Über einige Variationsprobleme der Versicherungsmathematik

Autor(en): **Schärf, Henryk**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **41 (1941)**

PDF erstellt am: **02.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966756

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Über einige Variationsprobleme der Versicherungsmathematik.

Von *Henryk Schärf*, z. Zt. in Zürich.

Einleitung.

In den letzten Zeiten durchgeführte Untersuchungen haben ein überraschendes Licht auf die scheinbar so verwickelte Abhängigkeit der Deckungskapitalien und Prämien einer Einzelversicherung von deren Rechnungsgrundlagen geworfen. Bemerkenswert allgemeine Ergebnisse konnten dabei auf dem Wege über Funktionalgleichungen des Deckungskapitals [1]) und über die Cantellische Theorie der Kapitalansammlung [2]) erzielt werden.

Die verhältnismässig einfache Form der gewonnenen Relationen steht in einem so grossen Kontrast zur Kompliziertheit der untersuchten Grössen, dass man hinter den sich offenbarenden Gesetzmässigkeiten einen einfachen und nur durch die Struktur des Gegenstandes verschleierten Sachverhalt ahnen könnte. Dieser Sachverhalt wird jedoch bei Verwendung der bisherigen Untersuchungsmethoden nicht ersichtlich.

In der vorliegenden Abhandlung soll nun eine neue Methode entwickelt werden, die vollständige Klarheit über die bestehenden Verhältnisse schafft und den gleichzeitig allgemeinsten und einfachsten Weg zur Behandlung der einschlägigen Probleme weisen dürfte.

Diese Methode stützt sich auf die Erkenntnis, dass die erwähnten Relationen keineswegs für Deckungskapitalien von Einzelversicherungen charakteristisch sind, sondern formelle Eigenschaften gewisser Summen- bzw. Integraldarstellungen ausdrücken, die für jede (endliche oder unendliche) Zahlenfolge bzw. jede Funktion mit beschränkter Variation Geltung besitzen. Die Erforschung dieser Eigenschaften (Kap. I) ermöglicht nicht nur eine weitgehende Verallgemeinerung der oberwähnten Ergebnisse, sondern auch deren Er-

---

[1]) Vgl. A. Berger: «Mathematik der Lebensversicherung», Wien, 1939.

[2]) Hiebei sind an erster Stelle die Arbeiten von M. Jacob zu nennen.

streckung auf die hier «Sammelversicherung» genannte Versicherung ganzer Kollektive (insbesondere auf die Sozialversicherung mit Prämiendeckungsverfahren sowie die Gruppenversicherung gegen technische Durchschnittsprämie) im Rahmen einer einheitlichen Theorie und schliesslich die Entdeckung bisher unbekannter Gesetzmässigkeiten (Kap. II und III).

Der Anwendungsbereich der vorliegenden Arbeit umfasst neben Klarstellung der Grundprinzipien der vorgenannten anderen Untersuchungsmethoden verschiedene Probleme, die den Einfluss einer Variation der die Prämien und Rücklagen bestimmenden Grundgrössen betreffen und deshalb als «Variationsprobleme» bezeichnet wurden; dabei wurden in erster Linie solche Fragestellungen berücksichtigt, die in dieser Zeitschrift ausführlicher behandelt worden sind. Es wurde ein Formelapparat geschaffen, der die allgemeinste Lösung derartiger Probleme ermöglicht.

Aus Raumgründen war die Beschränkung entweder auf die diskontinuierliche oder auf die kontinuierliche Darstellungsart erforderlich. Gewählt wurde die diskontinuierliche, da sie für den elementaren Unterricht und viele Praktiker einzig zugänglich ist und den Verhältnissen der Praxis am nächsten kommt, jedoch als die schwerfälligere und sprödere immer häufiger vernachlässigt wird. Die kontinuierliche Darstellung wird indessen für eine spätere Arbeit vorbehalten.

Kapitel I.

Formelle Eigenschaften gewisser Summendarstellungen.

§ 1.

Allgemeine Summengleichungen und Variationsformeln.

1. Die hier entwickelte Methode zur Behandlung versicherungsmathematischer Probleme bauen wir auf folgender einfachen Relation auf:

Gegeben sei eine beliebige Folge reeller Zahlen

$$R_0,\ R_1,\ \ldots\ldots,\ R_n$$

und eine solche Folge von «Grundzahlen»

$$E_0,\ E_1,\ \ldots\ldots,\ E_n,$$

dass $E_s \neq 0$ für $s < n$ ist. (Dabei kann auch $n = \infty$ sein, der Kürze halber beschränken wir uns aber auf endliches n.) Werden die Hilfszahlen T_s für $s < n$ durch die Gleichungen

$$(1) \qquad T_s = \frac{E_{s+1}}{E_s} R_{s+1} - R_s$$

definiert, so gilt die Summendarstellung

$$(2) \qquad E_t R_t = E_0 R_0 + \sum_{s=0}^{t-1} E_s T_s \qquad (t = 0, 1, \ldots, n),$$

wobei unter $\sum_{s=0}^{t-1} E_s T_s$ für $t = 0$ die Zahl 0 zu verstehen ist.

Beweis: Die Relation (2) reduziert sich für $t = 0$ auf eine Identität. Ist aber $0 < t \leqslant n$, so ergeben sich aus (1) die Gleichungen $E_s T_s = E_{s+1} R_{s+1} - E_s R_s$ für $s = 0, 1, \ldots, t-1$. Deren seitenweise Addition liefert

$$\sum_{s=0}^{t-1} E_s T_s = E_t R_t - E_0 R_0,$$

woraus ebenfalls die Relation (2) folgt.

Darstellungen der Form (2) erweisen sich für Grössen der Versicherungsmathematik wegen einiger formeller Eigenschaften als besonders vorteilhaft. Diese Eigenschaften, die keine speziellen Annahmen über die Natur der Zahlen R_t und E_t erfordern, wollen wir im vorliegenden Kapitel ableiten. In den weiteren Kapiteln sollen für R_t Rücklagenwerte von Einzel- oder Sammelversicherungen eingesetzt werden; ebensogut könnten aber darunter andere Grössen der Versicherungsmathematik verstanden werden, wie z. B. Reduktions- oder Risikowerte.

Als Beispiel für eine formelle Beziehung unter versicherungsmathematischem Gewand sei gezeigt, dass sich aus den Relationen (1) und (2) eine Verallgemeinerung der bekannten Darstellung eines Deckungskapitals als Summe aufgezinster Sparprämien ergibt.

Es sei $R_t = V_t$ die Deckungsrücklage einer Einzel- oder Sammelversicherung und möge $E_t = w_t$ den Kapitalwert zur Zeit 0 des zur Zeit t fälligen Betrages 1 bezeichnen. Alsdann stellt $\frac{E_{s+1}}{E_s} = \frac{w_{s+1}}{w_s} = v_s$ den (variablen) Abzinsungsfaktor

dar, die Hilfszahl $T_s = v_s V_{s+1} - V_s$ hingegen die Verallgemeinerung des Ausdruckes für die Sparprämie.

Die Relation (2) nimmt die Form

$$w_t V_t = V_0 + \sum_{s=0}^{t-1} w_s T_s$$

an und besagt, dass die Deckungsrücklagen einer Versicherung durch Aufzinsung ihres Anfangswertes und der Sparprämien gewonnen werden können. — Diese Tatsache, die sonst unter Voraussetzung eines konstanten Zinsfusses und für Einzelversicherungen abgeleitet wird, besteht also auch bei variablem Zinsfuss und Sammelversicherungen.

2. Werden die Grundzahlen E_s durch E'_s ersetzt, so ändern sich die durch (1) definierten Hilfszahlen T_s auf

$$\Theta_s = \frac{E'_{s+1}}{E'_s} R_{s+1} - R_s .$$

Daraus folgt

$$\Theta_s = T_s + R_{s+1} \cdot \left(\frac{E'_{s+1}}{E'_s} - \frac{E_{s+1}}{E_s} \right),$$

oder, nach Einführung der Symbole

$$e_s = \frac{E_{s+1}}{E_s}, \; e'_s = \frac{E'_{s+1}}{E'_s}, \; \delta x = x' - x, \quad \text{die Beziehung}$$

$$\Theta_s = T_s + R_{s+1} \cdot \delta e_s . \tag{3}$$

Laut Relation (2) ist dabei

$$E'_t R_t = E'_0 R_0 + \sum_{s=0}^{t-1} E'_s \Theta_s ,$$

so dass

$$E'_t R_t = E'_0 R_0 + \sum_{s=0}^{t-1} E'_s \left(T_s + R_{s+1} \cdot \delta e_s \right) \tag{4}$$

gilt. Sind R_t und E_t Funktionen gewisser Parameter, so drückt die Gleichung (1) auch T_s als Funktion dieser Parameter aus und die Relation (4) bildet eine Summengleichung für die Grössen R_t; darin kann über die Grundzahlen E'_s noch beliebig verfügt werden. Bei kontinuierlicher Darstellung entspricht dieser Summengleichung eine allgemeine Integralgleichung.

In mannigfaltigen Publikationen und auf verschiedensten Wegen wurden derartige Funktionalgleichungen in den letzten Zeiten für den Spezialfall abgeleitet, dass R_t das Deckungskapital einer Einzelversicherung ist. — Die hier mitgeteilte Ableitung ist wohl die einfachste und gilt für beliebige Grössen der Versicherungsmathematik.

Im Kapitel II wird die Form der Summengleichung für Deckungsrücklagen einer Einzel- und Sammelversicherung angegeben. Hier sei beispielshalber gezeigt, dass das für die ersten t Versicherungsjahre berechnete mittlere Risikoquadrat M^2 $(0, t)$ der Lebensversicherung eines $x$jährigen — der Summengleichung

$$E'_t \cdot M^2(0, t) = \sum_{s=0}^{t-1} E'_s \left[{}_{s+1}p_x \cdot q_{x+s} \cdot v^{2(s+1)} \cdot \left(U_{s+1} - {}_{s+1}V\right)^2 + M^2(0, s+1) \cdot \left(e'_s - 1\right)\right]$$

genügt. Dabei hat q_{x+s}, ${}_{s+1}p_x$, ${}_{s+1}V$ die übliche Bedeutung, während U_s die bei Ableben des Versicherten im s-ten Versicherungsjahre fällig werdende Versicherungssumme bezeichnet und über die Grundzahlen E'_s noch beliebig verfügt werden kann.

Beweis: Nach dem Hattendorfschen Satze ist

$$M^2(0, t+1) - M^2(0, t) = {}_tp_x \cdot p_{x+t} \cdot q_{x+t} \cdot v^{2(t+1)} \cdot \left(U_{t+1} - {}_{t+1}V\right)^2 .$$

Setzen wir in (1) $E_s = 1$, $R_s = \mathrm{M}^2$ $(0, s)$, $(s = 0, 1, \ldots, n-1)$, so wird daher

$$T_s = {}_{s+1}p_x \cdot q_{x+s} \cdot v^{2(s+1)} \cdot \left(U_{s+1} - {}_{s+1}V\right)^2$$

und aus (4) folgt die behauptete Summengleichung.

3. Nach dieser Digression kehren wir zur Relation (2) zurück. Subtrahieren wir von ihr dieselbe für $t = k$ angesetzte Relation, so ergibt sich

$$E_t R_t - E_k R_k = \sum_{s=0}^{t-1} E_s T_s - \sum_{s=0}^{k-1} E_s T_s ,$$

oder nach Einführung des Symbols

$$\mathrm{a}_{k, \overline{t-k|}} \{f_s\} = \sum_{s=0}^{t-1} E_s f_s - \sum_{s=0}^{k-1} E_s f_s :$$

$$(2') \qquad E_t R_t = E_k R_k + \mathrm{a}_{k, \overline{t-k|}} \{T_s\}$$

für $t = 0, 1, \ldots, n$; $k = 0, 1, \ldots, n$.

Daraus ersieht man, dass die Zahlenfolge $\{R_s\}$ durch eins ihrer Glieder R_k sowie die Zahlenfolgen $\{E_s\}$, $\{T_s\}$ bestimmt ist.

Eines der wichtigsten Probleme der Versicherungsmathematik lässt sich nun folgendermassen verallgemeinern:

Wie drückt sich die Variation $\delta R_t = R'_t - R_t$ formelmässig aus, wenn R_k, $\{E_s\}$, $\{T_s\}$ entsprechend durch R'_k, $\{E'_s\}$, $\{T'_s\}$ ersetzt werden?

Die Lösung ist fast momentan. Es bezeichne Θ_s die den Folgen $\{R_s\}$, $\{E'_s\}$ entsprechende Hilfszahl, $\mathsf{a}'_{k,\overline{t-k}|}\{f_s\}$ das mit den Grundzahlen E'_s statt E_s gebildete Summensymbol. Gemäss (2′) ist dann

$$E'_t R'_t = E'_k R'_k + \mathsf{a}'_{k,\overline{t-k}|}\{T'_s\},$$

$$E'_t R_t = E'_k R_k + \mathsf{a}'_{k,\overline{t-k}|}\{\Theta_s\}$$

und durch Subtraktion folgt

$$E'_t \cdot \delta R_t = E'_k \cdot \delta R_k + \mathsf{a}'_{k,\overline{t-k}}\{g_s\} \tag{5}$$

mit $g_s = T'_s - \Theta_s$. Setzen wir für Θ_s den Wert $T_s + R_{s+1} \cdot \delta e_s$ aus (3) ein, so erhalten wir für die «Änderungszahlen» g_s die Darstellung

$$g_s = \delta T_s - R_{s+1} \cdot \delta e_s. \tag{6}$$

Die Gleichungen (5) und (6) liefern die gesuchte Lösung. Vertauschen wir dabei die Werte mit und ohne Strich, so ergibt sich eine zweite Lösung:

$$E_t \cdot \delta R_t = E_k \cdot \delta R_k + \mathsf{a}_{k,\overline{t-k}|}\{g^*_s\} \quad \text{mit} \tag{5*}$$

$$g^*_s = \delta T_s - R'_{s+1} \cdot \delta e_s. \tag{6*}$$

§ 2.

Das Invarianzproblem.

In der Versicherungsmathematik wird die Frage untersucht, unter welchen Bedingungen zwei Versicherungen identische Deckungskapitalien haben. Die Formel (5) ermöglicht allgemeiner die sofortige Angabe einer notwendigen und hinreichenden Bedingung dafür, dass die Glieder zweier Zahlenfolgen $\{R_s\}$, $\{R'_s\}$ für $s = t_1, t_1 + 1, \ldots, t_2$ übereinstimmen, oder, wie wir sagen wollen, diese Indizes «Fixpunkte» der Variation δR_s sind.

Es seien g_s die den Grössen R_s, R'_s und den Grundzahlen E_s, E'_s entsprechenden Änderungszahlen, wobei $E'_s \neq 0$ für $s < t_2$ und $\delta R_{t_2} = 0$ für $E'_{t_2} = 0$ sein soll. Alsdann gilt folgender

Satz 1 (allgemeiner Invarianzsatz). Damit $R_s = R'_s$ für $s = t_1, \ldots, t_2$ ist, ist es notwendig und hinreichend, dass die Variation δR_s Fixpunkte hat und für jeden Fixpunkt k

$$\mathsf{a}'_{k,\overline{t_2-k|}}\{g_s\} = 0 \tag{7}$$

ist sowie überdies die Gleichungen

$$g_s = 0 \tag{8}$$

für $s = t_1, t_1 + 1, \ldots, t_2 - 1$ erfüllt sind.

Beweis: Nehmen wir an, dass $\delta R_s = 0$ für $t_1 \leqslant s \leqslant t_2$ ist. Dann hat die Variation δR_t Fixpunkte (z. B. die zwischen t_1 und t_2 gelegenen Indizes). Wählen wir einen solchen in der Gleichung (5) als k und setzen $t = t_2$, so folgt wegen $\delta R_{t_2} = \delta R_k = 0$ die Relation (7). Setzen wir aber $k = t_1$, so ergibt sich analog für $t = t_1, t_1 + 1, \ldots, t_2$ $\mathsf{a}'_{t_1,\overline{t-t_1|}}\{g_s\} = 0$ und daher verschwindet für $t = t_1, t_1 + 1, \ldots, t_2 - 1$

$$\mathsf{a}'_{t_1,\overline{t+1-t_1|}}\{g_s\} - \mathsf{a}'_{t_1,\overline{t-t_1|}}\{g_s\} = \sum_{s=0}^{t} E'_s g_s - \sum_{s=0}^{t-1} E'_s g_s = E'_t g_t ,$$

woraus wegen $E'_t \neq 0$ die Gleichungen (8) folgen.

Sind umgekehrt die Bedingungen des Satzes 1 erfüllt und wählen wir in der Relation (5) als k einen Fixpunkt von δR_s, so folgt für $t = t_1, t_1 + 1, \ldots, t_2$:

$$E'_t \cdot \delta R_t = \mathsf{a}'_{k,\overline{t-k|}}\{g_s\} .$$

Nun ist aber

$$\mathsf{a}'_{k,\overline{t-k|}}\{g_s\} = \sum_{s=0}^{t-1} E'_s g_s - \sum_{s=0}^{k-1} E'_s g_s = \sum_{s=0}^{t_2-1} E'_s g_s - \sum_{s=0}^{k-1} E'_s g_s + \sum_{s=0}^{t-1} E'_s g_s -$$

$$- \sum_{s=0}^{t_2-1} E'_s g_s = \mathsf{a}'_{k,\overline{t_2-k|}}\{g_s\} - \sum_{s=t}^{t_2-1} E'_s g_s ,$$

was angesichts (7) und (8) für $t = t_1, t_1 + 1, \ldots, t_2$ verschwindet. Daher ist $E'_t \cdot \delta R_t = 0$ und bei $E'_t \neq 0$ ist $\delta R_t = 0$ für $t = t_1, t_1 + 1, \ldots, t_2$. Aus $E'_t = 0$ folgt aber voraussetzungsgemäss $t = t_2$ und auch $\delta R_t = 0$.

§ 3.

Einige Vorzeichensätze.

Aus den Formeln des § 1 können einige allgemeine Schlüsse über das Vorzeichen von δR_t gezogen werden, die sich als sehr nützlich für die Anwendungen erweisen. Dabei setzen wir voraus, dass $E_t > 0$ und $E'_t > 0$ für $t < n$ sowie $E_n \geqslant 0$ und $E'_n \geqslant 0$ ist; ferner soll $\delta R_n = 0$ sein, falls $E'_n = 0$ ist.

Nehmen wir an, dass einer der Indizes t_1, $t_2 > t_1$ Fixpunkt der Variation δR_t ist.

Ist es t_1, so folgt aus (5) für $k = t_1$ und $t = t_1 + 1, \ldots, t_2$

$$E'_t \cdot \delta R_t = \sum_{s=t_1}^{t-1} E'_s g_s \,. \tag{5'}$$

Ist es aber t_2, so folgt aus (5) für $k = t_2$ und $t = t_1, t_1 + 1, \ldots, t_2 - 1$

$$E'_t \cdot \delta R_t = -\sum_{s=t}^{t_2-1} E'_s g_s \,. \tag{5''}$$

Daraus ergibt sich unmittelbar folgender

Satz 2: Wechseln die Änderungszahlen g_s der Variation δR_t ihr Vorzeichen für $s = t_1, \ldots, t_2 - 1$ nicht und ist ein Endpunkt k des Intervalls (t_1, t_2) Fixpunkt von δR_t, so wechselt auch δR_t in diesem Intervall das Vorzeichen nicht. Ist dabei k linker Endpunkt dieses Intervalls und existiert ein Index $k \leqslant s_1 < t$ mit $g_{s_1} \neq 0$, so hat δR_t das Vorzeichen von g_{s_1}. Ist hingegen k rechter Endpunkt dieses Intervalls und existiert ein Index $t \leqslant s_2 < k$ mit $g_{s_2} \neq 0$, so hat δR_t das entgegengesetzte Vorzeichen wie g_{s_2}.

Aus diesem Satz folgen weitere zwei Vorzeichensätze:

Satz 3 (allgemeiner Zeichenwechselsatz). Verschwinden die Änderungszahlen g_s der Variation δR_t mit den Fixpunkten k_1, k_2 in keinem der Intervalle

$$k_1 \leqslant s < \Theta, \; T \leqslant s < k_2 \quad \text{mit} \quad \Theta < k_2, \; T > k_1$$

identisch und weisen sie für die Indizes s aus diesen Intervallen keinen Zeichenwechsel auf, so sind die Vorzeichen von δR_Θ und δR_T verschieden.

Beweis: Voraussetzungsgemäss existieren Indizes s_1, s_2 mit

$$k_1 \leqslant s_1 < \Theta, \quad T \leqslant s_2 < k_2, \quad g_{s_1} \neq 0, \quad g_{s_2} \neq 0$$

und die Vorzeichen von g_{s_1}, g_{s_2} sind einander gleich. Da laut Satz 2 δR_Θ das Vorzeichen von g_{s_1}, δR_T das entgegengesetzte wie g_{s_2} hat, sind die Vorzeichen von δR_Θ und δR_T verschieden.

Satz 4 (allgemeiner Zeichenbewahrungssatz). Wechseln die Änderungszahlen der Variation δR_t mit den Fixpunkten k_1, k_2 für $k_1 \leqslant s < k_2$ höchstens einmal das Vorzeichen, so hat δR_t für $k_1 < t < k_2$ das Vorzeichen der Änderungszahlen vor dem Zeichenwechsel, sofern $\delta R_t \neq 0$ ist. Dies trifft dann und nur dann zu, wenn Indizes s_1, s_2 mit $k_1 \leqslant s_1 < t \leqslant s_2 < k_2$ und $g_{s_1} \neq 0$, $g_{s_2} \neq 0$ existieren.

Beweis: Ist $\delta R_t \neq 0$ für $k_1 < t < k_2$, so folgt aus den Darstellungen (5′) und (5″) die Existenz von Indizes s_1, s_2 mit $k_1 \leqslant s_1 < t \leqslant s_2 < k_2$, $g_{s_1} \neq 0$, $g_{s_2} \neq 0$. Umgekehrt mögen solche Indizes existieren. Wechselt g_s für $k_1 \leqslant s < t$ das Vorzeichen nicht, so hat δR_t laut Satz 2 das Vorzeichen von g_{s_1}, also das Vorzeichen der Änderungszahlen vor dem Zeichenwechsel. Anderenfalls können voraussetzungsgemäss die Änderungszahlen für $t \leqslant s < k_2$ nicht nochmals ihr Vorzeichen wechseln, und g_{s_2} hat das entgegengesetzte Vorzeichen wie die Änderungszahlen vor dem Zeichenwechsel. Laut Satz 2 hat aber δR_t das entgegengesetzte Vorzeichen wie g_{s_2}, also wieder dasselbe wie die Änderungszahlen vor dem Zeichenwechsel.

Wir bringen noch folgenden

Satz 5: Wechseln die Änderungszahlen g_s der Variation δR_t zwischen deren Fixpunkten k_1 und k_2 genau zweimal das Vorzeichen, so wechselt dort δR_t genau einmal das Vorzeichen, und beide Zahlenfolgen haben vor dem ersten Zeichenwechsel dasselbe Vorzeichen.

Beweis: Es sei z. B.

$$g_s \leqslant 0 \text{ für } k_1 \leqslant s < \Theta, \quad g_s \geqslant 0 \text{ für } \Theta \leqslant s < T, \quad g_s \leqslant 0 \text{ für } T \leqslant s < k_2,$$

wobei $g_\Theta > 0$, $g_T < 0$ und $g_{s_1} < 0$ für einen Index $s_1 < \Theta$ sein soll. Laut allgemeinem Zeichenwechselsatz ist dann das Vorzeichen von δR_Θ und δR_T verschieden, und zwar in vorliegendem Falle $\delta R_\Theta < 0$, $\delta R_T > 0$. Aus (5) wird überdies ersichtlich, dass $E'_t \, \delta R_t$ für $\Theta \leqslant t < T$ mit t wächst, folglich weist δR_t nur einen zwischen Θ und T gelegenen Zeichenwechsel auf und gemäss Satz 2 keinen zwischen k_1 und Θ oder T und k_2 gelegenen.

Kapitel II.

Die Rücklagenvariation einer allgemeinen Versicherungsgesamtheit.

§ 1.

Die Rücklagen von Einzel- und Sammelversicherungen.

Wir wollen nunmehr die Ergebnisse des vorigen Kapitels auf Einzel- und Sammelversicherungen anwenden, denen demographische Hypothesen zugrunde liegen.

Für Einzelversicherungen hat es sich als bequem erwiesen, solche Hypothesen vermittelst der Ausscheideordnung einer fingierten Gesamtheit auszudrücken, als deren Element man die einzelne Versicherung auffasst. Noch anschaulicher ist eine analoge Formulierung für Sammelversicherungen. Hier beschreiben die demographischen Hypothesen in Annäherung die Änderungen der betrachteten Kollektivgesamtheit selbst, wobei jedoch neben Austritten auch Eintritte vorkommen können.

Eine auf beide Fälle anwendbare Formulierung der demographischen Hypothesen ergibt sich daher mit Hilfe des Modells einer Elementengesamtheit, die sich durch Aus- und Eintritte ändern kann. Diese Aus- und Eintritte mögen aus m einander ausschliessenden Gründen in der Zeit $0 \leqslant t \leqslant n$ erfolgen. Ist L_t die Elementenzahl zur Zeit t $(t = 0, 1, \ldots, n)$, $f_t^{(i)}$ die Zahl der aus dem i-ten Grunde in der Zeit 0 bis t ausgetretenen Elemente (für einen Austrittsgrund) bzw. die mit dem Minuszeichen versehene Anzahl der in dieser Zeit eingetretenen Elemente (für einen Eintrittsgrund), so ist

$$L_t = L_0 - \sum_{i=1}^{m} f_t^{(i)} . \tag{9}$$

Sinngemäss ist dabei $f_0^{(i)} = 0$ für $i = 1, \ldots, m$ und die Zahlen $f_t^{(i)}$ $(t = 0, 1, \ldots, n)$ sind für einen Austrittsgrund nichtnegativ und nichtfallend, für einen Eintrittsgrund nichtpositiv und nichtwachsend, während $L_t > 0$ für $0 \leqslant t < n$ und $L_n \geqslant 0$ sein soll.

Der betrachteten Gesamtheit mögen folgende Einnahmen und Ausgaben zugeordnet sein.

Einnahmen: im Zeitpunkt $t = 0$ Anfangszahlungen, deren Gesamtbetrag mit $L_0 \cdot A$ bezeichnet werde (für die damaligen L_0 Mitglieder) und in jeder der Zeitperioden $s < t < s + 1$ ($s = 0, 1, \ldots, n - 1$) Prämien, deren auf den Zeitpunkt s bezogener Kapitalwert mit $L_s \pi_s$ bezeichnet werde (für die am Anfang dieser Periode vorhandenen L_s Mitglieder).

Ausgaben: in jeder der Zeitperioden $s < t < s + 1$ ($s = 0, 1, \ldots, n - 1$) Rentenzahlungen, deren auf den Zeitpunkt s bezogener Kapitalwert mit $L_s \varrho_s$ bezeichnet werde (für die am Anfang dieser Periode vorhandenen L_s Mitglieder); ferner in jeder der Zeitperioden $s < t \leqslant s + 1$ für die aus dem i-ten Grunde aus- bzw. eintretenden $|f_{s+1}^{(i)} - f_s^{(i)}|$ Elemente Entschädigungen, deren auf den Zeitpunkt $s + 1$ bezogener Kapitalwert mit $[f_{s+1}^{(i)} - f_s^{(i)}] \cdot U_{s+1}^{(i)}$ bezeichnet werde; endlich im Zeitpunkt $t = n$ Endzahlungen im Gesamtbetrage von $L_n T$.

Sinngemäss sollen dabei die Zahlen π_s und ϱ_s nichtnegativ sein, während die Zahlen A, T und $U_{s+1}^{(i)}$ beliebig sein können.

Für Einzelversicherungen geben in der Regel die Zahlen A, π_s, ϱ_s, $U_{s+1}^{(i)}$, T den Betrag der individuellen Versicherungsleistungen an. Anders ist es für Sammelversicherungen, da hier analoge Versicherungsleistungen nicht für alle Mitglieder denselben Wert zu haben brauchen. Besonders deutlich ist dies bei Entschädigungen in Rentenform ersichtlich; als durch Austritt fällig werdende Versicherungsleistungen sind hier die vom Alter des Rentenbezügers abhängigen Rentenbarwerte zu betrachten, und die «Entschädigungszahlen» $U_{s+1}^{(i)}$ haben nur Durchschnittscharakter. — Die «Prämienzahlen» π_s stellen bei Gruppenversicherungen gegen technische Durchschnittsprämie diese Durchschnittsprämie und bei Sozialversicherungen mit Prämiendeckungsverfahren in der Regel den Prämiensatz dar. — Unter obiges Schema lassen sich übrigens auch ganze Bestände von Einzelversicherungen einbeziehen, wobei alle Zahlen A, π_s, ϱ_s, $U_{s+1}^{(i)}$, T nur Durchschnittscharakter erhalten.

Gesamtheiten, denen obbezeichnete Zahlungen zugeordnet sind, nennen wir «Versicherungsgesamtheiten». Wir definieren für sie die «retrospektive Gesamtrücklage» $\tilde{V}_t^{(r)}$ im Zeitpunkt $t = 0, 1, \ldots, n$ als Differenz der auf diesen Zeitpunkt bezogenen Kapitalwerte deren bis dahin erfolgten Einnahmen und Ausgaben sowie die «prospektive Gesamtrücklage» $\tilde{V}_t^{(p)}$ als analoge Differenz der nachher erfolgten Ausgaben und Einnahmen.

Mit ihrer Hilfe definieren wir die «retrospektive Durchschnittsrücklage» $V_t^{(r)}$ und die «prospektive Durchschnittsrücklage» $V_t^{(p)}$ der

Gesamtheit im Zeitpunkt t als den durchschnittlich auf ein Element in diesem Zeitpunkt entfallenden Anteil an der entsprechenden Gesamtrücklage. Bei einer Einzelversicherung erkennt man hierin die übliche Definition des Deckungskapitals wieder.

Bezeichnen wir den auf den Zeitpunkt 0 bezogenen Kapitalwert des im Zeitpunkt t zahlbaren Betrages 1 mit w_t, wobei $w_0 = 1 > w_1 > \ldots > w_n > 0$ sein soll, so ist

$$\widetilde{V}_t^{(p)} = L_t\, V_t^{(p)} =$$

$$= \sum_{s=t}^{n-1} \frac{w_s}{w_t} \left[L_s \varrho_s + \frac{w_{s+1}}{w_s} \sum_{i=1}^{m} (f_{s+1}^{(i)} - f_s^{(i)})\, U_{s+1}^{(i)} - L_s \pi_s \right] + \frac{w_n}{w_t} L_n\, T$$

für $t = 0, 1, \ldots, n$ (wobei $\sum_{s=n}^{n-1} f_s = 0$ gesetzt wird). — Führen wir noch die Bezeichnungen

$$\frac{w_{s+1}}{w_s} = v_s, \quad \frac{f_{s+1}^{(i)} - f_s^{(i)}}{L_s} = q_s^{(i)}$$

ein, so lässt sich obige Formel auch schreiben:

$$w_t\, \widetilde{V}_t^{(p)} = w_t\, L_t\, V_t^{(p)} = \tag{10 p}$$

$$= w_n L_n\, T - \sum_{s=t}^{n-1} w_s L_s \left(\pi_s - \varrho_s - v_s \sum_{i=1}^{m} q_s^{(i)}\, U_{s+1}^{(i)} \right).$$

Man sieht dabei, dass v_s den (variablen) Abzinsungsfaktor bezeichnet und $q_s^{(i)}$ die dem i-ten Grunde entsprechende «abhängige» oder «experimentelle» [1]) Austrittswahrscheinlichkeit (für einen Austrittsgrund) bzw. die analoge mit dem Minuszeichen versehene Eintrittswahrscheinlichkeit (für einen Eintrittsgrund) ist.

Ist $L_n = 0$, so nennen wir den Endpunkt der Versicherungsgesamtheit, $t = n$, einen «Singularitätspunkt». Dann ist auch $\widetilde{V}_n^{(p)} = 0$,

---

[1]) Vgl. E. Marchand: «Probabilités expérimentales, probabilités corrigées et probabilités indépendantes», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1937, Heft 33.

da aus der Formel (10 p) $\widetilde{V}_n^{(p)} = L_n \cdot T$ folgt. In diesem Falle kann die Durchschnittsrücklage $V_n^{(p)}$ beliebig festgesetzt werden.

Ganz analog ergibt sich für die retrospektive Gesamtrücklage die Darstellung

$$(10\,\mathrm{r})\quad w_t \widetilde{V}_t^{(r)} = w_t L_t V_t^{(r)} = L_0 A + \sum_{s=0}^{t-1} w_s L_s \left(\pi_s - \varrho_s - v_s \sum_{i=1}^{m} q_s^{(i)} U_{s+1}^{(i)} \right).$$

Die praktisch wichtigsten Versicherungsgesamtheiten genügen dem «Äquivalenzprinzip», demzufolge der auf den Zeitpunkt 0 bezogene Kapitalwert der Einnahmen demjenigen der Ausgaben gleichkommt. Es ist leicht zu beweisen, dass alsdann die prospektiven Rücklagen mit den entsprechenden retrospektiven übereinstimmen.

§ 2.

Die Änderungszahlen von Rücklagenvariationen. Der Fundamentalsatz der Theorie der Kapitalansammlung.

Wählen wir nun in der Formel (1) $R_t = V_t$ (wobei V_t die retrospektive oder prospektive Durchschnittsrücklage der Versicherungsgesamtheit bezeichnet), sowie $E_t = \dfrac{w_t L_t}{L_0}$ (d. i. die Einmalprämie, die im Zeitpunkt 0 von jedem Mitglied der Versicherungsgesamtheit zu erheben ist, damit im Zeitpunkt t an jedes der damaligen Mitglieder der Betrag 1 ausgezahlt werden kann). Dann erhalten wir für die entsprechende Hilfszahl T_s den Ausdruck

$$T_s = \frac{L_0}{w_s L_s} \left(\frac{1}{L_0} w_{s+1} L_{s+1} V_{s+1} - \frac{1}{L_0} w_s L_s V_s \right) =$$

$$= \frac{1}{w_s L_s} \left(w_{s+1} \widetilde{V}_{s+1} - w_s \widetilde{V}_s \right)$$

und angesichts der Formeln (10) ist

$$T_s = \pi_s - \varrho_s - v_s \sum_{i=1}^{m} q_s^{(i)} U_{s+1}^{(i)}$$

für $s = 0, 1, \ldots, n-1$. Wir schreiben auch $T_s = \pi_s - \pi_s^{(N)}$ mit

$$\pi_s^{(N)} = \varrho_s + v_s \sum_{i=1}^{m} q_s^{(i)} U_{s+1}^{(i)} \quad ^{1)}. \tag{11 N}$$

Für die entsprechenden Änderungszahlen ergeben sich aus den Formeln (6) bzw. (6*) nach leichten Umformungen die Ausdrücke

$$g_s = \delta \pi_s - \delta \varrho_s - v_s' \sum_{i=1}^{m} \left[\left(U_{s+1}'^{(i)} - V_{s+1} \right) \cdot \delta q_s^{(i)} + q_s^{(i)} \cdot \delta U_{s+1}^{(i)} \right] - \tag{12}$$

$$- \delta v_s \cdot \left[V_{s+1} + \sum_{i=1}^{m} q_s^{(i)} \left(U_{s+1}^{(i)} - V_{s+1} \right) \right],$$

$$g_s^* = \delta \pi_s - \delta \varrho_s - v_s' \sum_{i=1}^{m} \left[\left(U_{s+1}'^{(i)} - V_{s+1}' \right) \cdot \delta q_s^{(i)} + q_s^{(i)} \cdot \delta U_{s+1}^{(i)} \right] - \tag{12*}$$

$$- \delta v_s \cdot \left[V_{s+1}' + \sum_{i=1}^{m} q_s^{(i)} \left(U_{s+1}^{(i)} - V_{s+1}' \right) \right].$$

(Dabei ist zu berücksichtigen, dass angesichts (9) für $e_s = v_s \dfrac{L_{s+1}}{L_s}$ die Darstellung gilt:

$$e_s = v_s \left(1 - \sum_{i=1}^{m} q_s^{(i)} \right).) \tag{13}$$

Bemerkenswert ist, dass sowohl die retrospektiven wie auch die prospektiven Rücklagen zu denselben Werten für T_s und g_s führen, also denselben Gleichungen (2′), (4) und (5) genügen. So nimmt z. B. die Summengleichung (4) sowohl für retrospektive wie auch prospektive Durchschnittsrücklagen V_t die Gestalt

$$E_t' V_t = E_0' V_0 + \sum_{s=0}^{t-1} E_s' \left\{ \left(\pi_s - \pi_s^{(N)} \right) + V_{s+1} \left[\frac{E_{s+1}'}{E_s'} - v_s \left(1 - \sum_{i=1}^{m} q_s^{(i)} \right) \right] \right\}$$

an, wobei $E_s' \neq 0$ für $s < n$ sein soll, sonst aber über die Zahlen E_s' beliebig verfügt werden kann. Dies ist eine für Einzel- und Sammelversicherungen gültige Funktionalgleichung, der im kontinuierlichen Falle die gewöhnlich für Einzelversicherungen betrachteten Integralgleichungen des Deckungskapitals entsprechen. Aus (2′) wird hingegen

$$E_t V_t = E_k V_k + a_{k, \overline{t-k}|} \left\{ \pi_s - \pi_s^{(N)} \right\}. \tag{2''}$$

---

[1]) Wird in der Fundamentaldarstellung (2) $V_0 = 0$ und $\pi_s = \pi_s^{(N)}$, also $T_s = 0$ gewählt, so folgt $V_t \equiv 0$; daher ist $\pi_s^{(N)}$ die «natürliche Prämie» der Versicherungsgesamtheit.

2. In Anwendung der gewonnenen Formeln möge ein einfacher Beweis des Fundamentalsatzes der Cantellischen Theorie der Kapitalansammlung[1]) gegeben werden. Diesen Satz formulieren wir folgendermassen: Die retrospektiven Deckungskapitalien $V_l^{(r)}$ einer Einzelversicherung mit dem Anfangserlag $A = 0$, Renten $\varrho_s = 0$, Entschädigungen $U_{s+1}^{(i)} = A_{s+1}^{(i)} \cdot V_{s+1}^{(r)}$ $(i = 1, \ldots, m)$ bleiben ungeändert, falls die Entschädigungen durch $U_{s+1}^{\prime(i)} = 0$ und die Ausscheidewahrscheinlichkeiten $q_s^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$ durch $q_s^{\prime(i)} = (1 - A_{s+1}^{(i)}) \cdot q_s^{(i)}$ ersetzt werden.

Da es sich offenbar um eine Rücklagenvariation mit dem Fixpunkt 0 handelt, genügt es angesichts des allgemeinen Invarianzsatzes zu zeigen, dass $g_s = 0$ für $s = 0, 1, \ldots, n - 1$ ist (woraus dann $a'_{0,\overline{n}|}\{g_s\} = 0$ folgt). Nun ist hiebei $\delta \pi_s = \delta \varrho_s = 0$ und die Formel (12) vereinfacht sich wegen

$$q_s^{(i)} \cdot \delta U_{s+1}^{(i)} = - q_s^{(i)} \cdot A_{s+1}^{(i)} V_{s+1}^{(r)} = V_{s+1}^{(r)} \cdot \delta q_s^{(i)} \quad \text{auf}$$

$$g_s = - v_s \sum_{i=1}^{m} U_{s+1}^{\prime(i)} \cdot \delta q_s^{(i)} ,$$

was angesichts $U_{s+1}^{\prime(i)} = 0$ tatsächlich verschwindet. Laut dieser Ableitung gilt übrigens obiger Satz auch für Sammelversicherungen.

§ 3.

Spar- und Risikoprämie einer Versicherungsgesamtheit. Die Variation einer Einmalprämie. Kompensierende Dividendenvariationen.

1. Als nächste Anwendung verallgemeinern wir die für Einzelversicherungen bekannte Prämienzerlegung in einen Spar- und Risikoteil.

Da die Hilfszahl $T_s = \pi_s - \pi_s^{(N)}$ gemäss Formel (1) $e_s V_{s+1} - V_s$ beträgt, ergibt sich nach Einsetzung für e_s des Wertes aus Formel (13) die Relation

$$\pi_s - \pi_s^{(N)} = v_s \left(1 - \sum_{i=1}^{m} q_s^{(i)}\right) V_{s+1} - V_s .$$

---

[1]) F. P. Cantelli: «Genesi e construzione delle tavole di mutualità», Bollettino di notizie sul credito e sulla previdenza, 1914, Nr. 3/4.

Daraus folgt

$$\pi_s - (v_s V_{s+1} - V_s) = \pi_s^{(N)} - v_s \sum_{i=1}^{m} q_s^{(i)} V_{s+1}$$

als Ausdruck für das Komplement $\pi_s^{(R)}$ der verallgemeinerten Sparprämie $v_s \cdot V_{s+1} - V_s$ zur Prämienzahl π_s, oder auch nach Einsetzen des Wertes von $\pi_s^{(N)}$:

$$\text{(11 R)} \qquad \pi_s^{(R)} = \varrho_s + v_s \sum_{i=1}^{m} q_s^{(i)} \left(U_{s+1}^{(i)} - V_{s+1}\right) .$$

Dies ist also ein Ausdruck für die Risikoprämie, der (wie der für die Sparprämie angegebene) nicht nur bei Einzelversicherungen und einem konstanten Rechnungszinsfuss, sondern auch bei Sammelversicherungen und einem veränderlichen Rechnungszinsfuss gilt.

2. Ersetzen wir in der Formel (11 R) $\pi_s^{(R)}$ durch $\pi_s - (v_s V_{s+1} - V_s)$, so folgt

$$V_{s+1} + \sum_{i=1}^{m} q_s^{(i)} \left(U_{s+1}^{(i)} - V_{s+1}\right) = \frac{1}{v_s} \left(V_s + \pi_s - \varrho_s\right) .$$

Die linke Seite ist aber der Koeffizient von δv_s in Formel (12), die sich daher auch schreiben lässt als

$$\text{(12)} \quad g_s = \delta \pi_s - \delta \varrho_s - v_s' \cdot \sum_{i=1}^{m} \left[\left(U_{s+1}'^{(i)} - V_{s+1}\right) \cdot \delta q_s^{(i)} + q_s^{(i)} \cdot \delta U_{s+1}^{(i)} \right] - \\ - \frac{\delta v_s}{v_s} \left(V_s + \pi_s - \varrho_s\right) .$$

Analog ist

$$\text{(12*)} \quad g_s^* = \delta \pi_s - \delta \varrho_s - v_s' \cdot \sum_{i=1}^{m} \left[\left(U_{s+1}'^{(i)} - V_{s+1}'\right) \cdot \delta q_s^{(i)} + q_s^{(i)} \cdot \delta U_{s+1}^{(i)} \right] - \\ - \frac{\delta v_s}{v_s} \left(V_s' + \pi_s - \varrho_s\right) .$$

Diese Formeln eignen sich vorzüglich zur expliziten Darstellung der Variation einer Einmalprämie, d. i. der Durchschnittsrücklage einer dem Äquivalenzprinzip genügenden Versicherungsgesamtheit mit verschwindenden Prämienzahlen π_s. Dabei ist es bequem, die für die weiteren Betrachtungen sehr wichtigen Ausdrücke

$$h_s = \delta \pi_s - g_s\,, \qquad h_s^* = \delta \pi_s - g_s^*$$

zu verwenden, die sich hier wegen $\delta \pi_s = 0$ entsprechend auf $-g_s$ bzw. $-g_s^*$ reduzieren.

Haben die ursprüngliche und abgeänderte Versicherungsgesamtheit den gleichen Endpunkt $t = n$ und die gleiche Endzahlung T, so liefern die Formeln (5) und (5*) für $t = 0$, $k = n$ und $R_t = V_t$ angesichts $\delta V_n = \delta T = 0$ für die Variation der Einmalprämie die allgemeinen Ausdrücke

$$\delta V_0 = \mathsf{a}'_{0,\overline{n}|}\{h_s\} = \mathsf{a}_{0,\overline{n}|}\{h_s^*\}\,. \tag{14}$$

Dabei sind auf Grund der Formeln ($\overline{12}$) bzw. ($\overline{12}$*) h_s und h_s^* lineare homogene Funktionen der Variationen der «Grundgrössen» v_s, $q_s^{(i)}$, $U_s^{(i)}$, ϱ_s:

$$h_s = \delta \varrho_s + \sum_{i=1}^{m} v_s' \{[U_{s+1}'^{(i)} - V_{s+1}] \cdot \delta q_s^{(i)} + q_s^{(i)} \cdot \delta U_{s+1}^{(i)}\} + \tag{15}$$

$$+ \frac{\delta v_s}{v_s}(V_s + \pi_s - \varrho_s)\,,$$

$$h_s^* = \delta \varrho_s + \sum_{i=1}^{m} v_s' \{[U_{s+1}'^{(i)} - V_{s+1}'] \cdot \delta q_s^{(i)} + q_s^{(i)} \cdot \delta U_{s+1}^{(i)}\} + \tag{15*}$$

$$+ \frac{\delta v_s}{v_s}(V_s' + \pi_s - \varrho_s)\,.$$

Die Behandlung von Spezialfällen der allgemeinen Formel (14) ist nur eine Frage von Substitutionen. Ist $U_{s+1}^{(i)}$ vom Rechnungszinsfuss unabhängig, so ergibt sich beispielsweise für die Abhängigkeit der Einmalprämie vom Rechnungszinsfuss die einfache Formel:

$$\delta V_0 = \sum_{s=0}^{n-1} E_s' \frac{\delta v_s}{v_s}(V_s - \varrho_s) = \sum_{s=0}^{n-1} E_s \frac{\delta v_s}{v_s}(V_s' - \varrho_s)\,. \tag{14'}$$

Da in der Regel $V_s - \varrho_s \geqslant 0$ und voraussetzungsgemäss $E_s' \geqslant 0$ ist, folgt daraus der Satz: Die Einmalprämie einer Versicherungsgesamtheit, deren Entschädigungsbeträge $U_{s+1}^{(i)}$ vom Rechnungszinsfuss unabhängig sind, ist eine nichtwachsende Funktion des Rechnungszinsfusses.

Bei Lebensversicherungen mit Eintrittsalter x und konstantem Rechnungszinsfuss wird $v_s = v$, $E_s = E_{x,\overline{s}|}$ und (14′) geht über in

$$(14'') \qquad \delta V_0 = \frac{\delta v}{v} \sum_{s=0}^{n-1} E'_{x,\overline{s}|} (V_s - \varrho_s) = \frac{\delta v}{v} \sum_{s=0}^{n-1} E_{x,\overline{s}|} (V'_s - \varrho_s) .$$

Beispiele:

$$\text{(a)} \quad \delta \mathsf{a}_{x,\overline{n}|} = \frac{\delta v}{v} \sum_{s=0}^{n-1} E'_{x,\overline{s}|} \cdot a_{x+s,\overline{n-s-1}|} = \frac{\delta v}{v} \sum_{s=0}^{n-1} E_{x,\overline{s}|} \cdot a'_{x+s,\overline{n-s-1}|}$$

$$(\text{da} \quad \varrho_s = 1, \; V_s = \mathsf{a}_{x+s,\overline{n-s}|}) ;$$

$$\text{(b)} \quad \delta A_{x,n|} = \frac{\delta v}{v} \sum_{s=0}^{n-1} E'_{x,\overline{s}|} \cdot A_{x+s,\overline{n-s}|} = \frac{\delta v}{v} \sum_{s=0}^{n-1} E_{x,\overline{s}|} \cdot A'_{x+s,\overline{n-s}|}$$

$$(\text{da} \quad \varrho_s = 0, \; V_s = A_{x+s,\overline{n-s}|}) .$$

3. Als Beispiel einer Anwendung auf Probleme der Versicherungspraxis möge endlich gezeigt werden, dass bei Lebensversicherungen mit Gewinnbeteiligung eine nach Versicherungsbeginn eintretende Änderung der Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung immer durch eine Dividendenvariation ohne Änderung des vollständigen Deckungskapitals kompensiert werden kann.

Bezeichnet nämlich V_s das vollständige Deckungskapital der Lebensversicherung eines x-jährigen, so vereinfacht sich die Formel (12) auf

$$g_s = \delta \pi_s - \delta \varrho_s - v'_s (U_{s+1} - V_{s+1}) \, \delta q_{x+s} - \frac{\delta v_s}{v_s} (V_s + \pi_s - \varrho_s) ,$$

wobei U_{s+1} die bei Ableben im $(s+1)$-ten Versicherungsjahre fällige Versicherungssumme ist; die Zahlen π_s und ϱ_s drücken sich dabei durch die Sätze der bei Beginn des $(s+1)$-ten Versicherungsjahres fälligen Tarifprämie B_s, Inkassokosten β, laufenden Verwaltungskosten γ_s und Dividende Δ_s mittels der Formeln

$$\pi_s = (1 - \beta) \cdot B_s, \; \varrho_s = (1 - \beta) \cdot \Delta_s + \gamma_s$$

aus. Da die Änderung der Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung erst nach Versicherungsbeginn eintritt, ist $g_0 = 0$ und die Rücklagenvariation hat den Fixpunkt 0. Damit sie für $s = 1, 2, \ldots, n$ verschwin-

det, ist es gemäss allgemeinem Invarianzsatz notwendig und hinreichend, dass $g_s = 0$ für $s = 1, 2, \ldots, n-1$ ist. Betrachtet man diese Gleichungen als Bestimmungsgleichungen für die kompensierenden Dividendenvariationen, so liefert deren Auflösung die Formeln

$$\delta \Delta_s = -\frac{1}{1-\beta}\Big\{(B_s - \Delta_s)\,\delta\beta + \delta\gamma_s + v_s'(U_{s+1} - V_{s+1})\,\delta q_{x+s} + \\ + \frac{\delta v_s}{v_s}\left[V_s + (1-\beta)(B_s - \Delta_s) - \gamma_s\right]\Big\}$$

für $s = 1, 2, \ldots, n-1$. Aus $\delta V_n = \delta \Delta_n$ folgt überdies $\delta \Delta_n = 0$.

Dies sind die allgemeinsten Formeln für kompensierende Dividendenvariationen. Bei blosser Zinsfussänderung und $\gamma_s = \gamma$, $v_s = v$ vereinfachen sie sich auf

$$\delta \Delta_s = -\frac{\delta v}{v(1-\beta)}\left[V_s + (1-\beta)(B_s - \Delta_s) - \gamma\right].$$

Lukacs [1]) fand unter letzteren Annahmen, jedoch bei Beschränkung auf gemischte Versicherungen mit gleichbleibenden Prämien, die Formel

$$\delta \Delta_s = -\frac{\lambda - 1}{1-\beta}\left(v + \mathfrak{B} - \mathfrak{B}\, a_{x+s,\overline{n-s}|} + \frac{1-\beta}{D_{x+s}} \sum_{j=s+1}^{n} \Delta_j D_{x+j}\right)$$

mit $\lambda = \frac{v'}{v}$, $\mathfrak{B} = (1-\beta)\cdot B + d + \gamma$, wobei $d = 1 - v$ ist und B die Tarifprämie bezeichnet. Diese Formel erweist sich als ein Spezialfall der unsrigen, ist aber weniger übersichtlich und handlich.

Kapitel III.

Normale Variationen.

§ 1.

Die Variationsformeln für normale Variationen.

Verschwinden die Prämienzahlen π_s nicht identisch, so wird in der Praxis deren Änderungsgesetz durch die Folge der Quotienten

[1]) E. Lukacs: «Über die Veränderung der Dividenden bei Reduktion des Zinsfusses», Comptes rendus du 11e Congrès international d'actuaires, 1937.

$c_s = \frac{\pi_s}{\pi_0}$ $(s = 0, 1, \ldots, n-1)$ gegeben und die «Anfangsprämie» $\pi_0 = \pi$ mittels des Äquivalenzprinzips berechnet. Das Hauptinteresse gilt alsdann dem Einfluss einer Variation des Abzinsungsgesetzes w_t und der Wahrscheinlichkeitsgrössen $q_t^{(i)}$ auf die Anfangsprämie und die Durchschnittsrücklagen.

Solche Variationen haben folgende Eigenschaften:

a) Das Prämienänderungsgesetz c_s $(s = 0, 1, \ldots, n-1)$ und der Endpunkt der Versicherungsgesamtheit, $t = n$, bleiben bei ihnen ungeändert.

b) Anfangs- und Endpunkt sind bei ihnen in der Regel Fixpunkte der Rücklagenvariation. — (Bei einer dem Äquivalenzprinzip genügenden Versicherung ist nämlich zufolge (10) $V_0 = A$ und (falls $L_n \neq 0$) $V_n = T$. In den praktisch wichtigsten Fällen sind aber die Parameter A und T von den Rechnungsgrundlagen unabhängig. Daher ist $\delta V_0 = 0$ und, falls $L_n \neq 0$, $L_n' \neq 0$ ist, auch $\delta V_n = 0$. Ist aber $L_n = 0$ oder $L_n' = 0$, so verfügen wir über die im Singularitätspunkt noch unbestimmte Durchschnittsrücklage so, dass wieder $\delta V_n = 0$ ist.)

Im vorliegenden Kapitel soll nun die wichtige Klasse der durch diese Eigenschaften charakterisierten «normalen» Variationen allgemein studiert werden. Sie umfasst neben den beschriebenen Variationen der Rechnungsgrundlagen auch beliebige Variationen der Zahlen $U_{s+1}^{(i)}$ bei einer dem Äquivalenzprinzip genügenden Versicherung (insbesondere also die erwähnte von Cantelli studierte Variation).

Zunächst soll deren Einfluss auf Anfangsprämie und Durchschnittsrücklagen formelmässig ausgedrückt werden.

Wird in der Formel (5) $R_t = V_t$, $g_s = \delta \pi_s - h_s$, $k = 0$ gesetzt, so ergibt sich bei $\delta V_0 = 0$ und $\delta \pi_s = c_s \cdot \delta \pi$ die Gleichheit

$$E_t' \cdot \delta V_t = \mathsf{a}_{0,\overline{t}|}'\{c_s\} \cdot \delta \pi - \mathsf{a}_{0,\overline{t}|}'\{h_s\} \,. \tag{16 a}$$

Für $t = n$ folgt daraus bei $\delta V_n = 0$.

$$\delta \pi = \frac{\mathsf{a}_{0,\overline{n}|}'\{h_s\}}{\mathsf{a}_{0,\overline{n}|}'\{c_s\}} \,. \tag{16 b}$$

Dies sind bereits die gesuchten Formeln. Durch Vertauschung der ungestrichenen Werte mit den gestrichenen ergeben sich die dualen Formeln:

(16 a*) $$E_t \cdot \delta V_t = \mathsf{a}_{0,\overline{t}|}\{c_s\} \cdot \delta \pi - \mathsf{a}_{0,\overline{t}|}\{h_s^*\} ,$$

(16 b*) $$\delta \pi = \frac{\mathsf{a}_{0,\overline{n}|}\{h_s^*\}}{\mathsf{a}_{0,\overline{n}|}\{c_s\}} .$$

Einige unmittelbare Anwendungen seien angegeben:

a) Die Anfangsprämie einer Versicherung, deren Entschädigungsbeträge $U_{s+1}^{(i)}$ vom Rechnungszinsfuss unabhängig sind, ist eine nichtwachsende Funktion des Rechnungszinsfusses, falls in jedem Zeitpunkt die Durchschnittsrücklage, vermehrt um die Prämie und vermindert um die Rentenzahlung, nichtnegativ ist.

Einer blossen Zinsfusserhöhung entspricht nämlich unter diesen Voraussetzungen der wegen $\delta v_s \leqslant 0$ nichtpositive Ausdruck $h_s = \frac{\delta v_s}{v_s}(V_s + \pi_s - \varrho_s)$, woraus sich angesichts der Formel (16 *b*) die Behauptung ergibt.

Insbesondere ist die Prämie einer Todesfallversicherung mit Eintrittsalter x eine nichtwachsende Funktion des Rechnungszinsfusses, wenn $\mathsf{a}_y \leqslant \frac{1}{p_{y-1}} \mathsf{a}_x$ für $y > x$ ist. Dann ist nämlich

$$V_s + \pi = \frac{v\, p_{x+s}}{\mathsf{a}_x} \cdot \left(\frac{\mathsf{a}_x}{p_{x+s}} - \mathsf{a}_{x+s+1} \right) \geqslant 0.$$

b) Bei einer dem Äquivalenzprinzip genügenden Versicherung mit $A = 0$, $\varrho_s = 0$, $U_{s+1}^{(i)} = A_{s+1}^{(i)} \cdot V_{s+1}$ lässt die Cantellische Variation $U_{s+1}^{\prime(i)} = 0$, $q_s^{\prime(i)} = (1 - A_{s+1}^{(i)})\, q_s^{(i)}$, $(i = 1, \ldots, m;\ s = 0, 1, \ldots, n-1)$ nicht nur die Durchschnittsrücklagen, sondern auch die Anfangsprämie ungeändert.

Für diese normale Variation verschwinden nämlich laut Formel(15) sämtliche Zahlen h_s, daher ist laut (16 *b*) $\delta \pi = 0$ (während aus (16 *a*) wieder $\delta V_t = 0$ folgt).

§ 2.

Das Invarianzproblem bei normalen Variationen.

1. Wir wollen nun zeigen, dass das in Kapitel I allgemein gelöste Invarianzproblem bei einer normalen Variation mit dem Lösbarkeitsproblem eines Systems linearer Gleichungen gleichbedeutend ist.

Es möge bei einer normalen Variation die Durchschnittsrücklage für $0 \leqslant t \leqslant r\,(0 < r \leqslant n)$ ungeändert bleiben, oder, wie wir sagen wollen, diese Variation in den ersten r Versicherungsjahren «rücklagentreu» sein. Da dabei $t = n$ Fixpunkt der Rücklagenvariation ist, gelten laut allgemeinem Invarianzsatz die Gleichungen (7) und (8) mit $k = n$, $t_1 = 0$, $t_2 = r$. Sie lassen sich nach Einsetzen von $g_s = c_s\,\delta\,\pi - h_s$, $z = \delta\,\pi$ auch schreiben als

$$(7') \qquad \mathsf{a}'_{r,\overline{n-r}|}\{h_s\} = z \cdot \mathsf{a}'_{r,\overline{n-r}|}\{c_s\}\,,$$

$$(8') \qquad h_s = z \cdot c_s \qquad \text{für } s = 0,\,1,\,\ldots,\,r-1.$$

Das System der linearen Gleichungen (7′), (8′) ist daher lösbar, und zwar kann $z = \delta\,\pi$ gesetzt werden. — Wir beweisen nun folgenden

Satz 6 (speziellen Invarianzsatz): Damit eine normale Variation in den ersten r Versicherungsjahren $(0 < r \leqslant n)$ rücklagentreu ist, ist es notwendig und hinreichend, dass das System der linearen Gleichungen (7′), (8′) in z lösbar ist. Bei dessen Lösbarkeit ist $z = \delta\,\pi$.

Beweis: Ist diese Bedingung, deren Notwendigkeit oben bewiesen wurde, erfüllt, so folgt aus den Gleichungen (8′):

$$(8'') \qquad \mathsf{a}'_{0,\overline{r}|}\{h_s\} = z \cdot \mathsf{a}'_{0,\overline{r}|}\{c_s\}\,.$$

Addieren wir hierzu die Gleichheit (7′), so ergibt sich

$$\mathsf{a}'_{0,\overline{n}|}\{h_s\} = z \cdot \mathsf{a}'_{0,\overline{n}|}\{c_s\}$$

und da laut Formel (16 *b*)

$$\delta\,\pi = \frac{\mathsf{a}'_{0,\overline{n}|}\{h_s\}}{\mathsf{a}'_{0,\overline{n}|}\{c_s\}}$$

ist, folgt $z = \delta\,\pi$. Daher lässt sich die rechte Seite von (8″) auch schreiben als $\mathsf{a}'_{0,\overline{r}|}\{\delta\,\pi_s\}$ und (8″) geht über in $\mathsf{a}'_{0,\overline{r}|}\{g_s\} = 0$. Aus $g_s = \delta\,\pi_s - h_s = z\,c_s - h_s$ folgt überdies angesichts (8′) $g_s = 0$ für $s = 0,\,1,\,\ldots,\,r-1$. Somit sind die Gleichungen (7) und (8) für $k = 0$, $t_1 = 0$, $t_2 = r$ erfüllt, und da $k = 0$ Fixpunkt der normalen Variation ist, verschwindet laut allgemeinem Invarianzsatz die Rücklagenvariation für $0 \leqslant t \leqslant r$, w. z. b. w.

2. Betrachten wir insbesondere eine blosse Variation der Grössen $q_s^{(i)}$ für ein festes $i = \mathrm{j}$, wobei alle übrigen Grundgrössen ungeändert

bleiben sollen. Dieser normalen Variation entspricht laut Formel (15) der Ausdruck

$$(15') \qquad h_s = v_s \left(U_{s+1}^{(j)} - V_{s+1}\right) \cdot \delta\, q_s^{(j)} .$$

Deshalb ist in Versicherungsjahren mit verschwindendem «j-ten Risikokapital» $U_{s+1}^{(j)} - V_{s+1}$ der Wert der Zahlen $q_s^{(j)}$ für die Höhe der Durchschnittsrücklagen belanglos. Bei Änderung der Zahlen $q_s^{(j)}$ ausschliesslich solcher Versicherungsjahre verschwinden nämlich gemäss Formel (15′) alle Zahlen h_s, folglich sind die Gleichungen (7′), (8′) für $z = 0$ und $r = n$ erfüllt, so dass die Durchschnittsrücklagen laut speziellem Invarianzsatz ungeändert bleiben (ebenso wie die Prämien wegen $z = \delta\, \pi$).

Werden insbesondere als $q_s^{(j)}$ die Stornowahrscheinlichkeiten angenommen, so folgt der Satz:

Bei Abgangsentschädigungen in Höhe der Durchschnittsrücklage sind die Prämien und Durchschnittsrücklagen vom Storno unabhängig.

Dieser für Einzelversicherungen bekannte Satz gilt demnach auch für Sammelversicherungen. Dabei ist aber die Voraussetzung zu beachten, dass die Zahlen $q_s^{(i)}$ für $i \neq j$ durch den Storno ungeändert bleiben müssen.

Wenden wir uns nunmehr «untrivialen» Änderungen der Zahlen $q_s^{(j)}$ in den ersten r Versicherungsjahren zu, d. i. solchen, für die ein Index $\sigma < r$ mit $U_{\sigma+1}^{(j)} - V_{\sigma+1} \neq 0$ und $\delta\, q_\sigma^{(j)} \neq 0$ existiert, was laut Gleichung (15′) mit $h_\sigma \neq 0$ gleichbedeutend ist.

Ist diese Änderung in den ersten r Versicherungsjahren rücklagentreu, so ist laut speziellem Invarianzsatz $h_\sigma = c_\sigma \cdot \delta\, \pi$, also $\delta\, \pi \neq 0$, d. h. die entsprechende Variation der Anfangsprämie verschwindet nicht.

Überdies ist dann für $s = 0, 1, \ldots, r - 1$

$$h_s = v_s \left(U_{s+1}^{(j)} - V_{s+1}\right) \delta\, q_s^{(j)} = z \cdot c_s ,$$

daher folgt aus $c_s \neq 0$ auch $U_{s+1}^{(j)} - V_{s+1} \neq 0$, d. h. das j-te Risikokapital verschwindet am Ende keines prämienpflichtigen der ersten r Versicherungsjahre.

Die hiemit für die Rücklagentreue gefundenen notwendigen Bedingungen erweisen sich im Spezialfalle $r = n$ auch als hinreichend, d. i. es gilt folgender

Satz 7: Bei einer Einzel- oder Sammelversicherung mit positiver Anfangsprämie mögen für ein j ($j = 1, \ldots, m$) die Zahlen $q_s^{(j)}$ ohne Änderung der übrigen Grundgrössen variiert werden. Damit diese Variation in den ersten r Versicherungsjahren untrivial und rücklagentreu ist, ist es notwendig, dass das j-te Risikokapital am Ende keines prämienpflichtigen derselben verschwindet.

Ist diese Bedingung für $r = n$ erfüllt, so existiert eine unendliche Schar der bezeichneten Variationen, und zwar genügt es, in prämienpflichtigen Versicherungsjahren

$$q_s'^{(j)} = q_s^{(j)} + \frac{k}{v_s} \frac{c_s}{U_{s+1}^{(j)} - V_{s+1}} \tag{17}$$

zu setzen (wobei $k \neq 0$ eine beliebige so kleine Konstante ist, dass $q_s'^{(j)}$ für $s = 0, 1, \ldots, n-1$ dasselbe Vorzeichen wie $q_s^{(j)}$ hat und $q_s'^{(j)} \leqslant 1 - \sum_{i \neq j} q_s^{(i)}$ ist [1])), ansonsten aber $q_s^{(j)}$ ungeändert zu lassen.

Jeder untrivialen und rücklagentreuen Änderung der Zahlen $q_s^{(j)}$ in den ersten r Versicherungsjahren ($0 < r \leqslant n$) entspricht eine nichtverschwindende Variation der Anfangsprämie.

Beweis: Es ist nur noch zu beweisen, dass die durch Formel (17) definierte Variation — untrivial und in der ganzen Versicherungsdauer rücklagentreu ist. — Sie ist untrivial, nachdem die Anfangsprämie positiv ist, also $U_1^{(j)} - V_1 \neq 0$ postuliert wird und aus (17) $q_0'^{(j)} - q_0^{(j)} \neq 0$ folgt. — Sie ist in der ganzen Versicherungsdauer rücklagentreu laut speziellem Invarianzsatz. Einerseits verschwinden nämlich für $r = n$ beide Seiten der Gleichung (7′). Anderseits liefert die Einsetzung der $q_s'^{(j)}$ aus (17) in (15′) für die Indizes s der prämienpflichtigen Versicherungsjahre die Relation $h_s = k\, c_s$, d. i. die Gleichungen (8′) mit $z = k$. Diese Gleichungen sind aber auch für die Indizes der prämienfreien Jahre mit $z = k$ erfüllt, da dann $h_s = 0$ und $c_s = 0$ ist.

Bei gemischten und terme-fixe-Versicherungen mit nichtwachsender Prämie verschwindet in der Regel das Risikokapital nur im letzten Versicherungsjahre. Eine in der ganzen Versicherungsdauer rücklagentreue Änderung der Sterbetafel

[1]) Diese Bedingungen sollen sichern, dass die Zahlen $q_s'^{(j)}$ den Charakter analoger Wahrscheinlichkeitszahlen haben wie die Zahlen $q_s^{(j)}$. Dabei bezeichnet $\sum_{i \neq j}$ die Summation über alle von j verschiedenen Indizes i. Von rein formellem Standpunkt sind diese Bedingungen überflüssig.

ist hier also bei Prämienzahlung bis Versicherungsablauf nur als «triviale» Änderung der Sterbenswahrscheinlichkeit des letzten Versicherungsjahres, hingegen bei abgekürzter Prämienzahlung gemäss Formel (17) durchführbar.

In Widerspruch zum Satz 7 scheint ein Satz von Prof. Dumas [1]) zu stehen, wonach eine rücklagentreue Änderung der Sterbenswahrscheinlichkeiten bei einer lebenslänglichen Todesfallversicherung mit gleichbleibenden lebenslänglich zahlbaren Prämien unmöglich ist. Dumas verlangt aber stillschweigend, dass die abgeänderte Sterbetafel das Endalter der ursprünglichen aufweist. Allgemein gilt folgender *Zusatz zum Satz 7:*

Ist der Endpunkt einer Versicherungsgesamtheit Singularitätspunkt, so existiert dann und nur dann eine untriviale und in der ganzen Versicherungsdauer rücklagentreue Änderung der Zahlen $q_s^{(j)}$, bei der er Singularitätspunkt bleibt, wenn nicht nur die Bedingungen des Satzes 7 erfüllt sind, sondern auch das letzte Versicherungsjahr prämienfrei ist.

Beweis: Der Endpunkt einer Versicherungsgesamtheit ist Singularitätspunkt, falls $\sum_{i=1}^{m} q_{n-1}^{(i)} = 1$ ist. Da die Zahlen $q_{n-1}^{(i)}$ für $i \neq j$ ungeändert bleiben, läuft die Zusatzbedingung auf die Invarianz von $q_{n-1}^{(j)}$ hinaus. Diese besteht gemäss (17) für $c_{n-1} = 0$. Umgekehrt folgt aus $q_{n-1}^{\prime(j)} = q_{n-1}^{(j)}$ laut (15′) $h_{n-1} = 0$ und aus der Rücklagentreue laut speziellem Invarianzsatz $c_{n-1}\, \delta\, \pi = h_{n-1} = 0$. Da laut Satz 7 $\delta\, \pi \neq 0$ ist, muss $c_{n-1} = 0$ sein, w. z. b. w.

3. Sind bei blosser Änderung der Zahlen $q_s^{(j)}$ nicht alle Punkte $t = 0, 1, \ldots, n$ Fixpunkte der entsprechenden Rücklagenvariation, so sind es auch nicht alle Punkte $t = 0, 1, \ldots, n - 1$, nachdem sicher $t = n$ ein Fixpunkt ist. Ist also eine rücklagentreue Änderung der Zahlen $q_s^{(j)}$ in der ganzen Versicherungsdauer unmöglich, so ist sie auch in den ersten $n - 1$ Versicherungsjahren unmöglich. Hingegen besagt

Satz 8: Ist unter den Voraussetzungen des Satzes 7 eine in der ganzen Versicherungsdauer rücklagentreue und untriviale Variation der Zahlen $q_s^{(j)}$ unmöglich, so ist sie in den ersten $n - 2$ Versicherungsjahren dann und nur dann möglich, wenn ausser der hierfür laut Satz 7 notwendigen Bedingung das j-te Risikokapital am Ende des letzten oder vorletzten Versicherungsjahres nicht verschwindet. — Soll überdies ein Singularitätspunkt es auch bleiben, so verschärft sich letztere Bedingung dahin, dass das j-te Risikokapital am Ende des vorletzten Versicherungsjahres nicht verschwindet.

Beweis: Ist die bezeichnete Variation der Zahlen $q_s^{(j)}$ in den ersten $n - 2$ Versicherungsjahren möglich, so verschwindet laut Satz 7

[1]) S. Dumas: «Sur les tables de mortalité, qui conduisent aux mêmes réserves mathématiques», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1928.

das j-te Risikokapital am Ende keines prämienpflichtigen dieser Versicherungsjahre. Wären dazu beide letzten Versicherungsjahre prämienfrei, so würde das j-te Risikokapital überhaupt am Ende keines prämienpflichtigen Versicherungsjahres verschwinden und die Variation laut Satz 7 in der ganzen Versicherungsdauer möglich sein. Da dies ausgeschlossen wurde, ist $\mathsf{a}'_{n-2,\overline{2}|}\{c_s\} \neq 0$. Da überdies laut speziellem Invarianzsatz $\mathsf{a}'_{n-2,\overline{2}|}\{h_s\} = \mathsf{a}'_{n-2,\overline{2}|}\{c_s\} \cdot \delta\,\pi$ und laut Satz 7 $\delta\,\pi \neq 0$ ist, muss $\mathsf{a}'_{n-2,\overline{2}}\{h_s\} \neq 0$ also $h_{n-2}^2 + h_{n-1}^2 > 0$ sein. Hierfür ist aber angesichts (15′) entweder $U_{n-1}^{(j)} - V_{n-1} \neq 0$ oder $U_{n-2}^{(j)} - V_{n-2} \neq 0$ erforderlich.

Sind umgekehrt die Bedingungen des Satzes 8 erfüllt, so ändere man die Zahlen $q_s^{(j)}$ für $s < n-2$ gemäss Formel (17) und setze, falls $U_{n-1}^{(j)} - V_{n-1} \neq 0$ ist,

$$(18_1)\quad \begin{cases} q'^{(j)}_{n-2} = q^{(j)}_{n-2}\dfrac{U^{(j)}_{n-1} - V_{n-1}}{U^{(j)}_{n-1} - V_{n-1} + k\,c_{n-1}} + \dfrac{c_{n-2} + v_{n-2}\,c_{n-1}\left(1 - \sum\limits_{i \neq j} q^{(i)}_{n-2}\right)}{U^{(j)}_{n-1} - V_{n-1} + k\,c_{n-1}}, \\ q'^{(j)}_{n-1} = q^{(j)}_{n-1}, \end{cases}$$

falls $U_{n-1}^{(j)} - V_{n-1} = 0$ ist,

$$(18_2)\quad q'^{(j)}_{n-1} = q^{(j)}_{n-1} + \frac{\mathrm{k}}{v_{n-1}\left(U_n^{(j)} - V_n\right)} \cdot \left[\frac{c_{n-2}}{v_{n-2}\left(1 - q^{(j)}_{n-2}\right)} + c_{n-1}\right].$$

Wie beim Beweise des Satzes 7 sieht man dann, dass die angegebene Änderung der Zahlen $q_s^{(j)}$ untrivial ist und die Gleichungen (8′) für $s = 0, 1, \ldots, n-3$ und $z = k$ erfüllt sind. Überdies bestätigt eine einfache Rechnung, dass die Gleichung (7′) mit $z = k$, $r = n-2$ erfüllt ist. Laut speziellem Invarianzsatz ist daher $\delta\,V_t = 0$ für $t = 0, 1, \ldots, n-2$.

Es bleibt noch die Zusatzforderung zu erörtern, die die Änderung der Zahlen $q_{n-1}^{(j)}$ ausschliesst, falls der Endpunkt Singularitätspunkt ist.

Ist $U_{n-1}^{(j)} - V_{n-1} \neq 0$, so ist laut Formel (18_1) $q'^{(j)}_{n-1} = q^{(j)}_{n-1}$. Ist umgekehrt $q'^{(j)}_{n-1} = q^{(j)}_{n-1}$, so folgt aus (15′) $h_{n-1} = 0$, und da oben die Notwendigkeit von $h_{n-2}^2 + h_{n-1}^2 > 0$ bewiesen wurde, muss dann $h_{n-2} \neq 0$, also auch $U_{n-1}^{(j)} - V_{n-1} \neq 0$ sein.

Satz 8 bildet die Verallgemeinerung eines von Prof. Dumas in der zitierten Abhandlung bewiesenen Satzes, wonach bei einer lebenslänglichen Todesfallversicherung mit gleichbleibenden lebenslänglich zahlbaren Prämien die Sterbe-

tafel unter Beibehaltung des Endalters so geändert werden kann, dass alle Deckungsrücklagen mit Ausnahme der letzten ungeändert bleiben. — Bei dieser Versicherung verschwindet nämlich in der Regel das Risikokapital überhaupt nicht. — Dasselbe trifft natürlich auch bei fallenden Prämien zu, so dass auch hier der Dumassche Satz gilt.

Ebenso wird ersichtlich, dass bei gemischten und terme-fixe-Versicherungen eine untriviale Änderung der Sterbetafel möglich ist, bei der alle Deckungsrücklagen ausser derjenigen am Ende des vorletzten Versicherungsjahres ungeändert bleiben.

§ 3.

Vorzeichensätze für normale Variationen.

1. Bei Anwendung der Vorzeichensätze des Kapitels I auf normale Variationen machen wir davon Gebrauch, dass Anfangs- und Endpunkt der Versicherungsgesamtheit Fixpunkte der Rücklagenvariation sind. Mit Leichtigkeit ergibt sich

Satz 9 (spezieller Zeichenwechselsatz): Bleiben bei einer normalen Variation die Grundgrössen (d. i. v_s, $q_s^{(i)}$, $U_{s+1}^{(i)}$, ϱ_s) in den nicht prämienfreien Zeitintervallen $0 \leqslant s < \Theta < n$, $0 < T \leqslant s \leqslant n$ ungeändert, so sind die Vorzeichen von δV_Θ und δV_T verschieden, falls die Anfangsprämie eine Änderung erfährt [1]).

Beweis: Laut allgemeinem Zeichenwechselsatz genügt es zu beweisen, dass die Änderungszahlen g_s in keinem der angegebenen Intervalle identisch verschwinden und für die Indizes s aus diesen Intervallen keinen Zeichenwechsel aufweisen. — Nun ist $g_s = c_s \, \delta \pi - h_s$, wobei h_s eine homogene lineare Funktion der Variationen der Grundgrössen ist. Für $0 \leqslant s < \Theta$ und $T \leqslant s < n$ verschwindet daher h_s zusammen mit diesen Variationen und es ist $g_s = c_s \cdot \delta \pi$, was wegen $c_s \geqslant 0$ das Vorzeichen nicht wechselt und für $\delta \pi \neq 0$ in keinem dieser Intervalle identisch verschwindet, nachdem voraussetzungsgemäss die Zahlen c_s dort nicht identisch verschwinden.

Einen Spezialfall dieses Satzes bildet der Mosersche Zeichenwechselsatz [2]).

---

[1]) Vgl. A. Berger: «Über den Einfluss einer Änderung der Rechnungsgrundlagen auf die Prämienreserven», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1936, wo dieser Sachverhalt für Lebensversicherungen umschrieben wird.

[2]) Chr. Moser: «Der Zeichenwechselsatz», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1914.

2. Gewisse Ergebnisse von Haldy[1]) erweisen sich als Spezialfälle des

Satzes 10: Sind bei einer normalen Variation die Zahlen h_s nichtnegativ, ohne identisch zu verschwinden, so fällt die Durchschnittsrücklage V_t, $(0 < t < n)$, wenn die Zahlen h_s im nicht prämienfreien Intervall $t \leqslant s < n$ verschwinden, sie steigt, wenn sie im Intervall $0 \leqslant s < t$ verschwinden.

Beweis: Aus der Formel (16 *b*) folgt dann $\delta \pi > 0$. Im ersten Falle reduziert sich dabei $g_s = c_s \, \delta \pi - h_s$ für $t \leqslant s < n$ auf $c_s \, \delta \pi \geqslant 0$, und für einen dieser Indizes, σ, ist $c_\sigma > 0$, also auch $g_\sigma > 0$. Nachdem der rechte Endpunkt des Intervalls (t, n) Fixpunkt von δV_s ist, hat δV_t gemäss Satz 2 das entgegengesetzte Vorzeichen wie g_σ, also ist $\delta V_t < 0$. — Analog erledigt sich der zweite Fall, wobei $c_0 = 1$ zu berücksichtigen ist.

3. Bedeutend wichtiger für die Anwendungen ist der

Satz 11 (spezieller Zeichenbewahrungssatz): Bilden für eine normale Variation einer Versicherungsgesamtheit mit positiven Prämienzahlen die Quotienten $\frac{h_s}{c_s}$ $(s = 0, 1, \ldots, n-1)$ eine monotone Folge, ohne konstant zu sein, so ist die entsprechende Rücklagenvariation innerhalb der Versicherungsdauer überall positiv oder überall negativ, je nachdem diese Folge nichtfallend oder nichtwachsend ist.

Beweis: Laut Formel (16 *b*) ist

$$\delta \pi = \frac{\sum_{s=0}^{n-1} E'_s h_s}{\sum_{s=0}^{n-1} E'_s c_s} = \frac{\sum_{s=0}^{n-1} E'_s c_s \frac{h_s}{c_s}}{\sum_{s=0}^{n-1} E'_s c_s}$$

ein mit positiven Gewichten gewogenes Mittel der Zahlen $\frac{h_s}{c_s}$. Ist deren Folge nichtfallend, so muss, da sie nicht konstant sind,

---

[1]) M. Haldy: «Influence des variations de l'invalidité sur les réserves mathématiques», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1930—1932.

$$\frac{h_0}{c_0} < \delta\pi < \frac{h_{n-1}}{c_{n-1}} \quad \text{also} \quad g_0 = c_0\left(\delta\pi - \frac{h_0}{c_0}\right) > 0$$

und
$$g_{n-1} = c_{n-1}\left(\delta\pi - \frac{h_{n-1}}{c_{n-1}}\right) < 0$$

sein, und die Zahlen $g_s = c_s\left(\delta\pi - \frac{h_s}{c_s}\right)$ wechseln genau einmal ihr Vorzeichen. Daher sind die Voraussetzungen des allgemeinen Zeichenbewahrungssatzes mit $k_1 = 0$, $k_2 = n$, $s_1 = 0$, $s_2 = n - 1$ erfüllt und für $0 < t \leqslant n - 1$ hat δV_t das Vorzeichen von g_0, also es ist $\delta V_t > 0$. — Analog verläuft der Beweis, falls die Folge $\left\{\frac{h_s}{c_s}\right\}$ nichtwachsend ist.

Der Satz 11 bildet eine Ergänzung des speziellen Invarianzsatzes, der den Fall $\frac{h_s}{c_s} =$ constans umfasst. Wie dieser, könnte er auf den Fall erstreckt werden, dass bei $c_s = 0$ auch $h_s = 0$ ist, worauf wir jedoch der Kürze halber verzichten.

Einige Anwendungen seien angegeben:

a) Verschwinden bei einer Versicherungsgesamtheit mit positiven Prämienzahlen die j-ten Risikokapitalien für ein festes j ($j = 1, \ldots, m$) nicht und werden die Wahrscheinlichkeitsgrössen $q_s^{(j)}$ durch

$$q_s'^{(j)} = q_s^{(j)} + \frac{k_s}{v_s} \frac{c_s}{U_{s+1}^{(j)} - V_{s+1}}$$

ersetzt, ohne dass die übrigen Grundgrössen geändert werden, so fallen die Durchschnittsrücklagen V_t der Versicherungsgesamtheit für $0 < t < n$, falls die Zahlenfolge $\{k_s\}$ nichtwachsend und nichtkonstant ist, sie bleiben ungeändert für konstantes k_s, sie wachsen, falls die Zahlenfolge $\{k_s\}$ nichtfallend und nichtkonstant ist.

Für konstantes k_s folgt dies nämlich aus dem Satz 7, andernfalls aus dem speziellen Zeichenbewahrungssatz, nachdem hier die Formel

(15′) $\frac{h_s}{c_s} = k_s$ liefert.

Dieser Satz ist allgemeiner als ein analoger von Vasmoen [1]) für den Spezialfall der Variation der Sterbensintensität bei gemischten

[1]) Per Vasmoen: «Über den Einfluss einer Änderung der Sterblichkeit auf die Prämienreserve», Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1935, Heft 1—2.

Lebensversicherungen mit gleichbleibenden Prämien mittels der kontinuierlichen Methode gefundener. — (Damit darin die Zahlen $q_s'^{(j)}$ den Charakter analoger Wahrscheinlichkeitsgrössen wie die Zahlen $q_s^{(j)}$ haben, müssen sie denselben Einschränkungen wie in Satz 7 unterworfen werden.)

b) Für Einzel- und Sammelversicherungen mit gleichbleibenden Prämien π und Renten ϱ, sowie konstantem Rechnungszinsfuss ergibt sich folgender Satz:

Ist die Durchschnittsrücklage eine nichtfallende Funktion der Zeit, ohne konstant zu sein, so ist sie innerhalb der Versicherungsdauer eine fallende Funktion des Rechnungszinsfusses.

Beweis: Es kann hier $c_s = 1$ gesetzt werden und die einer Erhöhung des Rechnungszinsfusses entsprechenden Zahlen

$$\frac{h_s}{c_s} = h_s = \frac{\delta v}{v} (V_s + \pi - \varrho)$$

bilden angesichts $\delta v < 0$ und der Voraussetzungen über V_s eine nichtwachsende und nichtkonstante Folge.

c) In der Lebensversicherung ist für verschiedene Anomalien eine additive Sterblichkeitserhöhung charakteristisch. Über deren Wirkung auf die Deckungskapitalien erhalten wir folgenden Satz:

Ist für eine Lebensversicherung mit gleichbleibenden bis Versicherungsablauf zahlbaren Prämien und konstantem Rechnungszinsfuss das Risikokapital eine nichtnegative und nichtwachsende Funktion der Zeit, ohne konstant zu sein, so ermässigt eine additive Sterblichkeitserhöhung deren Deckungskapitalien innerhalb der Versicherungsdauer.

Beweis: Bei additiver Sterblichkeitserhöhung $\delta q_x = \beta > 0$ ist $h_s = v \beta (U_{s+1} - V_{s+1})$ und aus den formulierten Voraussetzungen folgt $h_{s+1} \leqslant h_s$, $c_s = 1$, also $\frac{h_{s+1}}{c_{s+1}} \leqslant \frac{h_s}{c_s}$ und die Zahlen $\frac{h_s}{c_s} = h_s$ können nicht konstant sein, nachdem das Risikokapital nicht konstant ist.

d) Als wohl interessanteste Anwendung geben wir den kurzen Beweis eines schönen, von Schaertlin [1]) für gemischte Lebensversiche-

[1]) G. Schaertlin: «Über die Reservenrechnung mit Bruttoprämien», Ehrenzweigs Assekuranz-Jahrbuch, 1890.

rungen gefundenen Satzes an, den wir gleichzeitig auf «verallgemeinerte gemischte Versicherungen», d. i. Versicherungen mit $V_0 = 0$, $U_{s+1}^{(i)} = T = 1$, $(i = 1, \ldots, m)$, gleichbleibenden Prämienzahlen und konstantem Rechnungszinsfuss erstrecken. Wir formulieren ihn folgendermassen:

Bleiben bei Erhöhung der Wahrscheinlichkeitszahlen $q_s^{(j)}$ (für ein festes $j = 1, 2, \ldots, m$) die Durchschnittsrücklagen einer verallgemeinerten gemischten Versicherung mit Dauer n für $s = 0, 1, \ldots, r$ $(r < n)$ ungeändert, so fallen dabei die Durchschnittsrücklagen einer zweiten ebensolchen Versicherung — mit denselben Austritts- und Eintrittswahrscheinlichkeiten sowie der Dauer r — für $t = 1, 2, \ldots, r - 1$.

Beweis: Es ist leicht zu zeigen, dass für die Durchschnittsrücklage V_t einer verallgemeinerten gemischten Versicherung die Relation

$$1 - V_t = \frac{1}{E_t} \frac{\mathsf{a}_{t,\overline{n-t}|}\{1\}}{\mathsf{a}_{0,\overline{n}|}\{1\}}$$

gilt [1]).

Bezeichnen wir die Versicherungswerte der ersten und zweiten Versicherung entsprechend mit I und II, so folgen daher aus (15′) die Formeln

$$h_s^I = \frac{v}{E_{s+1}} \frac{\mathsf{a}_{s+1,\overline{n-s-1}|}\{1\}}{\mathsf{a}_{0,\overline{n}|}\{1\}} \cdot \delta q_s^{(j)}, \qquad h_s^{II} = \frac{v}{E_{s+1}} \frac{\mathsf{a}_{s+1,\overline{r-s-1}|}\{1\}}{\mathsf{a}_{0,\overline{r}|}\{1\}} \cdot \delta q_s^{(j)}.$$

Für $s = 0, 1, \ldots, r - 1$ ist dabei laut speziellem Invarianzsatz $h_s^I = \delta \pi^I$, also

$$\frac{h_s^{II}}{\delta \pi^I} = \frac{h_s^{II}}{h_s^I} = \frac{\mathsf{a}_{s+1,\overline{r-s-1}|}\{1\}}{\mathsf{a}_{s+1,\overline{n-s-1}|}\{1\}} \frac{\mathsf{a}_{0,\overline{n}|}\{1\}}{\mathsf{a}_{0,\overline{r}|}\{1\}}$$

und

$$h_s^{II} = K \frac{\mathsf{a}_{s+1,\overline{r-s-1}|}\{1\}}{\mathsf{a}_{s+1,\overline{n-s-1}|}\{1\}},$$

---

[1]) Diese Verallgemeinerung der für gemischte Lebensversicherungen bekannten Relation

$$1 - {}_tV_{x,\overline{n}|} = \frac{\mathsf{a}_{x+t,\overline{n-t}|}}{\mathsf{a}_{x,\overline{n}|}}$$

ergibt sich aus der Formel (2) unter Beachtung von (11 N) und (13).

wobei $K = \delta \pi^I \dfrac{\mathsf{a}_{0,\overline{n}|}\{1\}}{\mathsf{a}_{0,\overline{r}|}\{1\}}$ eine positive Konstante ist. Nun ist

$$\frac{\mathsf{a}_{s,\overline{r-s}|}\{1\}}{\mathsf{a}_{s,\overline{n-s}|}\{1\}} = \frac{E_s + \mathsf{a}_{s+1,\overline{r-s-1}|}\{1\}}{E_s + \mathsf{a}_{s+1,\overline{n-s-1}|}\{1\}} =$$

$$= \frac{\mathsf{a}_{s+1,\overline{r-s-1}|}\{1\}}{\mathsf{a}_{s+1,\overline{n-s-1}|}\{1\}} \frac{\dfrac{E_s}{\mathsf{a}_{s+1,\overline{r-s-1}|}\{1\}} + 1}{\dfrac{E_s}{\mathsf{a}_{s+1,\overline{r-s-1}|}\{1\} + \mathsf{a}_{r,\overline{n-r}|}\{1\}} + 1} > \frac{\mathsf{a}_{s+1,\overline{r-s-1}|}\{1\}}{\mathsf{a}_{s+1,\overline{n-s-1}|}\{1\}},$$

daher fallen die Zahlen $h_s^{II} = \dfrac{h_s^{II}}{c_s^{II}}$ mit s, woraus gemäss speziellem Zeichenbewahrungssatz $\delta V_t^{II} < 0$ für $t = 1, 2, \ldots, r-1$ folgt.

Noch weiter als der spezielle Zeichenbewahrungssatz reicht

Satz 12: Wechseln für eine normale Variation einer Versicherungsgesamtheit mit positiven Prämienzahlen die Differenzen $\Delta \dfrac{h_s}{c_s} (s = 0, 1, \ldots, n-2)$ höchstens einmal das Vorzeichen, so wechselt die entsprechende Rücklagenvariation δV_s für $0 < s < n$ das Vorzeichen nicht, falls $\delta \pi$ zwischen $\dfrac{h_0}{c_0}$ und $\dfrac{h_{n-1}}{c_{n-1}}$ liegt; anderenfalls wechselt sie es genau einmal, wobei sie vor dem Zeichenwechsel das Vorzeichen von $\delta \pi - \dfrac{h_0}{c_0}$ hat.

Beweis: Es sei z. B.

$$\Delta \frac{h_s}{c_s} \leqslant 0 \text{ für } 0 \leqslant s \leqslant \sigma, \quad \Delta \frac{h_s}{c_s} \geqslant 0 \text{ für } \sigma < s \leqslant n-2.$$

Bezeichnen k und l die so angeordneten Indizes $0, n-1$, dass $\dfrac{h_k}{c_k} \leqslant \dfrac{h_l}{c_l}$ ist, so ist für $\dfrac{h_k}{c_k} \leqslant \delta \pi \leqslant \dfrac{h_l}{c_l}$ im Intervall I_1 mit den Endpunkten k, σ

$$\frac{h_k}{c_k} \geqslant \frac{h_s}{c_s}, \text{ sowie } g_s = c_s \left(\delta \pi - \frac{h_s}{c_s} \right) \geqslant c_s \left(\frac{h_k}{c_k} - \frac{h_s}{c_s} \right),$$

also $g_s \geqslant 0$; im Intervall I_2 mit den Endpunkten σ, l kann aber $g_s = c_s\left(\delta\pi - \frac{h_s}{c_s}\right)$ höchstens einmal das Vorzeichen wechseln, nachdem dort die Zahlen $\frac{h_s}{c_s}$ monoton sind. Da beide Intervalle den Punkt σ enthalten, wechseln in diesem Falle die Zahlen g_s für $0 \leqslant s < n$ höchstens einmal das Vorzeichen, und laut allgemeinem Zeichenbewahrungssatz wechselt δV_s für $0 < s < n$ das Vorzeichen nicht.

Andernfalls genügt aber $\delta\pi$, als mit positiven Gewichten gewogenes Mittel der Zahlen $\frac{h_s}{c_s}$, der Ungleichung $\frac{h_k}{c_k} > \delta\pi > \frac{h_\sigma}{c_\sigma}$ und wegen $\frac{h_\iota}{c_\iota} \geqslant \frac{h_k}{c_k}$ auch der Ungleichung $\frac{h_\iota}{c_\iota} > \delta\pi > \frac{h_\sigma}{c_\sigma}$. Da die Zahlen $\frac{h_s}{c_s}$ in jedem der Intervalle I_1, I_2 monoton sind, wechselt dann $g_s = c_s\left(\delta\pi - \frac{h_s}{c_s}\right)$ in jedem derselben genau einmal das Vorzeichen, also zwischen $s = 0$ und $s = n$ genau zweimal. Laut Satz 5 wechselt daher δV_s für $0 < s < n$ genau einmal das Vorzeichen, und zwar hat es vor dem Zeichenwechsel das Vorzeichen von $g_0 = c_0\left(\delta\pi - \frac{h_0}{c_0}\right)$, also von $\delta\pi - \frac{h_0}{c_0}$. — Analog erledigt sich der Fall: $\Delta\frac{h_s}{c_s} \geqslant 0$ für $0 \leqslant s \leqslant \sigma$, $\Delta\frac{h_s}{c_s} \leqslant 0$ für $\sigma < s \leqslant n-2$.

Aus dem Satz 12 folgen für die unter *a)* bis *c)* angegebenen Anwendungen des speziellen Zeichenbewahrungssatzes aufschlussreiche Erweiterungen, deren Formulierung wir dem Leser überlassen.

Schlusswort.

Blicken wir kurz auf den durchschrittenen Weg zurück.

Das rein formelle Studium gewisser Summendarstellungen haben wir zunächst für die Ableitung einiger allgemeiner Rücklageneigenschaften verwendet, um nachher ein Instrument für die Untersuchung der praktisch bedeutungsvollen Klasse normaler Variationen zu schaffen.

Die Brauchbarkeit des letzteren konnte im beschränkten Rahmen dieses Kapitals lediglich an einigen Anwendungen demonstriert werden. Diese entsprachen hauptsächlich der einfachsten Annahme einer Variation einer der Wahrscheinlichkeitsgrössen $q_s^{(i)}$, ohne Änderung der übrigen Grundgrössen. Der weite Bereich der normalen Variationen umfasst aber eine unendliche Mannigfaltigkeit komplizierterer Fälle, auf die die bewiesenen allgemeinen Sätze ebenfalls spezialisiert werden können, wozu nur die Berechnung der entsprechenden Werte h_s erforderlich ist.

So wird z. B. in der zitierten Abhandlung von Haldy der Einfluss einer Variation der Invalidisierungswahrscheinlichkeiten i_{x+s} auf die Deckungskapitalien der Invaliditätsrentenversicherung eines x-jährigen (mit gleichbleibenden während der Aktivität pränumerando zahlbaren Prämien) unter Voraussetzung der Invarianz folgender Versicherungswerte untersucht: der Wahrscheinlichkeiten $q_{x+s}^{\overline{aa}}$, dass ein $(x+s)$-jähriger Aktiver binnen Jahresfrist als Aktiver stirbt, des als konstant angenommenen Rechnungszinsfusses und der vorschüssigen Leibrentenwerte der Aktiven, a_{x+s}^{a}. Aus diesen Annahmen und den Formeln

$$\mathsf{a}_{x+s}^{a} = 1 + v\, i_{x+s}\, \mathsf{a}_{x+s+1}^{i} + v\,(1 - i_{x+s} - q_{x+s}^{\overline{aa}}) \cdot \mathsf{a}_{x+s+1}^{a}\,,$$

$$V_s = \mathsf{a}_{x+s}^{a} - \mathsf{a}_x^{a}\, \frac{\mathsf{a}_{x+s}^{\overline{aa}}}{\mathsf{a}_x^{\overline{aa}}}$$

folgt aber

$$h_s = v\, \frac{\mathsf{a}_x^{a}}{\mathsf{a}_x^{\overline{aa}}}\, \mathsf{a}_{x+s+1}^{\overline{aa}} \cdot \delta\, i_{x+s}\,,$$

und die Einsetzung dieses Wertes in die gefundenen allgemeinen Sätze liefert sofort verschiedene der Haldyschen Ergebnisse.

Ausser der offenbaren arbeitsökonomischen Vorteile ermöglicht die durchgeführte Untersuchung erhöhtes Verständnis für manche bereits bekannte Spezialergebnisse. Auch dies möge sie rechtfertigen, und zwar im Sinne der treffenden Worte des Herrn Prof. Dumas [1]):

«On ne peut trouver les formules et les méthodes les meilleures que si l'on comprend extrêmement bien le phénomène auquel elles s'appliquent; les études d'ensemble sur la théorie mathématique des assurances garderont toujours leur raison d'être.»

[1]) S. Dumas: «L'Association des actuaires suisses et son but», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1937, Heft 33.