sich trotz dieser wesentlichen Schwankungen die festgestellten Häufigkeitsstreckenzüge einer Gaußschen Kurve anpassen, ist — wie Lange folgert — zu schliessen, dass sich auch diese Einflüsse wieder zufällig über die Jahre verteilen. In diesem Zusammenhang erscheint die Kongressarbeit von Nolfi besonders interessant, welche sich zum Ziel setzt, die jährlichen Sterblichkeitsschwankungen inklusive der wesentlichen Komponente auf Basis zweier voneinander abhängiger Gausskurven mathematisch zu erfassen. Durch Entwicklung in eine Brunssche Reihe gelangt Nolfi zu einer formelmässigen

Darstellung, die auch für die praktische Verwertung geeignet erscheint. Inwieweit es auf diesem Wege möglich ist, auch wesentliche Ursachen starken Gewichts (Nolfi erwähnt Epidemiejahre) befriedigend zu erfassen, wird wohl nur in numerischer Rechnung abgeklärt werden können. Es wäre dies unseres Erachtens als besonderer Fortschritt zu werten, indem bei den erwähnten Berechnungen von Lange die Kriegs- und Epidemiejahre um 1870 und 1918 für Trend und Schwankungsbestimmung der Sterblichkeit nicht in Berücksichtigung gezogen werden konnten.

Eingehende und verlässliche Sterblichkeitsuntersuchungen sind also nach wie vor eine der wichtigsten Aufgaben. Hier sei insbesondere auf einen Punkt nochmals speziell aufmerksam gemacht, der bei Vergleich statistischer Ergebnisse oft nicht genügend beachtet wird: die Mitberücksichtigung des Umfanges des jeweiligen Materials. Es genügt nicht, unter allgemeiner Berufung auf das Massenprinzip in mutmasslicher Beurteilung die Unkenntnis genauer numerischer Auswirkung zu verdecken. Vergessen wir nicht, dass die Theorie mit mathematischem Vorteil den Grenzübergang zur unendlichen Versuchszahl vollzieht, während in der Praxis bei der einzelnen Gesellschaft ein idealer Ausgleich innerhalb einer einzelnen Gefahrenklasse niemals erreichbar ist. In diesem Zusammenhange muss auch betont werden, dass die Illustration theoretischer Ergebnisse lediglich an ad hoc gebildeten Zahlenbeispielen, d. h. «die Arbeit am Modell», immer eine gewisse Gefahr in sich birgt, indem die Versuchung gross ist, auf Grund spezieller Annahmen allgemeine Folgerungen zu ziehen. So muss man sich z. B. darüber klar sein, dass die verschiedenen auf der Einzelrisikotheorie basierenden Selbstbehaltstheorien mit der Viel- und Besonderheit ihrer Voraussetzungen stehen und fallen. In manchen neueren Arbeiten wird überhaupt in Abrede gestellt, auf Basis der klassischen Risikotheorie in bezug auf Selbstbehalts- und ähnliche Fragen Folgerungen von praktischem Wert finden zu können. Charakteristisch in dieser Hinsicht sind die Ausführungen Boehms in seiner bereits zitierten Arbeit. Er legt dar, dass die auf dem Prinzip der fingierten Versicherungsgemeinschaft aufgebaute Versicherungsmathematik nur eine «Stück»-Kostenrechnung liefern, aber niemals die Bestandeseigenschaft eines wirklichen Versicherungsbestandes erfassen kann.

Besonders wichtig ist für uns, wenn Boehm aus den empirisch gegebenen Grössenordnungen der statistischen Daten von Lebens-versicherungsbeständen folgert, dass als Verteilungsfunktion der Schadenhäufigkeiten für die meisten Altersklassen die Poissonsche Verteilung angenommen werden kann und nur bei höhern Altersklassen das Gaußsche Verteilungsgesetz zugrunde zu legen ist. Auch in einer kürzlich unter der Leitung Riebesells entstandenen Dissertation von Ackermann («Eine Erweiterung des Poissonschen Grenzwertsatzes und ihre Anwendung auf die Risikoprobleme in der Sachversicherung») wird beispielmässig gezeigt, wie sehr die Annahme einer Gaußschen Verteilung bei Versicherungen mit *unabhängigen* Schadenereignissen an eine möglichst grosse Policenzahl gebunden ist. Aber auch die Ausgleichung der Verteilungen *abhängiger* Schadenereignisse (z. B. Feuerversicherung) nach Pearson-Kurven beruhe auf der unrichtigen Annahme eines unendlich grossen Versicherungsbestandes. Ackermann stellt fest, dass die bisher übliche Ermittlung der Verteilung der Gesamtschäden durch Beobachtung der Jahresschadenquotienten unvollkommen ist, weil es sich um zu kleine Kollektive handelt, bei welchen die Versuchsbedingungen ungleich sind und die spezielle Struktur der Gesellschaft unberücksichtigt bleibt, so dass keine Möglichkeit ist, auf Fragen des maximalen Selbstbehaltes, Rückversicherungspolitik usw. einzugehen. Eine Risikotheorie mit praktisch bedeutsamen Resultaten sei darum im Sinne der Kollektiv-Risikotheorie mit den Statistiken der das Risiko beeinflussenden Grössen aufzubauen. Das setzt also voraus die Kenntnis der relativen Schadenhäufigkeiten, der Verteilungsfunktion der Versicherungssummen, der Verteilung der Gefahrenklassen und (für die Sachversicherung) der Verteilungsfunktion der relativen Schadenhöhen. Die Untersuchungen Ackermanns beziehen sich zwar insbesondere auf die Sachversicherung, sie können aber in sinngemässer Anpassung auch auf die Lebensversicherung bezogen werden, was durch die genannte Arbeit von Boehm gewissermassen bereits vorweggenommen wurde.

Im Sinne dieser Gedankengänge wird in der Kongressarbeit von Riebesell eine neue Begründung der mathematischen Basis der Sachversicherung skizziert. Wenn davon ausgegangen wird, dass für einen bestimmten Versicherungsbestand die mittlere Schadenzahl pro Zeiteinheit bekannt ist und dass weiter die Höhe der einzelnen Schäden zufällig und durch eine Summenverteilung darstellbar ist, dann besteht das Risikoproblem in der Sachversicherung in der Beantwortung der Frage, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Summe aller in einem vorgegebenen Zeitabschnitt eingetretenen Schäden eine bestimmte Höhe nicht übersteigt. Die Bestimmung dieser Grenze ist eine rein wahrscheinlichkeitstheoretische Aufgabe, die folgendermassen formuliert werden kann: Wenn eine Veränderliche zeitlich zufällige Sprünge erfährt und die Höhe dieser Sprünge ebenfalls zufällig ist und einer bekannten Verteilung unterliegt, wie ist dann die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Gesamtsprunghöhe in einem bestimmten Zeitintervall? Es handelt sich also um ein Problem, das den mathematischen Untersuchungen von Cramèr zu Lundbergs kollektiver Risikotheorie der Lebensversicherung oder denjenigen von Pólya über Geschiebebewegung in Flüssen verwandt ist. Das mathematische Rüstzeug für die Behandlung solcher Fragen finden wir in moderner Darstellung in dem Buche «Assymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung» von Khintchine (1933), insbesondere im zweiten Kapitel, das von der Verallgemeinerung des Poissonschen Grenzwertsatzes handelt.

Die Sachversicherungsmathematik hat es in erstaunlich kurzer Zeit zu einem sehr beachtenswerten theoretischen Ausbau gebracht. Es wird nun vor allem nötig sein, die theoretischen Ergebnisse zu empirischen Feststellungen in Beziehung zu bringen, denn ausgedehnte und nach einheitlichen Gesichtspunkten bearbeitete Schadenstatistiken der verschiedenen Sachversicherungs-Sparten fehlen grösstenteils noch. Am weitesten gefördert in dieser Beziehung ist wohl die Feuerversicherung, die insbesondere durch Riebesell und Sergowskij mathematisch-statistische Bearbeitung gefunden hat. Wir müssen uns aber hüten, Analogieschlüsse zu ziehen, denn die verschiedenen Sachversicherungszweige sind ihrem Wesen nach teils grundsätzlich verschieden. So ist nicht zu übersehen, dass auch statistische Untersuchungen vorliegen (man vgl. z. B. die Arbeiten von Thalmann und Wunderlin), welche einen Aufbau gewisser Teile der Sachversicherung auf wahrscheinlichkeitstheoretischer Grundlage nach dem heutigen Stande unseres Wissens nicht für möglich halten. In diesem Zusammenhange verdienen die bezüglichen Ausführungen im Bericht der schweizerischen Unfallversicherungsanstalt über ihre vierte fünfjährige Beobachtungsperiode besonderes Interesse.

Alles in allem dürfte es kaum möglich sein, den Gesamtkomplex aller gestreiften Fragen in eine kurzgefasste Beurteilung zusammenzufassen. Jedenfalls aber ist festzustellen, dass die Kongressarbeiten — so interessant und inhaltsreich sie im einzelnen sind — eine endgültige Abklärung der Stellung der Wahrscheinlichkeitstheorie im Versicherungswesen nicht gebracht haben. Es muss auffallen, dass empirische Nachprüfungen theoretischer Ergebnisse fast gänzlich fehlen und dass wenig spezifisch risikotheoretische Untersuchungen und noch weniger auf die Mathematik der Sachversicherung bezügliche Arbeiten geliefert wurden, dass aber relativ viel über die Rolle der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Versicherungswesen im allgemeinen und über den Begriff der Wahrscheinlichkeit im besonderen geschrieben wurde. Was den letzteren Punkt anbetrifft, so kann man sich nach Kenntnisnahme der verschiedenen Standpunkte schliesslich fragen, ob es nicht gerade zum Begriff der Wahrscheinlichkeit gehört, dass er nicht in einer für alle Belange ausreichenden Definition prägnant erfasst werden kann. Ähnlicher Auffassung mag wohl auch de Finetti sein, wenn er in seiner Kongressarbeit sagt, dass es fruchtbarer ist, sich der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit realistischer Einstellung auf das einzelne Phänomen in intuitiver Weise zu bedienen, statt sich in starrer Bezugnahme auf abstrakte und künstliche Schemen oder auf spezielle und zu einfache Hypothesen zu stützen. Sagt doch auch Borel (in der Einleitung des ersten Bandes seines grossangelegten Lehrwerkes der Wahrscheinlichkeitsrechnung), dass die philosophischen Diskussionen über das Wesen der Wahrscheinlichkeit keinerlei Einfluss auf die Berechnungen der Aktuare haben werden. Und Anderson führt in der Einleitung zu seiner «Mathematischen Statistik» aus: «Welche Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffes man auch wählt, der bei weitem grössere Teil des rein mathematischen Inhaltes der Wahrscheinlichkeitsrechnung — von einigen ziemlich unwesentlichen Ausnahmen abgesehen — bleibt hiervon beinahe ganz unberührt.» Das ist eine Feststellung von grösster Wichtigkeit. Wir dürfen hier einem von Baptist in seiner Kongress-Schrift vertretenen Gedanken beipflichten, der wie folgt zusammengefasst werden kann: «Wenn wir auf Grund einer unmittelbaren, aus den Beobachtungen an einer bestimmten Versicherungsart gewonnenen Statistik auch die Prämien für alle möglichen andern Versicherungsarten bestimmen, so *ist* das Wahrscheinlichkeitsrechnung, wobei die Definition ganz gleichgültig ist.» Wir können uns nicht versagen, einige Betrachtungen zu zitieren, die Weyl in seiner «Philosophie der Naturwissenschaft» (Handbuch der Philosophie 1926) der uns hier beschäftigenden Grundfrage gewidmet hat: «Es wird behauptet, dass jede unter den gleichen Bedingungen veranstaltete Versuchsfolge zu dem gleichen Häufigkeitswert führt. Damit die mathematischen Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung zutreffen, müssen die Versuchsfolgen gewissen Forderungen genügen, deren exakte Fassung bisher kaum restlos gelungen ist und die so etwas wie „Ordnung im grossen, Unordnung im kleinen" verlangen. Aber *verdeckt* diese durch die erkenntnistheoretische Haltung des strengen Empirismus bedingte „objektive Begründung" der Statistik nicht lediglich die a priori-Wahrscheinlichkeit hinter der dogmatischen Fassung eines fingierten Häufigkeitslimes, der an die unsinnige Vorstellung der unendlichen Versuchsfolge geknüpft ist? Ist es nicht vernünftiger, die Wahrscheinlichkeit hinzunehmen als ein nicht weiter zu reduzierendes Element der Natur bzw. ihrer theoretischen Konstruktion?»

Wir wollen abschliessend unsere Ansicht kurz zusammenfassen: Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat sich für das Versicherungswesen eminent nützlich erwiesen, obwohl man es in der Praxis stets nur mit relativen Häufigkeiten zu tun hat. Viel wichtiger als die vom erkenntnistheoretischen Standpunkte aus interessanten Neu- und Umbildungen des Wahrscheinlichkeitsbegriffes ist für das praktische Aktuarwesen die Frage, *wann* man mit den relativen Beobachtungswerten so rechnen darf wie mit mathematischen Wahrscheinlichkeiten. Hier können nur Kriterien der mathematischen Statistik entscheiden, und wir müssen darum, insbesondere auch was die Sachversicherung anbetrifft, diesem Gebiete erhöhtes Interesse zuwenden. Aber die Analyse empirischer Verteilungen von Schadenhäufigkeiten darf sich nicht auf die Frage der Zulässigkeit einer Annäherung derselben durch Funktionen mit wahrscheinlichkeitstheoretischer Interpretationsmöglichkeit beschränken. Es ist daneben zu untersuchen, ob auch die zeitlichen Änderungen in den betreffenden Beobachtungsreihen, soweit sie *nicht* zufallsartiger, also wesentlicher Natur sind, mathematisch erfasst werden können, sei es trendmässig oder mit periodischen Funktionen, sei es durch Einschaltung zusätzlicher Verteilungsfunktionen. Sodann dürfen wir es bei der Statistik der Schadenereignisse nicht bewenden lassen. Die moderne Risikotheorie verlangt ausserdem die Erfassung der Versicherungsbestände nach Verteilung der Gefahrenklassen, Versicherungs- bzw. Risiko-Summen und Teilschadenhöhen. Nach Möglichkeit sind auch diese Verteilungen wenigstens in Annäherung formelmässig wiederzugeben. Nur bei Erfüllung dieser Voraussetzungen werden die neuzeitlichen Fortschritte der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch für die Versicherungstechnik von praktischem Wert sein. Hier stehen wir erst am Anfang, und es harrt unser noch ein weites Feld aktuarieller Arbeit.