Gruppierung mit Nebenbedingungen

Gruppierung mit Nebenbedingungen.

Von *H. Hadwiger*, Bern.

Unter einer Gruppierung von n individuell unterscheidbaren Elementen wollen wir eine vollständige Zerlegung (Aufteilung) der gegebenen Elementgesamtheit in einzelne Gruppen verstehen. Durch

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6) = (6) + (4, 1, 3) + (2, 5)$$

ist beispielsweise eine symbolische Darstellung einer Gruppierung von $n = 6$ Elementen gegeben. Zwei Gruppen einer Gruppierung sollen nur dann als verschieden gelten, wenn die (ungeordneten) Mengen der in ihnen enthaltenen Elemente verschieden sind, so dass also eine eventuelle Anordnung der Elemente innerhalb der Gruppe unwesentlich ist. Ähnlich sollen zwei Gruppierungen der nämlichen Elementgesamtheit nur dann als verschieden bezeichnet werden, wenn die Mengen ihrer Gruppen ungleich sind, so dass auch hier die Anordnung der Gruppen keine Berücksichtigung findet. Die verschiedenen Gruppierungen für $n = 4$ sind:

$$(1) + (2) + (3) + (4)$$

$$\begin{aligned}
&(1, 2) + (3) + (4)\\
&(1, 3) + (2) + (4)\\
&(1, 4) + (2) + (3)\\
&(2, 3) + (1) + (4)\\
&(2, 4) + (1) + (3)\\
&(3, 4) + (1) + (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(1, 2) \quad\;\; + (3, 4)\\
&(1, 3) \quad\;\; + (2, 4)\\
&(1, 4) \quad\;\; + (2, 3)\\
&(2, 3, 4) + (1)\\
&(1, 3, 4) + (2)\\
&(1, 2, 4) + (3)\\
&(1, 2, 3) + (4)
\end{aligned}$$

$$(1, 2, 3, 4)$$

In der vorliegenden Arbeit befassen wir uns mit der Anzahl der verschiedenen möglichen Gruppierungen, welche noch gewissen Nebenbedingungen zu genügen haben. So studieren wir die Anzahl $A^n_{\nu,\lambda}$ der Gruppierungen, die genau ν Gruppen ergeben, wobei aber die Anzahl der in den einzelnen Gruppen enthaltenen Elemente nicht grösser als λ sein soll. Nach der oben als Beispiel gegebenen Aufstellung der Gruppierungen für den Fall $n = 4$ wird also

$$A^4_{1,4} = 1,\ A^4_{2,2} = 3,\ A^4_{2,3} = 7,\ A^4_{3,2} = 6,\ A^4_{4,1} = 1$$

sein. Für $\lambda = n$ entfällt offensichtlich die zusätzliche Nebenbedingung, und wir schreiben dann für die Anzahl der Gruppierungen mit ν Gruppen kürzer A^n_ν. So ist beispielsweise

$$A^4_1 = 1,\ A^4_2 = 7,\ A^4_3 = 6,\ A^4_4 = 1.$$

Unser Ziel ist, die explizite Lösung des durch die obigen Bemerkungen nahegelegten allgemeinen Problems so zu entwickeln, dass gewisse methodische Richtlinien, die uns zur Bearbeitung derartiger Fragestellungen der Kombinatorik geeignet erscheinen, deutlich zutage treten. Nebenbei werden einige Beziehungen zu gewissen Formeln der Analysis zur Geltung gebracht. Die Möglichkeit derartiger enger Zusammenhänge beruht auf der Tatsache, dass solche Formeln, wie sie etwa bei fortgesetzter Ableitung zusammengesetzter Funktionen (Formel von *Faà di Bruno*) oder bei Iteration gewisser Differentialoperatoren entstehen, in ihrem Aufbau einem kombinatorischen Prinzip unterworfen sind. Die mannigfaltigen Beziehungen, welche zwischen den vielen Einzelresultaten der alten und neuen Fachliteratur in dieser Hinsicht bestehen, sind fast unübersehbar [1]).

[1]) In den hier folgenden Erläuterungen treten wir kurz auf einige Berührungspunkte ein, die zwischen der bestehenden Fachliteratur und unserer Studie bestehen. — Kombinatorische Interpretationen für Entwicklungskoeffizienten in Formeln fortgesetzter Derivation, die mit unserm Fragenkreis zusammenhängen, wurden beispielsweise von *H. S. Wal*, On the n-th derivative of $f(x)$; Bull. Amer. Math. Soc. *44* (1938), 395—398, und in allgemeinerer Form von *J. Opatowski*, Combinatoric interpretation of a formula for the n-th derivative of a function; Bull. Amer. Math. Soc. *45* (1939), 944 gegeben. In der letztgenannten Arbeit handelt es sich um eine Deutung der Koeffizienten in der Derivationsformel von *Faà di Bruno*. Die Zahlen A^n_ν treten in anderer Bedeutung bereits in der klassischen Analysis auf; sie finden sich beispielsweise als Koeffizienten der Entwicklung des Differentialoperators $(xD)^n$ nach den Potenzen D^ν (D bedeutet

Wie einleitend erwähnt, bezeichne

$$A^n_{\nu,\lambda}\ (1 \leqq \lambda \leqq n,\ 1 \leqq \nu \leqq n) \tag{1}$$

die Anzahl der Gruppierungen von n Elementen in ν Gruppen unter der Nebenbedingung, dass die Anzahl der in den einzelnen Gruppen enthaltenen Elemente die Schranke λ nicht übertrifft.

---

die Ableitung nach x). Vgl. hierüber die Arbeiten von *S. Pincherle*, Bulletino U. M. I, *11* (1936), 72—74, und *L. Toscano*, Ist. Lombardo, Rend. 11, *67* (1934), 543—551. Eine merkwürdige Interpretation der Zahlen A^n_ν gab *Scherk*, Über einen allgemeinen, die Bernoullischen Zahlen und die Coefficienten der Secantenreihe zugleich darstellenden Ausdruck, J. f. Math. *4* (1829), 299, wonach A^n_ν die Summe der $\binom{n-1}{n-\nu}$ Produkte bezeichnet, die durch die Kombinationen der ν Zahlen $(1, 2, \ldots, \nu)$ zur $(n-\nu)$-ten Klasse mit Wiederholungen gegeben ist. So ist beispielsweise

$$A^6_3 = 90 = 1\cdot1\cdot1 + 1\cdot1\cdot2 + 1\cdot1\cdot3 + 1\cdot2\cdot2 + 1\cdot2\cdot3 + 1\cdot3\cdot3 + 2\cdot2\cdot2 + \\ + 2\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot3 + 3\cdot3\cdot3.$$

Eingehende Studien widmete *L. Saalschütz*, Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, Berlin 1893, den Zahlen $C^n_\nu = A^{n+1}_{\nu+1}$, die in verschiedenen Formeln und Reihen auftreten. Erwähnt sei die klassische Formel von *Eytelwein* zur Darstellung der *Bernoullischen Zahlen*. Wir möchten darauf hinweisen, dass die in der analogen Darstellungsformel von *Laplace* auftretenden Koeffizienten, die eng mit unsern Zahlen verwandt sind, in jüngster Zeit eine neue, beachtliche kombinatorische Interpretation durch *L. von Schrutka*, Eine neue Einteilung der Permutationen, Math. Ann. *118* (1941), 246—250, erfahren haben. Es handelt sich um die Klassifikation der Permutationen nach der Zahl der enthaltenen Aufstiege. Die bei uns entwickelte explizite Darstellung der Zahlen A^n_ν zeigt eine bemerkenswerte Verwandtschaft mit der *Laplaceschen Polynomformel* (Théorie analytique des probabilités, 196) für die Verteilungsfunktion

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \cos xt\,dt,$$

welche bei der kontinuierlichen Behandlung eines Aufteilungsproblems ebenfalls eine wesentliche Rolle spielt. Vgl. hierüber *H. Hadwiger*, Über gleichwahrscheinliche Aufteilungen, Zeitschrift für angewandte Math. und Mechanik *22* (1942), 226—232, besonders Formel (4) und (10). Eine Darstellung der Potenz x^n durch die Binomialpolynome $\binom{x}{i}$, welche wir im Laufe der Entwicklung streifen, wurde u. a. auch von *J. A. Joseph*, Ann. math. Statist. *10* (1939), 293—296, studiert, wobei auch Beziehungen zu den *Eulerschen* und *Bernoullischen Zahlen* festgestellt worden sind.

Ordnet man die oben gekennzeichneten Gruppierungen in der folgenden Weise, dass man zunächst diejenigen Gruppierungen aufführt, in welchen das n-te Element für sich eine Gruppe bildet, dann diejenigen, in welchen das bezeichnete Element mit genau einem weitern, dann mit zwei weitern usw. Elementen eine Gruppe bildet, so führt die mit dieser Einteilung verbundene Abzählung zur Rücklaufformel

$$A^n_{\nu,\lambda} = \sum_{i=0}^{\lambda-1} \binom{n-1}{i} A^{n-1-i}_{\nu-1,\lambda}. \tag{2}$$

Es ist für unsere einzuschlagende analytische Methode charakteristisch, die den zu studierenden Zahlen zugeordneten Polynome

$$T_{n,\lambda}(x) = \sum_{\nu=1}^{n} A^n_{\nu,\lambda} x^\nu, \qquad T_{0,\lambda}(x) = 1, \qquad n \geqq 1 \tag{3}$$

zu betrachten. Durch passendes Multiplizieren mit Potenzen von x kann die Rücklaufformel (2) in eine solche für die Polynome (3) übergeführt werden, nämlich in

$$T_{n,\lambda}(x) = x \sum_{i=0}^{\lambda-1} \binom{n-1}{i} T_{n-1-i,\lambda}(x). \tag{4}$$

Besondere Beachtung verdient neben dem Fall $\lambda = n$, den wir später ausführlicher betrachten, noch der Spezialfall $\lambda = 2$. Nach der Rücklaufformel (4) berechnet man schrittweise

$$\begin{aligned}
T_{0,2}(x) &= 1,\\
T_{1,2}(x) &= x,\\
T_{2,2}(x) &= x^2 + x,\\
T_{3,2}(x) &= x^3 + 3x^2,\\
T_{4,2}(x) &= x^4 + 6x^3 + 3x^2,\\
T_{5,2}(x) &= x^5 + 10x^4 + 15x^3,\\
T_{6,2}(x) &= x^6 + 15x^5 + 45x^4 + 15\,x^3.
\end{aligned}$$

Wie wir an dieser Stelle bereits vorwegnehmen wollen, steht das Polynom $T_{n,2}(x)$ in einem engen Zusammenhang mit dem Hermiteschen Polynom $H_n(x)$, das in der üblichsten Weise durch die Differentiationsformel

(6) $$e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) = D^n e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \left\{D \equiv \frac{d}{dx}\right\}$$

definiert wird, und zwar gilt die Darstellung

(7) $$T_{n,2}(x) = \left(\sqrt{-x}\right)^n H_n\left(\sqrt{-x}\right).$$

Durch

(8) $$a_n = \sum_{\nu=1}^{n} A^n_{\nu,2} = T_{n,2}(1), n \geqq 1,$$

wird die Zahl aller möglichen Gruppierungen von n Elementen in Einer- und Zweiergruppen geliefert. Wir weisen hier darauf hin, dass die Zahl a_n nach dieser Interpretation beispielsweise die Anzahl der verschiedenen selbstreziproken Permutationen P von n Elementen widergibt. Mit Rückblick auf (7) können diese Zahlwerte als Funktionswerte der Hermiteschen Polynome dargestellt werden, und zwar gilt

(9) $$a_n = (i)^n H_n(i) \quad \left\{i = \sqrt{-1}\right\}.$$

Wir erwähnen noch die sich aus (4) ergebende Rücklaufformel

(10) $$a_{n+1} = a_n + n\, a_{n-1},\ n \geqq 1,\ a_0 = 1.$$

So ergeben sich die Zahlwerte

n	a_n
1	1
2	2
3	4
4	10
5	26
6	76
7	232
8	764
9	2620
10	9496

Ein weiterer entscheidender Schritt bei der Durchführung unserer analytischen Methode besteht darin, für die eingeführten Polynome (3) eine erzeugende Funktion zu ermitteln. Die grosse Bedeutung einer solchen erzeugenden Funktion ist offensichtlich. Als vollständiger Repräsentant des zu untersuchenden Zahlenschemas birgt sie alle seine Gesetze in ihren vielgestaltigen Formen und ist doch eine Einheit. Einmal gewonnen, wird sie einen geeigneten Ausgangspunkt für irgendwelche Untersuchungen sein, da sie als Funktion allen methodischen Zugriffen der Analysis zugänglich ist. Wir bilden die erzeugende Funktion

$$\Phi_\lambda(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{n,\lambda}(x) \frac{z^n}{n!}, \tag{11}$$

und es stellt sich nun die Frage, ob sich diese Funktion in elementar geschlossener Form darstellen lässt. Auf Grund der Rücklaufformel für die Koeffizientenpolynome (3) ergibt sich die (partielle) Differentialgleichung

$$\frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial z} - x\left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}\right)\Phi_\lambda = 0, \tag{12}$$

so dass sich mit Rücksicht auf die Anfangsbedingung

$$\Phi_\lambda(x, 0) = 1 \tag{13}$$

die erzeugende Funktion

$$\Phi_\lambda(x, z) = e^{x\left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^\lambda}{\lambda!}\right)} \tag{14}$$

als Lösung ergibt.

Als erstes Beispiel eines sich auf Grund der Kenntnis der erzeugenden Funktion (14) ergebenden Resultates erwähnen wir die Identität (7), welche aus

$$\Phi_2(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{-x}\right)^n H_n\left(\sqrt{-x}\right) \frac{z^n}{n!} \tag{15}$$

direkt abgelesen werden kann, einer Identität, welche sich durch Vergleich von (14) mit der Erzeugung

(16) $$e^{-xw-\frac{w^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{w^n}{n!}$$

der Hermiteschen Polynome leicht ergibt, wenn man x durch $\sqrt{-x}$ und w durch $\sqrt{-x}\,z$ ersetzt.

Im Folgenden treten wir eingehender auf den Spezialfall $\lambda = n$ ein. Da die Anzahl der Elemente in einer Gruppe trivialerweise nicht grösser als n ausfallen kann, ist die Nebenbedingung praktisch aufgehoben. Wir setzen dann etwas kürzer

(17) $$A_\nu^n = A_{\nu,n}^n$$

und übertragen die Rücklaufformel (2) in

(18) $$A_\nu^n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} A_{\nu-1}^{n-1-\nu}.$$

Für die zugeordneten Polynome

(19) $$T_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^n x^\nu,\; T_0(x) = 1,\, n \geqq 1$$

erhalten wir analog die formal beachtliche Rekursion

(20) $$T_{n+1}(x) = x \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} T_i(x),$$

welche zur schrittweisen Berechnung der Polynome herangezogen werden kann. Es ergibt sich

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = x,$$

$$T_2(x) = x^2 + x,$$

$$T_3(x) = x^3 + 3\,x^2 + x,$$

$$T_4(x) = x^4 + 6\,x^3 + 7\,x^2 + x,$$

$$T_5(x) = x^5 + 10\,x^4 + 25\,x^3 + 15\,x^2 + x,$$

$$T_6(x) = x^6 + 15\,x^5 + 65\,x^4 + 90\,x^3 + 31\,x^2 + x.$$

Besondere Bedeutung erhalten die Zahlwerte

$$(21) \qquad C_n = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^n = T_n(1), n \geqq 1,$$

welche die Gesamtzahlen der überhaupt möglichen Gruppierungen von n Elementen darstellen. Nach (18) genügen sie der Rekursion

$$(22) \qquad C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} C_i.$$

Es ergeben sich die Zahlwerte

n	c_n
1	1
2	2
3	5
4	15
5	52
6	203
7	877
8	4140
9	21147
10	115975

Die erzeugende Funktion der Polynome (19)

$$(23) \qquad \Phi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) \frac{z^n}{n!}$$

wird offenbar durch

$$(24) \qquad \Phi(x, z) = e^{x(e^z - 1)}$$

gegeben sein. Hierzu ist zu bemerken, dass die Nebenbedingung natürlich auch wegfällt, wenn wir statt $\lambda = n$ formal $\lambda = \infty$ setzen. Der zweite Ansatz liefert die gewünschte Spezialisierung simultan für alle $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ und ist offensichtlich notwendig für die Spezialisierung der erzeugenden Funktion.

Eine kleine durchsichtige Umrechnung bei der geläufigen Darstellung der Entwicklungskoeffizienten der Funktion (24) bei der

Reihenentwicklung nach Potenzen von z durch die höheren Ableitungen (im Nullpunkt) führt auf die Identität

$$e^x T_n(x) = (x D)^n e^x \qquad \left\{D = \frac{d}{dx}\right\} \tag{25}$$

wodurch ein Zusammenhang der Zahlen (17) mit der Entwicklung des Differentialoperators xD aufgedeckt wird. Die gewonnene Identität gestattet übrigens, zu einer expliziten Darstellung der Zahlen (17) vorzudringen. Wenn wir nämlich die Exponentialfunktion auf der rechten Seite in (25) als Potenzreihe anschreiben und dann den Differentialoperator gliedweise wirken lassen, so gewinnen wir zunächst die Darstellung

$$T_n(x) = e^{-x}\left\{x + 2^n \frac{x^2}{2!} + 3^n \frac{x^3}{3!} + 4^n \frac{x^4}{4!} + \ldots\right\} n \geqq 1. \tag{26}$$

Wenn wir nun auch hier die Exponentialfunktion als Reihe einsetzen und die Multiplikation durchführen, so liefert ein Vergleich der Koeffizienten gleicher Potenzen auf beiden Seiten die gewünschte Darstellung

$$A_\nu^n = \frac{1}{\nu!} \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i \binom{\nu}{i} (\nu - i)^n. \tag{27}$$

Aus (25) leitet man auf naheliegende Weise die Differentialrekursion

$$T_{n+1}(x) = x\left\{T_n'(x) + T_n(x)\right\} \tag{28}$$

ab, welche in Übertragung auf die Koeffizienten die weitere Rücklaufformel

$$A_\nu^{n+1} = A_\nu^n + A_{\nu-1}^n \tag{29}$$

ergibt, die sich offensichtlich auch kombinatorisch deuten lässt.

Die in derartigen Fällen geläufige Anwendung des Theorems von Rolle auf die Differentialrekursion (28) gestattet den Schluss, dass die Polynome $T_n(x)$ genau n verschiedene, reelle (negative) Nullstellen aufweisen.

Aus der Tatsache, dass die erzeugende Funktion (24) der Funktionalgleichung

(30) $$\Phi(x,z)\,\Phi(y,z) = \Phi(x+y,z)$$

genügt, leitet man noch die Gültigkeit des Additionstheorems

(31) $$T_n(x+y) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} T_{n-i}(x)\, T_i(y)$$

ab. Eine weitere Eigenschaft der Zahlen (17) ergibt sich dadurch, dass wir in (25) auf beiden Seiten die Exponentialfunktion durch ihre Potenzreihe ersetzen, links ausmultiplizieren und die Koeffizienten vergleichen. So erhalten wir zunächst

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu!\, A_\nu^n \binom{k}{\nu} = k^n,$$

und da diese Relation für alle k richtig ist, muss die Identität

(32) $$\sum_{\nu=0}^{n} \nu!\, A_\nu^n \binom{x}{\nu} = x^n$$

gelten.

Wir kehren zu dem mit (25) Ausdruck gegebenen Zusammenhang mit dem Differentialoperator (xD) zurück. Wir können das Wesentliche dieser Formel von der dort in Erscheinung tretenden Exponentialfunktion loslösen. In der Tat gilt nämlich

(33) $$(xD)^n = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^n x^\nu D^\nu,$$

oder mit symbolischer Schreibweise

(34) $$(xD)^n = T_n(xD).$$

Um dies zu zeigen genügt es, z. B. induktiv festzustellen, dass die geschriebene Potenz des Differentialoperators xD eine Darstellung der angegebenen Form mit noch nicht weiter bestimmten Koeffizienten gestattet. Die Gegenüberstellung mit der speziellen Differentiationsformel (25) liefert dann die zu beweisende Identität (33).