Sur une généralisation des formules d'ajustement de E. T. Whittaker

Autor(en): **Consael, Robert**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **41 (1941)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966754

Sur une généralisation des formules d'ajustement de E. T. Whittaker.

Par *Robert Consael,* Bruxelles.

1° Les formules d'ajustement de Whittaker ont ceci de remarquable, qu'elles jouissent, comme on sait, de deux propriétés fort importantes au point de vue de la théorie de l'ajustement:

elles sont exactes jusqu'aux différences cinquièmes, d'où leur grande précision;

elles conservent les moments d'ordre 0, 1, 2, ou, en d'autres termes, les surfaces décrites par les ordonnées représentatives des taux bruts et des taux ajustés respectivement sont égales. Il en est de même des abcisses des centres de gravité de ces surfaces et des moments d'inertie par rapport à une droite parallèle à l'axe des u.

Les formules de sommation ne possèdent pas, en général, cette double propriété.

Nous savons d'ailleurs, que la condition d'exactitude jusqu'aux différences cinquièmes ne se réalise qu'aux dépens de la capacité de réduction des irrégularités des valeurs brutes, c'est-à-dire, a pour effet d'accroître le coefficient d'ajustement. Il y a donc là une circonstance qui milite singulièrement en faveur des hypothèses qui sont à la base de la méthode. Or quelles sont ces hypothèses? Tout d'abord, en ce qui concerne la série des valeurs brutes, la distribution des écarts autour de la vraie valeur de chacun des termes de la série est gaussienne. Ensuite, les différences troisièmes des taux ajustés obéissent à une loi semblable à la loi normale.

Enfin, hypothèse simplificatrice, la précision des mesures est la même quels que soient les termes de la série.

On peut se demander cependant si les propriétés rappelées ci-dessus sont encore valables dans l'hypothèse d'une loi de fréquence plus générale impliquant corrélation des erreurs d'observations. Remarquons que la propriété de la conservation des moments est susceptible de fausser l'ajustement lorsque les valeurs brutes sont entachées d'erreurs systématiques dans une région déterminée. Dans ce cas, en effet, la compensation des écarts conformément à la propriété en question s'effectue au détriment des valeurs avoisinant la région considérée et ceci d'autant plus que les erreurs systématiques sont considérables. D'autre part, il est douteux que les différences troisièmes des valeurs ajustées soient indépendantes des erreurs qui affectent les valeurs brutes, en raison de ce que, pour une valeur donnée de la constante ε, les différences troisièmes des valeurs brutes et des valeurs ajustées respectivement, ne sont pas nécessairement indépendantes.

2° Cela étant, supposons que les écarts

$$\begin{gathered} u_1 - u_1', \ \ldots\ , u_n - u_n', \\ \Delta^3 u_1', \ \ldots\ , \Delta^3 u_n', \end{gathered}$$

obéissent à la fonction de fréquence

$$Z = Z_0 e^{-\frac{1}{2}\left[S_1\left(\frac{R_{pp}}{R}\frac{\varkappa_p^2}{\sigma_p^2}\right) + 2S_2\left(\frac{R_{pq}}{R}\frac{\varkappa_p}{\sigma_p}\frac{\varkappa_q}{\sigma_q}\right)\right]}$$

où $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n, \sigma_{n+1}, \ldots \sigma_n$, désignent les écarts quadratiques et

$$r_{12}, r_{13}, \ldots r_{1n}, \ldots r_{1n+1}, \ldots r_{12n},$$

les coefficients de corrélation. Dans ce cas R est le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1\, r_{12} \ldots & r_{1,n} & r_{1,n+1} \ldots & r_{1,2n} \\ r_{21}\, 1 & r_{2,n} & r_{2,n+1} \ldots & r_{2,2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n,1}\, r_{n,2} \ldots & 1 & r_{n,n+1} & r_{n,2n} \\ r_{n+1,1} \ldots & r_{n+1,n} & 1 \quad \ldots & r_{n+1,2n} \\ r_{n+2,1} & r_{n+2,n} & r_{n+2,n+1} \ldots & r_{n+2,2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{2n,1} \ldots & r_{2n,n} & r_{2n,n+1} \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

et Rpp, Rpq, les mineurs obtenus en supprimant la p^e ligne et la p^e colonnes, ou la p^e ligne et la q^e colonnes.

Supposons qu'il n'existe aucune corrélation entre les erreurs

$$u_1 - u_1', u_2 - u_2', \ \ldots \ , u_n - u_n',$$

de même, qu'il n'y ait aucune corrélation entre les

$$\varDelta^3 u_1', \varDelta^3 u_2', \ \ldots \ , \varDelta^3 u_n'.$$

Soient

$$r_{1,n+1}, r_{2,n+2}, \ \ldots \ , r_{n,2n},$$

respectivement les coefficients de corrélation entre les

$$u_1 - u_1' \text{ et } \varDelta^3 u_1', u_2 - u_2' \text{ et } \varDelta^3 u_2', \ \ldots \ , u_n - u_n' \text{ et } \varDelta^3 u_n'.$$

Supposons en outre que l'on ait

$$r_{1,n+2} = r_{1,n+3} = \ \ldots \ = r_{2,n+1} = r_{3,n+2} = \ \ldots \ = 0$$

Le déterminant R devient alors:

$$\begin{vmatrix} 1\,0 \ldots\ldots\ldots 0\, r_{1,n+1}\, 0 \ldots\ldots 0 \\ 0\,1 \ldots\ldots\ldots 0\,0\, r_{2,n+2} \ldots\ldots 0 \\ \ldots \qquad \ldots \\ 0 \ldots\ldots\ldots 1\,0 \ldots\ldots\ldots\ldots r_{n,2n} \\ r_{n+1,1} \ldots\ldots 0\,1\,0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0\, r_{n+2,2} \ldots\ldots 0\,0\,1 \ldots\ldots\ldots 0 \\ \ldots \qquad \ldots \\ 0 \ldots\ldots r_{2n,n}\, 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \end{vmatrix}$$

On obtient immédiatement

$$R = (1 - r_{1,n+1}^2) \ \ldots \ (1 - r_{n-1,2n-1}^2)\,(1 - r_{n,2n}^2)$$

De même,

$$R_n = R_{n+1,\,n+1} = (1 - r^2_{2,\,n+2}) \;\ldots\; (1 - r^2_{n-1,\,2n-1})\,(1 - r^2_{n,\,2n})$$

$$\ldots$$

$$R_{2n-1,\,2n-1} = R_{n-1,\,n-1} = (1 - r^2_{1,\,n+1}) \;\ldots\; (1 - r^2_{n-2,\,2n-2})\,(1 - r^2_{n,\,2n})$$

$$R_{2n,\,2n} = R_{nn} = (1 - r^2_{1,\,n+1}) \;\ldots\; (1 - r^2_{n-2,\,2n-2})\,(1 - r^2_{n-1,\,2n-1})$$

$$R_{1,\,n+1} = - r_{n+1,\,1}\,(1 - r^2_{2,\,n+2}) \;\ldots\; (1 - r^2_{n-1,\,2n-1})\,(1 - r^2_{n,\,2n})$$

$$\ldots$$

$$R_{n-1,\,2n-1} = - r_{2n-1,\,n-1}\,(1 - r^2_{1,\,n+1}) \;\ldots\; (1 - r^2_{n-2,\,2n-2})\,(1 - r^2_{n,\,2n})$$

$$R_{n,\,2n} = - r_{2n,\,n}\,(1 - r^2_{1,\,n+1}) \;\ldots\; (1 - r^2_{n-1,\,2n-1})$$

et semblablement pour les mineurs relatifs aux éléments placés symétriquement par rapport à la diagonale. De plus, tous les autres mineurs sont nuls.

Si l'on suppose que les coefficients de corrélation sont indépendantes du rang occupé par la variable dans la série, nous aurons

$$r_{1n+1} = r_{2n+2} = \;\ldots\; - r_{n,\,2n} = r$$

et par suite

$$\frac{R_{pp}}{R} = \frac{1}{1 - r^2} \quad \text{et} \quad \frac{R_{pq}}{R} = - \frac{r}{1 - r^2}$$

Admettons d'autre part que les u_x et les $\Delta^3 u'_x$ respectivement soient d'égale précision et posons:

$$\frac{1}{\sigma_1^2} = \;\ldots\; = \frac{1}{\sigma_n^2} = (1 - r^2)\,h^2$$

$$\frac{1}{\sigma_{n+1}^2} = \;\ldots\; = \frac{1}{\sigma_{2n}^2} = (1 - r^2)\,\lambda^2$$

La fonction de fréquence s'écrit alors:

$$Z = Z_0\, e^{-\frac{1}{2}\left[h^2 \Sigma x_p^2 + \lambda^2 \Sigma x_q^2 - 2 r h \lambda \Sigma x_p x_q\right]}$$

Posons $$h^2 = \varepsilon \lambda^2$$

ε étant un nombre positif,

et $$r h \lambda = \varrho \lambda^2$$

Il en résulte immédiatement que:

$$\varrho = r \varepsilon_{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

La forme quadratique des écarts devient par conséquent:

$$\lambda^2 \left[\varepsilon \Sigma (u_i - u_i')^2 + \Sigma (\Delta^3 u_i')^2 - 2 \varrho \Sigma (u_i - u_i') \Delta^3 u_i'\right].$$

Cela étant, la série la plus probable des valeurs u_i', ... est, par extension, celle qui rend cette quantité minimum.

3° *Conditions nécessaires du minimum.* En annulant les dérivées premières de l'expression ci-dessus par rapport aux u', on obtient les conditions suivantes:

$$-\varepsilon (u_1 - u_1') - \Delta^3 u_1' + \varrho \Delta^3 u_1' + \varrho (u_1 - u_1') = 0$$

$$-\varepsilon (u_2 - u_2') + 3 \Delta^3 u_1' - \Delta^3 u_2' - 3 \varrho (u_1 - u_1') + \varrho (u_2 - u_2') + \varrho \Delta^3 u_2' = 0$$

$$-\varepsilon (u_3 - u_3') - 3 \Delta^3 u_1' + 3 \Delta^3 u_2' - \Delta^3 u_3' + 3 \varrho (u_1 - u_1') - 3 \varrho (u_2 - u_2') + \\ + \varrho (u_3 - u_3') + \varrho \Delta^3 u_3' = 0$$

$$-\varepsilon (u_4 - u_4') + \Delta^3 u_1' - 3 \Delta^3 u_2' + 3 \Delta^3 u_3' - \Delta^3 u_4' - \varrho (u_1 - u_1') + \\ + 3 \varrho (u_2 - u_2') - 3 \varrho (u_3 - u_3') + \varrho (u_4 - u_4') + \varrho \Delta^3 u_4' = 0$$

....

$$-\varepsilon (u_n - u_n') + \Delta^3 u_{n-3}' - \varrho (u_{n-3} - u_{n-3}') = 0$$

Toutes ces équations, à l'exception des trois premières et des trois dernières, sont de la forme

$$-\varepsilon (u_x - u_x') - \Delta^6 u_{x-3}' + \varrho \Delta^3 (u_{x-3} - u_{x-3}') + \varrho \Delta^3 u_x' = 0$$

Si l'on prend u_0' de telle manière que $\Delta^3 u_0' = 0$ et si l'on pose en outre $u_0 = u_0'$, la 3e équation peut se mettre sous la forme précédente. Il en est de même des deux premières équations à condition que les quantités u'_{-1}, u'_{-2}, soient telles que

$$\Delta^3 u'_{-1} = 0 \qquad \Delta^3 u'_{-2} = 0$$

et que l'on prenne

$$u_{-1} = u'_{-1}, \; u_{-2} = u'_{-2} ;$$

semblablement, introduisons les quantités

$$u'_{n+1}, u'_{n+2}, u'_{n+3},$$

telles que l'on ait

$$\Delta^3 u'_{n-2} = \Delta^3 u'_{n-1} = \Delta^3 u'_n = 0$$

et

$$u_{n+1} = u'_{n+1}, u_{n+2} = u'_{n+2}, u_{n+3} = u'_{n+3}.$$

Alors les valeurs ajustées satisfont à l'équation aux différences finies:

$$\varepsilon u'_x - \Delta^6 u'_{x-3} + \varrho (\Delta^3 u'_x - \Delta^3 u'_{x-3}) = \varepsilon u_x - \varrho \Delta^3 u_{x-3} \tag{2}$$

4° *Théorème de «conservation» généralisé.* Définissons une nouvelle série de quantités

$$u'_{n+4}, u'_{n+5}, \ldots$$

telles que les différences troisièmes

$$\Delta^3 u'_{n+1}, \Delta^3 u'_{n+2},$$

soient toutes nulles.

On aura d'après l'équation fondamentale aux différences finies et les conditions auxiliaires du paragraphe précédent:

$$u_{n+4} = u'_{n+4}, u_{n+5} = u'_{n+5}, \ldots$$

Dans ces conditions, nous tirons de (2)

$$\varepsilon (u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_{n+1} + u'_{n+2} + u'_{n+3}) + \varrho (\Delta^3 u'_1 + \ldots + \Delta^3 u'_{n+3}) =$$

$$\varepsilon (u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3}) + \varrho (\Delta^2 u'_{n+1} - \Delta^2 u'_{-2}) -$$
$$- \varrho (\Delta^2 u_{n+1} - \Delta^2 u_{-2}) + \Delta^5 u'_{n+1} - \Delta^5 u'_{-2}$$

Et par conséquent, en vertu des conditions auxiliaires

$$\varepsilon\left[(u'_1-u_1)+(u'_2-u_2)+\ \dots\ +(u'_n-u_n)\right]+$$
$$+\varrho\,(\Delta^3 u'_1+\ \dots\ +\Delta^3 u'_n)=0$$

Semblablement,

$$\varepsilon\,(u'_1+2\,u'_2+\ \dots\ +n\,u'_n+\ \dots\ +\overline{n+3}\,u'_{n+3})+$$
$$+\varrho\,(\Delta^3 u'_1+\ \dots\ +\Delta^3 u'_{n+3})=$$

$$\varepsilon\,(u_1+2\,u_2+\ \dots\ +n\,u_n+\ \dots\ +\overline{n+3}\,u_{n+3})+$$
$$+\varrho\,(n\,\Delta^2 u'_{n+1}-\Delta\,u'_{n+1}+\Delta\,u'_{-2})-\varrho\,(n\,\Delta^2 u_{n+1}-\Delta\,u_{n+1}+\Delta\,u_{-2})+$$
$$+n\,\Delta^5 u'_{n+1}-\Delta^4 u'_{n+1}+\Delta^4 u'_{-2}$$

c'est-à-dire, et pour les mêmes raisons que précédemment,

$$\varepsilon\,(u'_1+2u'_2+\ \dots\ +n\,u'_n)-\varepsilon\,(u_1+2u_2+\ \dots\ +n\,u_n)+$$
$$+\varrho\,(\Delta^3 u'_1+2\,\Delta^3 u'_2+\ \dots\ +n\,\Delta^3 u'_n)=0$$

Enfin, de la même manière

$$\varepsilon\,(u'_1+2^2 u'_2+\ \dots\ +n^2 u'_n)-\varepsilon\,(u_1+2^2 u_2+\ \dots\ +n^2 u_n)+$$
$$+\varrho\,(\Delta^3 u'_1+2\,\Delta^3 u'_2+\ \dots\ +n\,\Delta^3 u'_n)=0$$

Ces relations généralisent les théorèmes de conservation des moments d'ordre 0, 1 et 2, théorèmes que l'on retrouve d'ailleurs en faisant $\varrho=0$ dans les expressions précédentes.

5° On peut montrer que les conditions obtenues au paragraphe 3 en vue de rendre minimum la forme quadratique des écarts, sont suffisantes, c'est-à-dire que toute modification des u' ainsi obtenus a pour effet d'augmenter la valeur de la forme considérée.

En effet, supposons que l'on remplace u'_x par u'_x+K_x, les K_x étant arbitraires et désignons par $\varepsilon\,F_1+S_1,+\varrho\,P_1$, la valeur correspondante de la fonction des écarts, nous avons:

$$F_1=\Sigma\,(u'+K-u)^2=\Sigma\,(u'-u)^2+\Sigma K^2+2\,\Sigma\,(u'-u)\,K$$

$$S_1=\Sigma\left[\Delta^3(u'+K)\right]^2=\Sigma\,(\Delta^3 u')^2+\Sigma\,(\Delta^3 K)^2+2\,\Sigma\,(\Delta^3 K\,\Delta^3 u')$$

$$P_1=2\,\Sigma\,(u'+K-u)\,\Delta^3(u'+K)=2\,\Sigma\,(u'-u)\,\Delta^3 u'+2\,\Sigma K\,\Delta^3 u'+$$
$$+2\,\Sigma K\cdot\Delta^3 K+2\,\Sigma\,(u'-u)\,\Delta^3 K$$

et par suite

$$\varepsilon F_1 + S_1 + \varrho P_1 = \varepsilon F + S + \varrho P + \\ + \varepsilon \Sigma K^2 + \Sigma (\Delta^3 K)^2 + 2\varrho \Sigma K \cdot \Delta^3 K + \\ + 2[\varepsilon \Sigma K (u' - u) + \Sigma \Delta^3 K \cdot \Delta^3 u' + \\ + \varrho \{ \Sigma K \cdot \Delta^3 u' + \Sigma \Delta^3 K \cdot (u' - u) \}]$$

mais, en vertu de (2)

$$\varepsilon \Sigma K_x (u'_x - u_x) = \Sigma K_x \cdot \Delta^6 u'_{x-3} + \varrho \Sigma K_x (\Delta^3 u'_{x-3} - \Delta^3 u_{x-3}) - \\ - \varrho \Sigma K_x \cdot \Delta^3 u'_x$$

Le premier terme du second membre s'obtient en sommant successivement par parties

$$\Sigma K_x \cdot \Delta^6 u'_{x-3} = K_x \Delta^5 u'_{x-3} - \Delta K_x \cdot \Delta^4 u'_{x-2} + \Delta^2 K_x \cdot \Delta^3 u'_{x-1} - \\ - \Sigma (\Delta^3 K_x \cdot \Delta^3 u'_x)$$

Les trois premiers termes du second membre s'annulent aux extrémités de la série.

On a donc

$$\Sigma K_x \cdot \Delta^6 u'_{x-3} = - \Sigma (\Delta^3 K_x \cdot \Delta^3 u'_x)$$

De même,

$$\Sigma K_x (\Delta^3 u'_{x-3} - \Delta^3 u_{x-3}) = K_x (\Delta^2 u'_{x-3} - \Delta^2 u_{x-3}) - \\ - \Delta K_x (\Delta u'_{x-2} - \Delta u_{x-2}) + \\ + \Delta^2 K_x (u'_{x-1} - u_{x-1}) - \\ - \Sigma \Delta^3 K_x (u'_x - u_x)$$

Les trois premiers termes du second membre s'annulent aux extrémités de la série. Il reste donc

$$\varepsilon F_1 + S_1 + \varrho P_1 = \varepsilon F + S + \varrho P + \Sigma (\Delta^3 K)^2 + \varepsilon \Sigma K^2 + 2\varrho \Sigma K \cdot \Delta^3 K$$

Comme on a en vertu de (1)

$$\varrho = r \cdot \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

$$\varepsilon F_1 + S_1 + \varrho P_1 = \varepsilon F + S + \varrho P +$$
$$+ \Sigma \left[(\Delta^3 K)^2 + (\varepsilon^{\frac{1}{2}} K)^2 + 2r (\varepsilon^{\frac{1}{2}} K) \Delta^3 K \right]$$

Il en résulte que puisque $|r| \leqslant 1$, on a toujours

$$\varepsilon F_1 + S_1 + \varrho P_1 \geqslant \varepsilon F + S + \varrho P$$

et la fonction considérée est bien un minimum [1]).

6° La résolution de l'équation aux différences finies s'opère par une méthode semblable à celle développée par le Dr *A. C. Aitken* dans les «Proceedings of the Royal Society of Edimburg», tome 46 (1925), page 35.

Si l'on pose $\Delta = E - 1$, l'équation (2) s'écrit

$$\left[(E-1)^6 - \varrho (E^3-1)(E-1)^3 - \varepsilon E^3 \right] u'_x = - \left[\varepsilon E^3 - \varrho (E-1)^3 \right] u_x$$

d'où

$$u'_x = - \frac{\varepsilon E^3 - \varrho (E-1)^3}{(E-1)^6 - \varrho (E^3-1)(E-1)^3 - \varepsilon E^3} u_x$$

Posons

$$u'_x = u'_{1x} + u'_{2x}$$

où

$$u'_{1x} = - \varepsilon \frac{E^3}{(E-1)^6 - \varrho (E^3-1)(E-1)^3 - \varepsilon E^3} u_x \qquad (3)$$

$$u'_{2x} = \varrho \Delta^3 \frac{1}{(E-1)^6 - \varrho (E^3-1)(E-1)^3 - \varepsilon E^3} u_x \qquad (4)$$

L'équation $\qquad (z-1)^6 - \varrho (z^3-1)(z-1)^3 - \varepsilon z^3 = 0 \qquad (5)$

étant réciproque, possède trois racines dont le module est inférieur à l'unité et trois racines de module supérieur à l'unité.

[1]) Cf. *Lidstone*, T. F. A., t. XI.

Par conséquent les expressions ci-dessus peuvent être développées en séries de Laurent convergentes pour $z = 1$. De plus le second membre de (3) n'est pas modifié lorsqu'on substitue E^{-1} à E et par suite le développement de u'_{1x} est symétrique par rapport au terme central.

On aura donc

$$u'_{1x} = K_{10}\, u_x + K_{11}\,(u_{x+1} + u_{x-1}) + K_{12}\,(u_{x+2} + u_{x-2}) + \ldots \tag{6}$$

$$\begin{aligned} u'_{2x} = K_{20}\, u_x + K_{21}\, u_{x+1} + K_{22}\, u_{x+2} + \ldots + \\ + K_{2,-1}\, u_{x-1} + K_{2,-2}\, u_{x-2} + \ldots \end{aligned} \tag{7}$$

avec

$$K_{1,\pm r} = -\frac{\varepsilon}{2\Pi i}\int_c \frac{t^{r+2}}{(t-1)^6 - \varrho\,(t^3-1)\,(t-1)^3 - \varepsilon\, t^3}\, dt$$

$$K_{2r} = \frac{\varrho}{2\Pi i}\,\Delta_r^3 \int_c \frac{1}{t^{r+1}\left[(t-1)^6 - \varrho\,(t^3-1)\,(t-1)^3 - \varepsilon\, t^3\right]}\, dt$$

$$K_{2,-r} = \frac{\varrho}{2\Pi i}\,\Delta_r^3 \int_c \frac{t^{r-1}}{(t-1)^6 - \varrho\,(t^3-1)\,(t-1)^3 - \varepsilon\, t^3}\, dt$$

Désignons par α, β, γ, les trois racines de l'équation (5) de module inférieur à l'unité.

Nous avons alors

$$K_{1,\pm r} = -\varepsilon \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{\alpha^{r+2}}{(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)\,(\alpha-\alpha^{-1})\,(\alpha-\beta^{-1})\,(\alpha-\gamma^{-1})}$$

$$K_{2,r} = -\varrho\,\Delta_r^3 \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{\alpha^{r+1}}{(\alpha^{-1}-\alpha)\,(\alpha^{-1}-\beta)\,(\alpha^{-1}-\gamma)\,(\alpha^{-1}-\beta^{-1})\,(\alpha^{-1}-\gamma^{-1})}$$

$$K_{2,-r} = \varrho\,\Delta_r^3 \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{\alpha^{r-1}}{(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)\,(\alpha-\alpha^{-1})\,(\alpha-\beta^{-1})\,(\alpha-\gamma^{-1})}$$

r différant de o dans la dernière expression. Posons $\alpha = r_1, \beta = = r_2 e^{i\theta}$, $\gamma = r_2^{-i\theta}$, l'une au moins des racines étant réelle.

Il en résulte les expressions suivantes pour les coefficients:

$$K_{1, \pm n} = \frac{\varepsilon r_1^2}{(r_1^2 - 2 r, r_2 \cos \theta + r_2^2) \left(r_1^2 - 2 \frac{r_1}{r_2} \cos \theta + \frac{1}{r_2^2} \right)} \left[A + \frac{B}{C} \right], \quad (8)$$

où

$$A = \frac{r_1^{n+1}}{1 - r_1^2}$$

$$B = r_2^{n+1} \left[r_2^2 \sin (n-2) \theta - r_2 \left(r_1 + \frac{1}{r_1} \right) \sin (n-1) \theta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r_2} \left(r_1 + \frac{1}{r_1} \right) \sin (n+1) \theta - \frac{1}{r_2^2} \sin (n+2) \theta \right],$$

$$C = (1 - r_2^2) \sin \theta \left(r_2^2 - 2 \cos 2 \theta + \frac{1}{r_2^2} \right)$$

De même

$$K_{2, -n} = \frac{- \varrho r_1^2}{(r_1^2 - 2 r_1 r_2 \cos \theta + r_2^2) \left(r_1^2 - 2 \frac{r_1}{r_2} \cos \theta + \frac{1}{r_2^2} \right)} \Delta_n^3 \left[A' + \frac{B'}{C'} \right] \quad (9)$$

où

$$A' = \frac{r_1^{n-2}}{1 - r_1^2},$$

$$B' = r_2^{n-2} \left[r_2^2 \sin (n-5) \theta - r_2 \left(r_1 + \frac{1}{r_1} \right) \sin (n-4) \theta \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r_2} \left(r_1 + \frac{1}{r_1} \right) \sin (n-2) \theta - \frac{1}{r_2^2} \sin (n-1) \theta \right],$$

$$C' = (1 - r_2^2) \sin \theta \left(r_2^2 - 2 \cos 2 \theta + \frac{1}{r_2^2} \right),$$

et

$$K_{2,n} = \frac{-\varrho r_1^2}{(r_1^2 - 2 r_1 r_2 \cos\theta + r_2^2)\left(r_1^2 - 2\frac{r_1}{r_2}\cos\theta + \frac{1}{r_2^2}\right)} \Delta_n^3 \left[A'' - \frac{B''}{C''}\right] \tag{10}$$

où

$$A'' = \frac{r_1^{n+4}}{1 - r_1^2},$$

$$B'' = r_2^{n+4}\left[r_2^{-2}\sin(n+5)\theta - r_2^{-1}\sin(n+4)\theta + \right.$$
$$\left. + r_2\left(r_1 + \frac{1}{r_1}\right)\sin(n+2)\theta - r_2^2\sin(n+1)\theta\right],$$

$$C'' = (1 - r_2^2)\sin\theta\left(r_2^2 - 2\cos 2\theta + \frac{1}{r_2^2}\right).$$

7° *Ajustement des extrémités de la série.* De même que nous avons introduit au paragraphe 4 les quantités u'_{n+4}, u'_{n+5}, ..., considérons les nouvelles quantités

$$u'_{-3},\ u'_{-4},\ \ldots$$

telles que les différences troisièmes

$$\Delta^3 u'_{-3},\ \Delta^3 u'_{-4},\ \ldots$$

soient nulles, et prenons

$$u_{-3} = u'_{-3},\ u_{-4} = u'_{-4},\ \ldots$$

De cette manière, aux extrémités de la série les valeurs brutes et les valeurs ajustées coïncident. L'équation aux différences devient dans ces conditions

$$u_x = -\frac{\varepsilon E^3 - \varrho(E-1)^3}{(E-1)^6 - \varrho(E^3-1)(E-1)^3 - \varepsilon E^3} u_x \tag{11}$$

ou encore

$$\frac{(E-1)^3\left[(E-1)^3-\varrho E^3\right]}{(E-1)^6-\varrho(E^3-1)(E-1)^3-\varepsilon E^3}u_x=0 \tag{12}$$

On montre (1) que les valeurs cherchées, $u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots$ sont données par l'équation

$$\frac{(E-1)^3}{(E-\alpha)(E-\beta)(E-\gamma)}u_x=0 \tag{13}$$

dont le premier membre peut être développé en série de puissances de E^{-1}. On a donc pour u_x

$$u_x=j_1 u_{x-1}+j_2 u_{x-2}+\ldots \tag{14}$$

pour

$$\varkappa=n+1, n+2, \ldots$$

Cette formule permet de calculer successivement $u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots$ à condition que les termes qui impliquent les valeurs $u_0, u_{-1}, \ldots$ soient négligeables. De plus, ces valeurs satisfont au second facteur du premier membre de l'équation (12) c'est-à-dire

$$\frac{(E-1)^3-\varrho E^3}{(E-\alpha^{-1})(E-\beta^{-1})(E-\gamma^{-1})}u_x=0$$

puisque ce facteur est développable en série de puissances de E et par conséquent (12) dérive de (13). Enfin, on a aussi

$$(E-1)^3 u_x=\Delta^3 u_x=0, \qquad x=n+1, n+2, \ldots$$

Les coefficients j_n qui figurent dans (14) sont donnés par la formule

$$j_n=\frac{-1}{r_1^2-2r_1r_2\cos\theta+r_2^2}\Delta_n^3\left\{r_1^{n-1}+\frac{r_2^{n-2}\left[r_2\sin(n-2)\theta-r_1\sin(n-1)\theta\right]}{\sin\theta}\right\} \tag{15}$$

Ainsi donc, grâce aux conditions auxiliaires, il est possible d'effectuer l'ajustement des extrémités de la série des valeurs brutes par un procédé identique à celui qui a été proposé dans le cas particulier $\varrho=0$.

[1]) Cf *E. T. Whittaker* et *C. Robinson* «The Calculus of Observations», p. 310.