Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 41 (1941)

Artikel: Le renouvellement, quelques problèmes connexes et les équations intégrales du cycle fermé

Autor: Féraud, L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966753

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Le renouvellement, quelques problèmes connexes et les équations intégrales du cycle fermé.

Par *L. Féraud,* Genève.

1. Introduction.

Le problème du «renouvellement» est l'objet, depuis plusieurs années, de nombreuses et remarquables études dont une part importante a paru dans ce Bulletin. Il semble bien que cette floraison de travaux ait pris naissance sous l'impulsion d'un article de *Moser* [1]). A l'heure actuelle, les publications relatives à ce problème sont si nombreuses et si dispersés qu'une énumération serait fort longue et risquerait d'être tout à fait incomplète. Aussi je ne tenterai pas d'établir une bibliographie et me bornerai à citer les travaux et les ouvrages auxquels je me réfère directement [2]).

En raison même de la variété et de la richesse des recherches dont le problème du renouvellement a été l'objet, il n'est peut-être pas dépourvu d'intérêt de remarquer que, dans la plupart d'entre eux, l'instrument mathématique essentiel est une équation intégrale dont le noyau est de la forme $K(t-\tau)$, c'est-à-dire appartient au groupe de fonctions permutables auquel Volterra a donné le nom de «groupe du cycle fermé». Nous dirons, pour abréger, «équation intégrale du cycle fermé».

Dans ce qui suit nous passons en revue les principaux résultats relatifs à ces équations ou tout au moins ceux qui ont présenté ou qui

---

[1]) *Moser:* Beiträge zur Darstellung von Vorgängen und des Beharrungszustandes bei einer sich erneuernden Gesamtheit. Bulletin de l'Association des Actuaires Suisses, 1926, H. 21. Auparavant différents aspects de la question avaient été envisagés notamment par *Herbelot* (Bulletin trimestriel de l'Institut des Actuaires français, 1909, n° 79), *Lotka* and *Sharpe* (Philosophical Magazine, 1911), *Risser* (Bulletin trimestriel de l'Institut des Actuaires français, 1912, n° 91).

[2]) Rien qu'en relevant les publications citées dans les articles parus dans ce Bulletin, depuis 1926, on constituerait une documentation importante.

paraissent pouvoir présenter un intérêt eu égard au renouvellement ou à quelques problèmes qu'il a paru opportun de lui rattacher. Dans les travaux qui viennent d'être mentionnés, les méthodes et les résultats ont été établis, bien naturellement, pour une ou plusieurs équations dont la forme particulière était suggérée par une question pratique. Nous nous efforçons ici, en recourant à des théories générales de l'analyse fonctionnelle, de tracer un cadre dans lequel s'inscrive *la presque totalité* des méthodes employées et des résultats obtenus (il ne s'agit évidemment ni des applications numériques ni des résultats qui dépendent de données numériques propres à un cas particulier). En même temps, nous faisons apparaître *les liens et quelquefois le parallélisme existant entre des recherches qui ont été poursuivies dans des voies entièrement séparées.*

2. Les équations du renouvellement et de quelques problèmes connexes.

Dans le problème du renouvellement on peut tenir pour fondamentale l'équation

$$\text{(I)} \qquad Z(t) = Z(t_0)\, p(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} Z(\tau)\, \varphi(\tau)\, p(t-\tau)\, d\tau$$

où $Z(t)$ représente, à l'époque $t, (t-t_0 < \omega)$, l'effectif numérique total du groupe ouvert que l'on considère; où φ est la «fonction de renouvellement» telle que $\varphi(t)\, dt$ représente le rapport du nombre des entrées entre t et $t+dt$ à l'effectif $Z(t)$; où p est la «fonction d'élimination» telle que $p(t-\tau)\, U(\tau)$ représente le nombre des survivants, à l'époque t, d'un groupe initial fermé d'effectif $U(\tau)$ à l'époque τ, en supposant cette fonction applicable lorsque l'on prend pour groupe initial soit l'effectif existant à l'époque t_0, soit l'un quelconque des contingents entrant aux époques postérieures.

Toutefois, si l'on se borne à cette définition, la notion de fonction d'élimination peut paraître artificielle et sans relation évidente avec les données démographiques usuelles. Il est donc bien préférable de considérer, ainsi que le fait *Zwinggi* [1]), d'une part la répartition par âge $\nu(\xi)$, supposée constante et de plus commune à l'effectif initial et aux contingents entrants ultérieurement, que l'on rapporte

[1]) *Zwinggi:* Festgabe Moser. Stämpfli 1931.

au total pour tous les âges de telle sorte que $\int_{\alpha}^{\omega} \nu(\xi)\, d\xi = 1$, et d'autre part la probabilité de survie à l'âge ξ, $\lambda(\xi) = \frac{l(\xi)}{l(0)}$, $l(\xi)$ étant une loi de survie qui s'annulle pour $\xi \geqslant \omega$.

On définit alors d'une manière toute naturelle

$$p(t-\tau) = \int_{\alpha}^{\omega} \nu(\xi) \frac{\lambda(\xi+t-\tau)}{\lambda(\xi)}\, d\xi$$

qui satisfait à $\qquad p(o) = 1$

et à $\quad p(t) = 0 \quad$ pour $\quad t \geqslant \omega$.

De la dernière de ces égalités, il suit que pour $t \geqslant t_0 + \omega$ l'équation (I) se réduit à

$$\text{(II)} \qquad Z(t) = \int_{t-\omega}^{t} Z(\tau)\, \varphi(\tau)\, p(t-\tau)\, d\tau$$

Les remarques ci-après font pressentir le rôle que jouent les équations (I) et (II) dans de nombreux problèmes démographiques, actuariels ou industriels:

1° On n'introduit aucune restriction en prenant dans (I): $t_0 = 0$, $Z(0) = 1$ et (pour définir p) $\alpha = 0$;

2° On obtient encore une équation (I) si l'on adopte un âge supérieur $\beta < \omega$ à la condition toutefois de modifier comme suit la définition de la fonction d'élimination

$$p(t-\tau) = \int_{\alpha}^{\beta-t+\tau} \nu(\xi) \frac{\lambda(\xi+t-\tau)}{\lambda(\xi)}\, d\xi$$

3° Lorsque l'effectif du groupe considéré est constant (population stationnaire), l'équation (I) se réduit à

$$\text{(I')} \qquad 1 = p(t) + \int_{0}^{t} \varphi(\tau)\, p(t-\tau)\, d\tau$$

qui par dérivation prend la forme particulière

$$\varphi(t) = \Phi(t) + \int_0^t \varphi(\tau)\,\Phi(t-\tau)\,d\tau$$

si l'on pose $\Phi(t) = -p'(t)$.

4° Dans l'hypothèse $\varphi = C^{te}$, par le changement de variables $t-\tau = x$ l'équation (II) devient

$$\text{(II')} \qquad Z(t) = \int_0^\omega Z(t-x)\,p(x)\,dx$$

Sous cette forme elle se présente dans d'autres questions que l'on peut ainsi rattacher au problème du renouvellement.

Par exemple $Z(t)$ peut être le taux des naissances féminines à l'instant t et $p(x)$ le produit du taux $m(x)$ de fertilité à l'âge x, supposé indépendant du temps, par la probabilité de survie $\frac{l(x)}{l(0)}$ pour le sexe féminin.

Comme exemple d'application industrielle, on peut représenter par $Z(t)$ le nombre des remplacements, par $p(x)$ le produit du taux $m(x)$ des remplacements, supposé indépendant du temps, par la probabilité $\lambda(x)$ de subsister après x années.

Nous allons maintenant considérer les équations intégrales du cycle fermé — de deuxième et de première espèce — en nous attachant aux méthodes et aux résultats permettant de répondre aux questions que posent, à l'égard de (I) et (II) et de leurs formes particulières, le problème du renouvellement et les problèmes connexes.

3. Equation intégrale de deuxième espèce du cycle fermé. Méthodes de Volterra [1].

L'équation de Volterra de deuxième espèce

$$\text{(1)} \qquad F(t) = G(t) + \int_0^t G(\tau)\,K(t-\tau)\,d\tau$$

[1]) *Volterra* et *Pérès:* Leçons sur la composition et les fonctions permutables. Paris, Gauthier-Villars, 1924; *Volterra:* Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires. Journal de mathématiques pures et appliquées, t. VII, fasc. III, 1928; *Volterra* et *Pérès:* Théorie générale des fonctionnelles, tome premier. Paris, Gauthier-Villars, 1936.

admet, dans tout intervalle $0 < t < T$ où K et F sont finies et continues, une solution unique qui donne la fonction inconnue $G(t)$ par la formule

$$G(t) = F(t) + \int_0^t G(\tau)\, H(t-\tau)\, d\tau \tag{2}$$

où le noyau résolvant H appartient lui aussi au groupe du cycle fermé et satisfait à la relation habituelle.

$$K(t-\tau) + H(t-\tau) = -\int_t^\tau H(t-u)\, K(u-\tau)\, d\tau \tag{3}$$

Cette solution peut être obtenue par la méthode des approximations successives sous la forme

$$G(t) = G_0(t) + G_1(t) + G_2(t) + \ldots$$

avec

$$G_0(t) = F(t)$$

$$G_1(t) = \int_0^t G_0(\tau)\, K(t-\tau)\, d\tau$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$G_n(t) = \int_0^t G_{n-1}(\tau)\, K(t-\tau)\, d\tau$$

Nous rattacherons à ces résultats classiques un théorème sur lequel *Volterra* appuie sa théorie de la mécanique héréditaire:

L'équation $F(t) = G(t) + \int_{t-\omega}^t G(\tau)\, K(t-\tau)\, d\tau$, où $K(t)$, définie de 0 à ω, s'annulle pour $t \geqslant \omega$, détermine $G(t)$ de t_0 à T lorsque $F(t)$ est donnée de t_0 à T et $G(t)$ est donnée de $t_0 - \omega$ à t_0.

En outre, on sait qu'à l'aide de dérivations successives par rapport à t l'équation (1) se ramène, dans le cas général, à une équation intégro-différentielle. Il peut se faire que cette équation intégro-différentielle se réduise à une simple équation différentielle linéaire. C'est ce qui se produit pour (1) lorsque le noyau satisfait à une équation différentielle linéaire à coefficients constants, sans second membre,

$\sum_{i=0}^{j} a_i K^{(i)}(t) = 0$. La fonction $G(t)$ est alors donnée par une équation différentielle linéaire à coefficients constants dont le second membre est $\sum_{i=0}^{j} a_i F^{(i)}(t)$.

Si l'on suppose de plus que $F(t)$ est, elle aussi, de la forme $\sum_{\nu=0}^{n} P_{m_\nu} e^{s_\nu t}$, P_{m_ν} étant un polynôme en t de degré m_ν, la solution $G(t)$ de l'équation est encore de la même forme. Ce résultat sera retrouvé plus loin par une autre méthode.

4. Equation intégrale de deuxième espèce du cycle fermé. Méthode des transformées de Laplace [1]).

Pour la même équation on peut aussi recourir à la transformation de Laplace. Il nous suffira, pour pouvoir mettre en évidence les traits essentiels des méthodes fondées sur cette transformation, de rappeler avec sa définition quelques notations et quelques-unes de ses propriétés:

La transformée de Laplace d'une fonction $F(t)$, *lorsqu'elle existe*, est définie par $L\{F\} = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$ dans tout le demi-plan complexe, ouvert, où la partie réelle de s est supérieure à α $(Rs > Rs_0)$.

La relation $G(t) = \int_0^t F(\tau) K(t-\tau)\, d\tau$ a pour conséquence $g(s) = f(s)\, k(s)$ lorsque f, k, g, existent; l'existence de f et de k, jointe à la convergence absolue de k, entraîne l'existence de g.

La transformation de Laplace s'inverse, en passant par le domaine complexe, selon la formule

$$L^{-1}\{f\} = F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{ts} f(s)\, ds\,,$$

---

[1]) *Doetsch:* Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin Springer, 1937. Pour une application de la méthode à une équation particulière voir *Hadwiger:* Über die Integralgleichung der Bevölkerungstheorie. Bulletin de l'Association des Actuaires suisses, H. 38, 1939.

(a quelconque supérieur à α) en particulier lorsque les conditions suivantes sont satisfaites:

$F(t)$ est définie et continue pour $t > 0$

$f(s)$ est absolument convergente pour $Rs > \alpha$.

En s'appuyant sur ces propriétés, l'équation (1) se transforme en une relation algébrique $f(s) = g(s) + g(s)\,k(s)$, d'où l'on tire

$$g(s) = \frac{f(s)}{1 + k(s)} \tag{4}$$

Pour avoir $G(t)$, il suffit alors d'inverser $g(s)$ par la transformation $L^{-1}\{g\}$. On obtient ainsi une forme explicite de la solution de (1):

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{ts}\, ds \, \frac{\int_0^\infty e^{-s\tau} F(\tau)\, d\tau}{1 + \int_0^\infty e^{-s\tau} K(\tau)\, d\tau} \tag{5}$$

s étant un nombre complexe dont l'affixe décrit une parallèle à l'axe imaginaire, à droite d'un certain nombre réel α.

Pour que ces opérations soient possibles, on démontre qu'il est nécessaire et suffisant que f, k, g existent et que de plus k soit absolument convergente. Si l'on suppose F continue on obtient une seule solution continue G. On peut d'ailleurs amener cette solution à la forme que fournit la méthode de Volterra et retrouver les théorèmes classiques. Nous nous contenterons de noter que la transformée de Laplace $h(s)$ du noyau résolvant s'exprime à l'aide de $k(s)$ par la formule simple

$$h(s) = \frac{-k(s)}{1 + k(s)}$$

qui correspond à (3).

On obtient des résultats particulièrement intéressants lorsque l'expression que donne (4) pour $g(s)$ est décomposable en éléments simples.

Nous aurons à nous appuyer sur deux nouvelles propriétés de la transformation de Laplace qui ont l'une et l'autre pour point de départ la relation $L\{t^m e^{\beta t}\} = \frac{m\,!}{(s-\beta)^{m+1}}$ pour $Rs > R\beta$.

Ce sont les suivantes:

(A). Dans l'hypothèse où $g(s)$ est une fraction rationnelle $\frac{p(s)}{q(s)}$, le degré du polynôme $q(s)$ étant supérieur au degré du polynôme $p(s)$, soient $s_1, s_2, \ldots s_\nu, \ldots s_n$ ses pôles d'ordres respectifs $m_1, m_2, \ldots m_\nu, \ldots m_n$.

Par décomposition en éléments simples $g(s)$ se met sous la forme

$$g(s) = \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{a_{1,\nu}}{s-s_\nu} + \ldots + \frac{a_{m_\nu,\nu}}{(s-s_\nu)^{m_\nu}} \right)$$

les coefficients $a_{k,\nu}$ étant les résidus qui se calculent le long d'un petit cercle entourant chaque pôle par l'intégrale

$$a_{k,\nu} = \frac{1}{2\pi i} \int_c g(s)\,(s-s_\nu)^{k-1}\,ds$$

Il existe alors une fonction $G(t)$ admettant $g(s)$ pour transformée de Laplace et elle s'écrit

$$G(t) = \sum_{\nu=0}^{n} \left(a_{1,\nu} + a_{2,\nu} \frac{t}{1!} + \ldots + a_{m_\nu,\nu} \frac{t^{m_\nu-1}}{(m_\nu-1)!} \right) e^{s_\nu t}$$

Cette propriété peut être généralisée, mais il faut prendre quelques précautions:

(B). Dans l'hypothèse où $g(s)$ est méromorphe dans tout le plan elle se met, par décomposition en éléments simples, sous la forme

$$g(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{a_{1,\nu}}{s-s_\nu} + \ldots + \frac{a_{m_\nu,\nu}}{(s-s_\nu)^{m_\nu}} \right)$$

En supposant de plus

1° que tous les pôles s_ν sont à gauche d'une certaine parallèle à l'axe imaginaire ($Rs_\nu < \alpha$),

2° que $G(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(a_{1,\nu} + a_{2,\nu} \frac{t}{1!} + \ldots + a_{m_\nu,\nu} \frac{t^{m_\nu - 1}}{(m_\nu - 1)!} \right) e^{s_\nu t} =$

$= \sum_{\nu=0}^{\infty} G_\nu(t)$ converge uniformément dans tout intervalle fini $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$,

3° que $\int_0^\infty e^{-\alpha t} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| G_\nu(t) \right| dt$ ou $\sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\alpha t} \left| G(t) \right| dt$ converge,

on peut conclure, comme dans la propriété (A), que la fonction $G(t)$ admet $g(s)$ pour transformée de Laplace dans le demi-plan $Rs \geqslant \alpha$.

Ces deux propriétés englobent presque toutes les méthodes qui ont été appliquées pour résoudre (1) dans les cas où elle se présente sous une forme particulière et dans ceux où l'on recherche une solution de forme particulière et, en conséquence, vont nous permettre de relier entre eux de nombreux résultats qui, à première vue, paraissent tout à fait distincts. Nous admettrons que sont remplies les conditions qui justifient les passages aux transformées de Laplace et les passages inverses.

La propriété (A) s'applique notamment lorsque le noyau de (1) est de la forme déjà envisagée $K(t) = \sum_{\nu=0}^{n} P_{m_\nu} e^{s_\nu t}$. L'expression de la transformée de Laplace du noyau résolvant $h(s) = \frac{-k(s)}{1 + k(s)}$ montre que celle-ci est, comme $k(s)$, une fraction rationnelle dont le dénominateur est de degré plus élevé que le numérateur. En vertu de (A) il existe une fonction $H(t)$ dont $h(s)$ est la transformée et cette fonction est de la même forme que $K(t)$. Ce qui complète un résultat que *Whittaker* [1]) a démontré pour le cas où les polynômes P se réduisent à des constantes. Nous avons vu que dans l'hypothèse $K(t) = \sum_{\nu=0}^{n} P_{m_\nu} e^{s_\nu t}$ l'équation (1) pouvait être ramenée à une équation différentielle linéaire à coefficients constants avec second membre.

---

[1]) *Whittaker and Robinson:* The calculus of observations, pp. 378—381. Blackie & son, London 1937.

Après avoir fait une hypothèse sur la forme de $K(t)$, on peut en faire une autre sur la forme de $F(t)$.

Zwinggi[1]) a traité le cas dans lequel $F(t)$ est une somme d'exponentielles. On peut retrouver le résultat qu'il a établi en considérant l'hypothèse, un peu plus générale, où $F(t)$ est, elle aussi, de la forme $F(t) = \sum_{\varrho=0}^{r} Q_{m_\varrho} e^{s_\varrho t}$. En passant par les transformées de Laplace, il suffit de remarquer que les décompositions en éléments simples de $f(s)$ et de $k(s)$ qui sont en évidence donnent celle de $g(s) = \frac{f(s)}{1 + k(s)}$ et qu'à celle-ci on peut appliquer la propriété (A). On obtient donc une solution qui est, elle aussi, de la forme imposée par hypothèse à K et à F [2]).

Un cas plus particulier a été envisagé par Fock[3]): Si dans (1) on suppose $F = K$ la décomposition en éléments simples de $g(s)$ résulte immédiatement de celle de $k(s)$; la solution est de la même forme que K et l'on se rend compte des raisons de la simplicité des calculs.

La propriété (B) permettrait d'étendre les résultats ci-dessus en substituant aux sommes $\sum_{\nu=0}^{n} P_{m_\nu} e^{s_\nu t}$ des séries $\sum_{\nu=0}^{\infty} P_{m_\nu} e^{s_\nu t}$. En outre, on peut y rattacher la méthode indiquée par *Hertz*[4]), développée par *Herglotz*[5]) dans le cas particulier $F = K$ et poursuivie par *Lotka*[6]) laquelle s'inspire de la méthode qui permet de déduire du théorème de Cauchy la série de Fourier et des séries analogues[7]). On obtient par cette méthode la solution de (1) sous la forme d'une série d'ex-

---

[1]) Festgabe Moser, loc. cit.

[2]) C'est le résultat obtenu plus haut en ramenant (1) à une équation différentielle linéaire à coefficients constants. On pourrait encore le tirer directement de (2) puisque l'on a démontré que le noyau résolvant était de la même forme que K.

[3]) *Fock:* Mathematische Zeitschrift, XXI, 1924.

[4]) *Hertz:* Mathematische Annalen, 65, 1907, S. 1—86.

[5]) *Herglotz:* Mathematische Annalen, 65, 1907, S. 87—106.

[6]) *Lotka:* Sur une équation intégrale de l'analyse démographique et industrielle. Bulletin de l'Association des Actuaires suisses, H. 40, 1940.

[7]) *Picard:* Traité d'analyse, t. II, pp. 179—195 (deuxième édition). Paris, Gauthier-Villars.

ponentielles $G(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu e^{s_\nu t}$. Si l'on remarque que les coefficients s_ν sont les racines d'une équation qui n'est autre que $1 + k(s) = 0$ on constate que c'est précisément à ce résultat que conduit la propriété (B) lorsque:

1° $\dfrac{f(s)}{1 + k(s)}$ n'admet d'autres points singuliers que les zéros de $1 + k(s)$ et que ceux-ci sont tous simples,

2° les trois conditions supplémentaires que nous avons énoncées sont remplies.

5. Equation intégrale de première espèce du cycle fermé.

Nous rappellerons d'abord que l'équation de Volterra de première espèce dont le noyau appartient au groupe du cycle fermé

$$F(t) = \int_0^t G(\tau) K(t - \tau) \, d\tau \tag{6}$$

se ramène par dérivation, lorsque $K(0) \neq 0$, à une équation de deuxième espèce qui est, elle aussi, de la catégorie du cycle fermé.

Il est intéressant de remarquer que, plus généralement, toute équation de Volterra de première espèce dont le noyau est de la forme $\varphi(\tau) K(t - \tau)$ se ramène aussi, par dérivation, à une équation de deuxième espèce du cycle fermé.

En outre, le théorème énoncé plus haut, dont Volterra fait usage dans la mécanique héréditaire, s'étend aisément aux équations de première espèce:

L'équation $F(t) = \int_{t-\omega}^{t} G(\tau) K(t - \tau) \, d\tau$, où $K(t)$ définie de 0 à ω s'annulle pour $t \geqslant \omega$, détermine $G(t)$ de t_0 à T lorsque $F(t)$ est donnée de t_0 à T et $G(t)$ est donnée de $t_0 - \omega$ à t_0.

En effet, pour les valeurs $t_0 < t < t_0 + \omega$, en décomposant $\int_{t-\omega}^{t}$ en $\int_{t-\omega}^{t_0} + \int_{t_0}^{t}$ et en posant $F_1(t) = \int_{t-\omega}^{t_0} G(\tau) K(t - \tau) \, d\tau$ on arrive à

$$(7) \qquad F(t) - F_1(t) = \int_{t_0}^{t} G(\tau)\, K(t-\tau)\, d\tau$$

Pour les valeurs $t \geqslant t_0 + \omega$ on remarque, en outre, que $\int_{t-\omega}^{t_0} G(\tau)\, K(t-\tau)\, d\tau = 0$ puisque $K(t)$ s'annulle lorsque $t \geqslant \omega$ et l'on obtient $F(t) = \int_{t_0}^{t} G(\tau)\, K(t-\tau)\, d\tau$. Cette dernière équation est comprise dans la précédente $-F_1(t)$ étant nulle pour ces valeurs de t — et en définitive la fonction $G(t)$ est définie de t_0 à T comme solution de (7).

Si l'on recourt [1]) à la transformation de Laplace on ramène (6) à $f(s) = g(s)\, k(s)$; en admettant l'existence des fonctions f, g, et la convergence absolue de k on en tire $g(s) = \dfrac{f(s)}{k(s)}$ et par inversion la fonction $G(t)$ solution de (6). Toutefois, l'existence de f et de k, et même leur convergence absolue ne permettent pas de conclure à l'existence de g, car la fonction $\dfrac{1}{k(s)}$ n'est pas nécessairement une transformée de Laplace. On peut quelquefois tourner cette difficulté en introduisant $\varphi(s) = \dfrac{1}{s^n k(s)}$. Il peut se faire, en effet, que $\dfrac{1}{k(s)}$ n'étant pas une transformée de Laplace $\dfrac{1}{s^n k(s)}$ le soit: on peut alors affirmer que $\varphi(s)$ est une transformée de Laplace et calculer par inversion $\Phi(t)$ qui lui correspond. Comme $\Phi(t) = \int_0^t G(\tau)\,(t-\tau)^{n-1}\, d\tau$ elle donne $G(t)$ par n dérivations.

Une troisième méthode [1]) peut être fondée sur les propriétés de l'opération de «composition» que représente $\int_0^t G(\tau)\, K(t-\tau)\, d\tau$. En notations symboliques, l'équation à résoudre s'écrit $F = G * K$.

On peut d'abord introduire une fonction $\psi(t)$ satisfaisant à l'équation auxiliaire $K * \psi = 1$ de laquelle on passe, en vertu de la commu-

[1]) *Doetsch*, loc. cit.

tativité et de l'associativité de l'opération de composition, successivement à $F * \psi = G * K * \psi$

$$F * \psi = G * 1 \quad \text{soit} \quad F * \psi = \int_0^t G(\tau)\, d\tau$$

qui donne, en dérivant

$$G(t) = F' * \psi + F(o)\, \psi(t)$$

Pour des fonctions bornées $G(0) = 0$ et $G(t)$ est donnée par

$$G(t) = \int_0^t F'(t - \tau)\, \psi(\tau)\, d\tau$$

Au lieu de l'équation auxiliaire $K * \psi = 1$ on peut adopter $K * \psi_1 = t^m$: par le même procédé on arrive à

$$F * \psi_1 = \int_0^t G(\tau)\, (t - \tau)^m\, d\tau$$

que l'on dérive $m + 1$ fois pour obtenir $G(t)$.

On peut encore recourir à l'équation auxiliaire $K * \psi_2 = e^{\alpha t}$ qui conduit à $F * \psi_2 = \int_0^t G(\tau)\, e^{\alpha(t-\tau)}\, d\tau$ soit à $e^{-\alpha t}\, (F * \psi_2) = \int_0^t G(\tau)\, e^{-\alpha\tau}\, d\tau$ d'où par dérivation $G(t) = -\alpha\, (F * \psi_2) + F' * \psi_2 + F(o)\, \psi_2(t)$.