Note sur l'approximation du taux effectif des emprunts par obligations amortissables par le système de l'annuité constante

Note sur l'approximation du taux effectif des emprunts par obligations amortissables par le système de l'annuité constante.

Par *E. Dasen*, Bâle.

Dans les ouvrages de mathématiques financières que nous connaissons, on montre que la détermination du taux effectif des emprunts par obligations est un problème de résolution d'une équation algébrique $F(i) = 0$ de degré n.

Si l'on désigne par:

N = nombre des titres émis,
C = capital nominal de chaque obligation,
n = durée de l'emprunt,
i_0 = taux d'intérêt nominal payable annuellement,
i = taux d'intérêt effectif,

la fonction $F(i) = 0$ prend la forme suivante si l'emprunt est remboursable à échéance fixe et si son prix global de négociation est K:

$$F(i) = K - N C i_0 a_{\overline{n|}} - N C v^n = 0. \tag{1}$$

La valeur de la racine i peut s'obtenir avec autant de décimales que l'on veut. Il suffit pour cela d'appliquer un des procédés décrits dans les ouvrages d'algèbre pour résoudre une équation algébrique de degré n.

Si maintenant l'emprunt est remboursable suivant le système de l'annuité constante, l'équation $F(i) = 0$ à résoudre prend la forme ci-après:

$$F(i) = K - \frac{N C}{\overset{\circ}{a}_{\overline{n|}}} a_{\overline{n|}} = 0. \tag{2}$$

Or cette dernière formule n'est pas rigoureuse du fait que les annuités ne sont pas toutes égales à $\frac{N C}{\overset{\circ}{a}_{\overline{n|}}}$, car on ne peut pas amortir des fractions de titres. L'équation à résoudre doit être tirée du plan d'amortissement qui seul fournit les sommes qui figureront dans la comptabilité de l'emprunt. Nous aurons donc:

$$F(i) = K - \sum_{k=1}^{n} A_k v^k = 0 \tag{3}$$

où les A_k sont les annuités du plan d'amortissement.

Le fait de substituer pour des raisons pratiques la formule (2) à la formule (3) pose le problème suivant:

A partir de quel rang les décimales de i obtenues en résolvant (2) *à la place de* (3) *n'ont-elles plus de signification?*

Nous ne doutons pas que ce problème soit très difficile à résoudre dans sa généralité. Nous allons cependant montrer, à l'aide d'un exemple numérique simple, qu'il vaut la peine d'être posé et qu'il mériterait d'être étudié.

Considérons un emprunt 4 % de 1.000 obligations de fr. 1000 chacune remboursable en 10 ans suivant le système de l'annuité constante. Les intérêts et les amortissements sont annuels. Cet emprunt se négociant au prix global de fr. 975 558,53, on demande le taux effectif de l'emprunt.

Le plan d'amortissement de cet emprunt est le suivant:

Années	Nombre d'obligations à amortir	Valeurs des amortissements	Intérêts annuels	Annuités A_k
1	83	83.000	40.000	123.000
2	87	87.000	36.680	123.680
3	90	90.000	33.200	123.200
4	94	94.000	29.600	123.600
5	97	97.000	25.840	122.840
6	101	101.000	21.960	122.960
7	105	105.000	17.920	122.920
8	110	110.000	13.720	123.720
9	114	114.000	9.320	123.320
10	119	119.000	4.760	123.760
	1.000	1.000.000	233.000	1.233.000

L'équation que nous aurons à résoudre pour obtenir le taux effectif de notre emprunt est donc:

$$975.558{,}53 - \sum_{k=1}^{10} A_k v^k = 0 \tag{4}$$

où les A_k sont à prendre dans la dernière colonne du plan d'amortissement ci-dessus. On se rend aisément compte que si le plan d'amortissement est un peu grand et compliqué, résoudre cette équation constitue un problème entraînant de longs calculs numériques. Dans le cas présent, les données numériques du problème ont été choisies de manière que

$$i = 0{,}045 \text{ soit } 4{,}5\ \%. \tag{5}$$

Pour éviter ces longs calculs, on substitue, comme nous le mentionnons au début, à l'équation exacte (4) l'équation approchée

$$975.558{,}53 - \frac{NC}{\overset{\circ}{a}_{\overline{10}|}} a_{\overline{10}|}(j) = 0 \tag{6}$$

où l'annuité constante théorique est

$$\frac{NC}{\overset{\circ}{a}_{\overline{10}|}} = 123.290{,}94. \tag{7}$$

On constate que les annuités du plan d'amortissement sont très voisines de cette somme. Mettons (6) sous la forme

$$a_{\overline{10}|}(j) = 7{,}912.653.8. \tag{8}$$

Comme d'après les tables financières

$$a_{\overline{10}|}\left(4\frac{1}{2}\right) = 7{,}912.718.2$$

on voit que

$$j > i. \tag{9}$$

Résolvons maintenant l'équation (8) par rapport à j. Comme on vient de le constater $i = 0{,}045$ est une valeur très approchée de j.

Il faut donc trouver quelle est la première correction à faire à i. Pour cela il suffit d'utiliser la formule bien connue:

$$(10) \qquad \Delta = \frac{1 - (1+i)^{-n} - i\, a_{\overline{n}|}(j)}{a_{\overline{n}|}(j) - n\,(1+i)^{-(n+1)}}.$$

Compte tenu des données numériques du problème, on trouve

$$(11) \qquad \Delta = 0{,}000.001.6$$

d'où

$$(12) \qquad j = 0{,}045.001.6 \text{ soit } 4{,}50016\ \%.$$

Cette racine est un peu trop faible, car

$$a_{\overline{10}|}(4{,}50016) = 7{,}912.655.9.$$

Si donc on avait résolu (6), comme on le fait habituellement à la place de (4), on peut dire que seules les 3 premières décimales après la virgule du taux effectif exprimé en % seraient à garder.

Il serait intéressant de faire des recherches plus approfondies dans ce domaine, mais elles seront certainement longues et difficiles. Nous avons cependant soulevé cette question, car nous ne croyons pas que cela ait été déjà fait.