

# Zerfällung einer Gesamtheit in Aktiven- und Invalidengruppen

Autor(en): **Kreis, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer  
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaire  
Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **41 (1941)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966759>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Zerfällung einer Gesamtheit in Aktiven- und Invalidengruppen.

Von *H. Kreis*, Winterthur.

Es seien eine Überlebensordnung

$$l_x = C \cdot f(x) \tag{1}$$

und eine Aktivitätsordnung

$$l_x^{aa} = k \cdot f^{aa}(x) \tag{2}$$

gegeben. Die Ordnungsfunktionen  $f(x)$  und  $f^{aa}(x)$  seien so definiert, dass sie für das gemeinsame Anfangsalter beider Reihen, z. B.  $x = 15$ , den Wert 1 haben. Die Zahl  $C$  fassen wir als Konstante, die Zahl  $k$  als Parameter auf. Es sei ferner  $z$  das Schlussalter der ersten Reihe,  $z' < z$ , dasjenige der zweiten Reihe, z. B.  $z = 104$  und  $z' = 80$ . Über den Charakter der Aktivenordnung setzen wir nichts voraus. Die Abgangsursachen, Invalidität und Ableben, können voneinander abhängig, d. h. miteinander verknüpft, oder aber, voneinander unabhängig, d. h. mehr oder weniger willkürlich voneinander getrennt sein.

Von einem beliebigen Alter  $w$  an lassen wir, im Sinne von *Schaertlin*<sup>1)</sup>, die Gesamtheit  $l_x$  in eine Gruppe von Aktiven und eine solche von Invaliden zerfallen und wollen die so entstehenden Bestandteile bestimmen.

Für  $x \geq w$  besteht nun die allgemeine Beziehung

$$l_x = l_x^{aa} + l_x^{ii} \tag{3}$$

mit der Anfangsbedingung

$$l_w^{aa} = l_w. \tag{4}$$

Aus den Gleichungen (1), (2) und (4) ergibt sich für den Parameter  $k$  der Wert

---

<sup>1)</sup> *Schaertlin*: Zur mathematischen Theorie der Invaliditätsversicherung. Bern 1907.

$$k = C \cdot \frac{f(w)}{f^{aa}(w)}. \quad (5)$$

Hieraus folgt aus (3) die Anzahl  $l_x^{ii}$  der Invaliden vom Alter  $x$  der betrachteten Sondergesamtheit von  $w$  bis  $z$ .

$$\begin{aligned} l_x^{ii} &= l_x - l_x^{aa} = C \cdot f(x) - C \cdot \frac{f(w)}{f^{aa}(w)} \cdot f^{aa}(x) \\ &= C \cdot f(w) \cdot \left( \frac{f(x)}{f(w)} - \frac{f^{aa}(x)}{f^{aa}(w)} \right) \end{aligned}$$

oder

$$l_x^{ii} = l_w \cdot \left( \frac{f(x)}{f(w)} - \frac{f^{aa}(x)}{f^{aa}(w)} \right). \quad (6)$$

Man findet selbstverständlich für  $x = w$ ,  $l_w^{ii} = 0$  und für  $x > z'$

$$l_x^{ii} = l_w \cdot \frac{f(x)}{f(w)} = l_x.$$

Da die Gleichung (6) nur dann brauchbare Werte für  $l_x^{ii}$  liefert, wenn der auf der rechten Seite stehende Klammerausdruck positiv ist, muss für alle Werte von  $x$  und  $w$ , die den Ungleichheiten genügen

$$15 \leq w < x \leq z$$

folgende Bedingung erfüllt sein

$$\frac{f^{aa}(15)}{f(15)} \geq \frac{f^{aa}(w)}{f(w)} > \frac{f^{aa}(x)}{f(x)} \geq \frac{f^{aa}(z)}{f(z)}$$

oder, da  $f^{aa}(15) = f(15) = 1$  und  $f^{aa}(z) = 0$  ist

$$\underline{1 \geq \frac{f^{aa}(w)}{f(w)} > \frac{f^{aa}(x)}{f(x)} \geq 0.} \quad (7)$$

Die verschiedenen Altersklassen der Gesamtheit (1) lassen sich infolgedessen auf Grund der Aktivenordnung (2) nicht unbedingt auf die geschilderte Art abbauen. Die Ungleichheit (7) stellt offensichtlich die notwendige und hinreichende Bedingung für das Gelingen der Zerfällung der Gesamtheit in Aktiven- und Invalidenbestände dar. Daraus ergibt sich der *Zerfällungssatz*:

Die Zerfällung der Gesamtheit  $C \cdot f(x)$  in Aktiven- und Invalidentruppen mit Hilfe der Aktivitätsordnung  $k \cdot f^{aa}(x)$  ist dann und nur dann lückenlos möglich, wenn das Verhältnis der beiden Ordnungsfunktionen  $f^{aa}(x)$  zu  $f(x)$  mit wachsendem  $x$  beständig von 1 bis 0 abnimmt.

Auf Grund dieses Kriteriums lässt sich die Ordnungsfunktion  $f^{aa}(x)$  der Aktivenreihe (2) auf die Form

$$f^{aa}(x) = f(x) \cdot v(x) \quad (8)$$

bringen, wo  $v(x)$  eine Abbaufunktion bedeutet, die mit wachsendem  $x$  von 1 bis 0 beständig abnimmt. Hieraus ergibt sich

$$k \cdot f^{aa}(x) = C \cdot f(x) \cdot \frac{k}{C} \cdot v(x)$$

oder

$$k \cdot f^{aa}(x) = C f(x) \cdot \frac{f(w)}{f^{aa}(w)} v(x) \quad (9)$$

D. h. jede die Zerfällungsbedingung erfüllende Aktivenordnung lässt sich als Produkt aus der zu zerfällenden Überlebensordnung  $C \cdot f(x)$  und einer eigentlichen Abfallordnung  $\frac{f(w)}{f^{aa}(w)} \cdot v(x)$  darstellen.

Wir nehmen nun an, die geforderte Bedingung werde durch die Funktionen  $f$  und  $f^{aa}$  erfüllt, und gehen zur eigentlichen Aufgabe über, indem wir zuerst auf bekannte Art die Anzahl  $L_w$  der Personen vom Alter  $w$  bis zum Schlussalter  $z$  der Gesamtheit ermitteln. Es ist

$$\begin{aligned} L_w &= \int_w^z l_x dx \sim \left( \frac{l_w + l_{w+1}}{2} + \dots + \frac{l_z}{2} \right) \\ &= l_w + l_{w+1} + \dots + l_z - \frac{1}{2} \cdot l_w \\ L_w &= l_w \cdot \dot{e}_w \end{aligned} \quad (10)$$

wobei  $e_w$  die mittlere Lebenserwartung für einen  $w$ -jährigen bedeutet. Ebenso ist die Anzahl  $L_w^{aa}$  der Aktiven vom Alter  $w$  bis zum Schlussalter  $z'$  der Aktivenordnung gleich

$$L_w^{aa} = \int_w^{z'} l_x^{aa} \cdot dx \sim l_w \cdot \dot{e}_w^{aa} \quad (11)$$

wobei  $\overset{\circ}{e}_w^{aa}$  die mittlere Aktivitätsdauer für einen  $w$ -jährigen bedeutet. Ferner ist die Anzahl der Invaliden, die aus der Gesamtheit  $w$  bis  $z$  hervorgehen

$$L_w^{ii} = L_w - L_w^{aa} = l_w \cdot (\overset{\circ}{e}_w - \overset{\circ}{e}_w^{aa}). \quad (12)$$

Bedeutet schliesslich  $s$  die Altersgrenze, bei der die Aktiven aus Altersgründen aus der Aktivengruppe ausscheiden, so vermindert sich der durch (11) angegebene Aktivenbestand um

auf

$$\int_s^{z'} l_x^{aa} \cdot dx \sim l_s^{aa} \cdot \overset{\circ}{e}_s^{aa}$$

$$L_{w(s)}^{aa} = l_w \cdot \overset{\circ}{e}_w^{aa} - l_s^{aa} \cdot \overset{\circ}{e}_s^{aa}$$

$$= l_w \cdot \left( \overset{\circ}{e}_w^{aa} - \frac{f^{aa}(s)}{f^{aa}(w)} \cdot \overset{\circ}{e}_s^{aa} \right). \quad (13)$$

Entsprechend wird die Anzahl der aus der Sondergesamtheit  $w$  bis  $z$  hervorgegangenen Invaliden und der übrigen Angehörigen der Gesamtheit vom Mindestalter  $s$  gleich

$$L_{w(s)}^{ii} = l_w \cdot \left( \overset{\circ}{e}_w - \overset{\circ}{e}_w^{aa} + \frac{f^{aa}(s)}{f^{aa}(w)} \cdot \overset{\circ}{e}_s^{aa} \right). \quad (14)$$

Falls die Werte  $\overset{\circ}{e}_w$  und  $\overset{\circ}{e}_w^{aa}$  tabelliert vorliegen, lassen sich die Formeln (10) bis (14) für alle gewünschten Kombinationen von  $w$  und  $s$  mit Leichtigkeit auswerten.

Man kann auch unmittelbar für den Beharrungszustand das Verhältnis der Anzahlen der Aktiven und Invaliden, die aus der Gesamtheit ( $w; z$ ) hervorgehen, angeben

$$L_w^{aa} : L_w^{ii} = \overset{\circ}{e}_w^{aa} : (\overset{\circ}{e}_w - \overset{\circ}{e}_w^{aa}) = 1 : \left( \frac{\overset{\circ}{e}_w}{\overset{\circ}{e}_w^{aa}} - 1 \right) \quad (15)$$

oder, im Falle des Vorhandenseins einer Altersgrenze  $s$ , das Verhältnis der Anzahl der Aktiven zu der der Invaliden und der aus Altersgründen zurückgetretenen Aktiven

$$L_{w(s)}^{aa} : L_{w(s)}^{ii} = 1 : \left( \frac{\overset{\circ}{e}_w}{\overset{\circ}{e}_w^{aa} - \frac{f^{aa}(s)}{f^{aa}(w)} \cdot \overset{\circ}{e}_w^{aa}} - 1 \right). \quad (16)$$

Sämtliche entwickelten Formeln können z. B. auf die Tafeln der von der Direktorenkonferenz der Schweizerischen Lebensversicherungsgesellschaften herausgegebenen Tabellensammlung <sup>1)</sup> angewendet werden. Die in dem Werk verwendete, zusammengesetzte Aktivitätsordnung ist nämlich das Produkt aus der zu zerfallenden Überlebensordnung und einer einfachen Aktivitätsordnung mit Ausscheidung durch Invalidität allein. Auf Grund ihrer Struktur genügt die so gebildete, zusammengesetzte Aktivitätsordnung der durch den Zerfallungssatz geforderten Bedingung.

Der in dieser Arbeit bewiesene Satz scheint mir deshalb von besonderem Interesse zu sein, weil er indirekt eine Beziehung allgemeiner Art zwischen beobachteten abhängigen und abgeleiteten unabhängigen Wahrscheinlichkeiten liefert. Er zeigt für den Fall von zwei Abgangsursachen, unter welchen Bedingungen die Verwandlung von abhängigen in unabhängige oder korrigierte Wahrscheinlichkeiten vollzogen werden kann. Dass eine solche Überführung nicht ohne Willkür durchführbar ist, geht aus verschiedenen in den Mitteilungen veröffentlichten Arbeiten hervor <sup>2)</sup>. Von einem neuen Gesichtspunkte aus erfährt aber diese Willkür durch den Zerfallungssatz eine nicht unwesentliche Deutungsmöglichkeit.

---

<sup>1)</sup> «Technische Grundlagen und Bruttotarife für Gruppenversicherungen»; Mai 1939.

Die Veröffentlichung dieser Grundlagen hat mich zu der vorliegenden Untersuchung veranlasst.

<sup>2)</sup> *E. Marchand*: Probabilités expérimentales, M. V. S. V., 33. Heft; *J. Meier*: Zur Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten, M. V. S. V., 39. Heft.

