

# Note sur le produit de plusieurs probabilités d'extinction appliquées à des groupes de valides ou d'invalides

Autor(en): **Müller, M.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **43 (1943)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-550796>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Note sur le produit de plusieurs probabilités d'extinction appliquées à des groupes de valides ou d'invalides.

Par *M. Müller*, Zurich.

Soit un groupe de vivants d'âge  $x$ ,  $l_x$  composé de  $l_x^a$  valides et de  $l_x^i$  invalides. Nous admettons :

- I° que les valides (ou les invalides) peuvent passer autant de fois que l'on veut de l'état de validité à l'état d'invalidité, et inversement, avant d'atteindre l'âge  $x + 1$ , ou avant de mourir entre les âges  $x$  et  $x + 1$ ;
- II° que la probabilité pour un valide (ou un invalide) de devenir invalide (ou valide) ou de mourir, ne dépend pas de son passé, notamment du temps pendant lequel il a été invalide ou du nombre de fois qu'il a passé de l'état de validité à l'état d'invalidité.

Nous désignons par :

- $l_x^a$  le nombre de vivants d'âge  $x$  en état de validité;
- $l_x^i$  le nombre de vivants d'âge  $x$  en état d'invalidité;
- $q_x^a$  la probabilité pour un valide d'âge  $x$  de mourir en état de validité ou d'invalidité avant d'atteindre l'âge  $x + 1$ ;
- $q_x^i$  la probabilité pour un invalide d'âge  $x$  de mourir en état d'invalidité ou de validité avant d'atteindre l'âge  $x + 1$ ;
- $i_x$  la probabilité pour un valide d'âge  $x$  de devenir invalide avant d'avoir atteint l'âge  $x + 1$ , sans préjudice de la possibilité de redevenir valide dans la même période;
- $w_x$  la probabilité pour un invalide d'âge  $x$  de devenir valide avant d'avoir atteint l'âge  $x + 1$ , sans préjudice de la possibilité de redevenir invalide dans la même période.

L'expression classique

$$(A) \quad l_{x+1}^a = l_x^a \left( 1 - i_x - q_x^a + \frac{1}{2} i_x q_x^i \right)$$

n'est plus exacte si on admet qu'un invalide peut redevenir valide au cours de l'année considérée, puis de nouveau invalide, ou mourir, au cours de la même année. Nous observons tout d'abord que l'expression (A) peut se généraliser sous la forme suivante:

$$(B) \quad l_{x+1}^a = l_x^a \left( 1 - i_x - q_x^a + \frac{1}{2} i_x q_x^i \right) + l_x^i \left( w_x - \frac{1}{2} w_x q_x^a \right).$$

Nous remarquons ensuite que les invalides du terme  $\gamma_1 l_x^a i_x$  et les valides du terme  $\gamma_1 l_x^i w_x$  (où  $\gamma_1 = 1$ ) donneront naissance, dans le cours de l'année, à des valides au nombre de  $\gamma_2 l_x^a i_x w_x$  et à des invalides au nombre de  $\gamma_2 l_x^i w_x i_x$ , et, ensuite, d'une manière plus générale, à des cas d'invalidité, de validité, ou de décès au nombre de  $\gamma_3 l_x^j p_1 p_2 p_3$ , où  $p_n$  représente l'une des probabilités  $i_x$ ,  $w_x$ ,  $q_x^a$ , et  $q_x^i$ <sup>1)</sup>. Notre intention n'est pas de développer effectivement l'expression  $l_{x+1}^a$ , mais de démontrer le théorème suivant:

### *Théorème*

*Le coefficient  $\gamma_m^a$ , en valeur absolue, la forme*

$$\frac{1}{m!}$$

*propre aux développements en série de Taylor.*

Pour démontrer ce théorème reprenons, sous une forme généralisée, la démonstration classique du terme  $\frac{1}{2} i_x q_x^i$  de l'expression (A).

Soit  $l_x^a$  le nombre de valides d'âge  $x$ ; les sorties par décès sont au nombre de  $l_x^a q_x^a$  et les sorties par invalidité au nombre de  $l_x^a i_x$ , mais on doit introduire un terme correctif répondant à la possibilité, pour un valide, de devenir invalide avant de mourir. Nous admettrons

<sup>1)</sup> Nous admettrons, dans ce qui suit, que les probabilités sont écrites dans l'ordre où les sinistres apparaissent, les probabilités  $q_x^a$  et  $q_x^i$  ne pouvant intervenir qu'en dernier lieu. L'indice  $j$  représente  $a$  ou  $i$ .

que l'année a été divisée en  $n$  segments égaux ( $n$  étant un nombre entier positif aussi grand que l'on veut) et que les cas d'invalidité se produisent en nombres égaux à la fin de chaque segment, le dernier excepté. Apparaîtront à la fin de chaque segment

$$\frac{1}{n-1} l_x^a i_x \quad \text{cas d'invalidité.}$$

En admettant que la probabilité pour un invalide de mourir dans le reste de l'année est proportionnel au temps  $\frac{n-l}{n}$  qui reste à parcourir jusqu'à la fin de l'année, le nombre de décès pour le groupe d'invalides apparaissant à la fin du  $l^e$  segment sera de

$$\frac{1}{n-1} l_x^a i_x \cdot \frac{n-l}{n} q_x^i.$$

En faisant la somme de ces expressions nous obtenons

$$\sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{n-1} l_x^a i_x \cdot \frac{n-l}{n} q_x^i = \frac{1}{n(n-1)} l_x^a i_x q_x^i \cdot \frac{(n-1)n}{2}.$$

Le terme correctif cherché est donc bien, quel que soit  $n$ :

$$\frac{1}{2} l_x^a i_x q_x^i.$$

Nous pouvons d'ailleurs généraliser encore cette démonstration en admettant que les cas d'invalidité apparaissent à la fin des  $n$  segments, le dernier n'étant pas excepté de cette répartition. Nous aurons alors le terme correctif suivant:

$$\sum_{l=1}^n \frac{1}{n} l_x^a i_x \cdot \frac{n-l}{n} q_x^i = \frac{1}{n^2} l_x^a i_x \cdot \frac{(n-1)n}{2} q_x^i$$

qui exige que l'on fasse croître  $n$  au-delà de tout nombre donné pour aboutir à la limite au terme:

$$\frac{1}{2} l_x^a i_x q_x^i.$$

C'est ce dernier mode de raisonnement que nous allons retenir.

Nous allons examiner maintenant le cas où trois probabilités interviennent, par exemple le cas des valides devenant invalides, puis valides de nouveau, pour mourir avant la fin de l'année. L'expression dont nous devons déterminer le coefficient a la forme

$$\gamma_3 l_x^a i_x w_x q_x^a.$$

Nous divisons de nouveau l'année en  $n$  segments égaux. Nous admettons que les invalides issus des  $l_x^a$  valides apparaissent en nombres égaux à la fin de chaque segment, le  $n^e$  compris; nous avons alors, à la fin de chaque segment

$$\frac{1}{n} l_x^a i_x \text{ invalides.}$$

Nous admettons ensuite, par analogie, que les valides issus de ces invalides apparaissant à la fin du  $l^e$  segment, se répartissent en nombres égaux à la fin des  $(n-l)$  segments qui suivent le  $l^e$ ; pour le  $(l+k)^e$  segment ils seront au nombre de:

$$\frac{1}{n} l_x^a i_x \cdot \frac{1}{n-l} w_x \frac{n-l}{n} = \frac{1}{n^2} l_x^a i_x w_x,$$

où  $k$  est plus grand que zéro, où  $\frac{n-l}{n}$  représente le temps pendant lequel la probabilité  $w_x$  agit, et où  $n-l$  est le nombre de segments restant à parcourir depuis le  $l^e$  (non compris). On voit immédiatement, si on constitue la somme des valides de ces sources apparaissant à la fin de chaque segment, que nous avons:

à la fin du 1<sup>er</sup> segment: aucun valide,

à la fin du 2<sup>e</sup> segment:  $\frac{1}{n^2} l_x^a i_x w_x$  valides,

à la fin du  $l^e$  segment:  $\frac{l-1}{n^2} l_x^a i_x w_x$  valides,

dont le total général est bien, en faisant tendre  $n$  vers l'infini, de

$$\frac{1}{2} l_x^a i_x w_x \text{ valides.}$$

Nous admettrons que les décès, dans ces groupes de valides apparaissant à la fin des segments, se répartissent avec la même homogénéité. Si nous envisageons le groupe de valides de la fin du  $l^e$  segment, au nombre de  $\frac{l-1}{n_2} l_x^a i_x w_x$  personnes, on voit immédiatement que ce groupe donne naissance, à la fin de chaque segment restant à parcourir, par exemple à la fin du  $(l+1)^e$ , à

$$\frac{l-1}{n^2} l_x^a i_x w_x \cdot \frac{n-l}{n} q_x^a \cdot \frac{1}{n-l} = \frac{l-1}{n^3} l_x^a i_x w_x q_x^a \quad \text{cas de décès.}$$

En poursuivant de la même manière, c'est-à-dire en constituant la somme des cas de décès apparaissant à la fin de chaque segment, on verrait aisément qu'à la fin du  $l^e$  segment nous avons :

$$\frac{1 + 2 + 3 + \dots + (l-2)}{n^3} l_x^a i_x w_x q_x^a = \frac{(l-2)(l-1)}{2n^3} l_x^a i_x w_x q_x^a$$

cas de décès.

Le coefficient  $\gamma_3$  cherché sera donc égal, en valeur absolue, à <sup>1)</sup>

$$\frac{1}{2n^3} \sum_{l=3}^n (l-2)(l-1) = \frac{1}{2n^3} \cdot \frac{2n^3 - 6n^2 + 4n}{6}$$

et, à la limite, en faisant tendre  $n$  vers l'infini, à

$$\gamma_3 = \frac{1}{2 \cdot 3}$$

Le théorème est ainsi démontré pour  $m$  égal à 2 et à 3. Nous pouvons passer au cas général de la manière suivante :

Soit  $\beta_1^{m-1}, \beta_2^{m-1}, \dots, \beta_n^{m-1}$  les coefficients qui servent à déterminer le nombre de sinistres ou de « cas » apparaissant à la fin de chaque

---

<sup>1)</sup> Ce terme contient la grandeur  $\sum_{l=3}^n (l-2)(l-1)$   
avec  $\sum_{l=1}^n l^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  qu'on peut démontrer en raisonnant par récurrence.

segment et dépendant de  $m-1$  probabilités. A la fin du 1<sup>er</sup> segment nous aurons

$$\beta_1^{m-1} l_x^j p_1 p_2 \cdots p_{m-1} \text{ cas,}$$

à la fin du  $l^e$  segment nous aurons

$$\beta_l^{m-1} l_x^j p_1 p_2 \cdots p_{m-1} \text{ cas.}$$

Le nombre de cas dépendant de  $m$  probabilités apparaissant à la fin du  $l^e$  segment aura évidemment la forme

$$\frac{\beta_1^{m-1} + \beta_2^{m-1} + \cdots + \beta_{l-1}^{m-1}}{n} l_x^j p_1 p_2 \cdots p_m = \beta_l^m l_x^j p_1 p_2 \cdots p_m$$

$$\text{où } \beta_l^m = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{l-1} \beta_l^{m-1} \text{ avec } \gamma_m = \sum_{l=1}^n \beta_l^m.$$

Si nous faisons  $m=1$  nous avons  $\beta_l^1 = \frac{1}{n}$  et  $\sum \beta_l^1 = 1$  ;

si nous faisons  $m=2$  nous avons  $\beta_1^2 = 0$  et  $\beta_l^2 = \frac{l-1}{n^2}$   
avec  $\sum_{n \rightarrow \infty} \beta_l^2 = \frac{1}{2}$  ;

si nous faisons  $m=3$  nous avons  $\beta_1^3 = \beta_2^3 = 0$  et  $\beta_l^3 = \frac{(l-2)(l-1)}{2n^3}$   
avec  $\sum_{n \rightarrow \infty} \beta_l^3 = \frac{1}{2 \cdot 3}$ .

Nous allons maintenant faire une remarque qui nous facilitera considérablement la suite de notre raisonnement. Le coefficient  $\gamma_m$  cherché est, en valeur absolue, égal à  $\sum \beta_l^m$ , pour chaque valeur de  $m$ . Pour  $m=2$ , nous avons obtenu  $\beta_l^2 = \frac{l-1}{n^2}$  ; si nous écrivions  $\beta_l^2 = \frac{l}{n^2}$ ,  $\gamma_2$  pour  $n$  tendant vers l'infini, serait aussi égal à  $\frac{1}{2}$ . De

même pour  $m = 3$ , si nous écrivions  $\beta_l^3 = \frac{l(l+1)}{2n^3}$ , nous obtiendrions aussi  $\gamma_3 = \frac{1}{2 \cdot 3}$ , pour  $n$  tendant vers l'infini.

A quoi correspond une telle transformation des valeurs de  $\beta_l^m$ ? Il résultait du mode de raisonnement que nous avons adopté que les cas résultant de l'application de trois probabilités ne pouvaient commencer à apparaître qu'à la fin du 3<sup>e</sup> segment; c'est pourquoi, pour  $m = 3$  nous avons eu  $\beta_1^3 = \beta_2^3 = 0$ . Nous pourrions sans inconvénient admettre que les sinistres résultant de trois probabilités apparaissent dès la fin du 1<sup>er</sup> segment, ce qui revient à avancer de deux segments l'apparition des groupes de sinistres. On voit aisément

que l'erreur commise sera plus petite que  $\frac{m}{n} l_x$ , quantité négligeable

pour  $n$  assez grand. Il en sera de même pour  $m$  plus grand que trois; en avançant l'apparition des groupes de sinistres de  $m - 1$  segments, ou, ce qui revient au même, d'un segment chaque fois qu'on passe d'un produit de  $m - 1$  probabilités à un produit de  $m$  probabilités,

nous aurons  $\beta_l^m = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^l \beta_l^{m-1}$  au lieu de  $\beta_l^m = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{l-1} \beta_l^{m-1}$ . Le même

résultat serait obtenu en supposant, contrairement à notre hypothèse initiale, que les sinistres, au lieu d'apparaître à la fin des segments, apparaissent au début des segments, le premier groupe de sinistres résultant de l'application d'une probabilité apparaissant alors au début du premier segment, et ainsi de suite.

Dès lors, si nous faisons  $m$  égal à 1, nous aurons

$$\beta_l^1 = \frac{1}{n} \quad \text{avec} \quad \sum \beta_l^1 = 1,$$

si nous faisons  $m = 2$ , nous aurons

$$\beta_l^2 = \frac{l}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{l=1}^n \beta_l^2 = \frac{1}{2},$$

$n \rightarrow \infty$

si nous faisons  $m = 3$ , nous aurons

$$\beta_l^3 = \frac{l(l+1)}{2n^3}$$



avec

$$\sum \beta_l^3 = \gamma_3 = \sum_{l=1}^n \frac{l(l+1)}{2n^3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3 \cdot n^3} = \frac{1}{2 \cdot 3}.$$

$n \rightarrow \infty$

Nous devons maintenant montrer qu'avec les hypothèses que nous avons faites on a, pour  $m$  quelconque

$$\gamma_m = \sum_{l=1}^n \frac{1}{n^m} \cdot \frac{l(l+1) \dots (l+m-2)}{(m-1)!} = \frac{1}{n^m} \cdot \frac{n(n+1) \dots (n+m-1)}{m!}$$

où  $\beta_l^m$  est la quantité sous le signe  $\Sigma$ , quantité elle-même formée de la même manière que  $\gamma_m$ , puisqu'elle serait égale à

$$\frac{1}{n} \sum_{l=1}^l \frac{1}{n^{m-1}} \cdot \frac{l(l+1) \dots (l+m-3)}{(m-2)!}$$

Nous devons donc démontrer que, quels que soient  $n$  et  $m$ , la relation

$$\sum_{l=1}^n l(l+1)(l+2) \dots (l+m-2) = \frac{n(n+1) \dots (n+m-1)}{m}$$

est vraie. Nous aurons ainsi démontré aussi bien la loi de formation des  $\gamma_m$  que celle des  $\beta_l^m$ .

Nous vérifions aisément que cette relation est vraie pour  $m = 3$  quel que soit  $n$ , et aussi qu'elle est vraie pour  $n = 2$ , quel que soit  $m$ . Etant vraie pour  $n = 2$ , quel que soit  $m$ , il suffit de démontrer que vraie pour  $n = n_1$ , quel que soit  $m$ , elle sera vraie également pour  $n = n_1 + 1$ . Nous admettons donc que

$$\sum_{l=1}^{n_1} l(l+1) \dots (l+m-2) = \frac{n_1(n_1+1) \dots (n_1+m-1)}{m}$$

est vrai. En ajoutant à chaque membre de cette relation la quantité

$$(n_1+1)(n_1+2) \dots (n_1+m-1),$$

on obtient

$$\sum_{l=1}^{n_1+1} l(l+1) \dots (l+m-2) = \frac{(n_1+1)(n_1+2) \dots (n_1+m)}{m}$$

et notre relation est démontrée.

Nous avons donc, quels que soient  $n$  et  $m$ ,

$$\beta_l^m = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^l \frac{l(l+1) \dots (l+m-3)}{n^{m-1} \cdot (m-2)!} = \frac{1}{n^m} \cdot \frac{l(l+1) \dots (l+m-2)}{(m-1)!}$$

et

$$\gamma_m = \frac{n(n+1) \dots (n+m-1)}{n^m \cdot m!}$$

avec, pour  $n$  tendant vers l'infini,

$$\gamma_m \rightarrow \frac{1}{m!}$$

en valeur absolue. Le théorème annoncé est ainsi démontré.

