Note sur le calcul du cours des emprunts à amortissements partiels différés

Note sur le calcul du cours des emprunts à amortissements partiels différés.

Par *E. Dasen*, Bâle.

Les deux derniers emprunts à long terme émis par la Confédération ont été du type des emprunts à amortissements partiels différés. Les clauses d'émission de ces emprunts prévoyaient en effet qu'après une période sans amortissements, le 50 % du montant nominal de chaque emprunt serait amorti par le système de l'annuité constante.

Comme il n'existe pas de tables financières de cours et de rendement pour les emprunts de cette catégorie, il nous a semblé intéressant d'exposer un procédé de calcul permettant d'utiliser pour le calcul du cours et du rendement de ces emprunts les tables financières de cours et de rendement qui ont été établies pour les emprunts remboursables à échéance fixe et pour ceux remboursables par le système de l'annuité constante.

Rappelons que si on désigne par:

i_0 = le taux d'intérêt nominal d'un emprunt de fr. 1,

i = le taux effectif ou de rendement dudit emprunt,

$K^{(2)}_{\overline{s|}}$ = le cours d'un emprunt de fr. 1 à échéance fixe remboursable dans s années, dont le taux d'intérêt nominal est i_0, le taux de rendement est i et les coupons sont semestriels,

$K^{(2)}_s$ = le cours d'un emprunt de fr. 1 remboursable annuellement en s années suivant le système de l'annuité constante, dont le taux d'intérêt nominal est i_0, le taux de rendement est i et les coupons sont semestriels,

on aura:

$$K^{(2)}_{\overline{s|}} = i_0 (1 + \varepsilon)\, a_{\overline{s|}} + v^s \tag{1}$$

$$K^{(2)}_s = \left[1 + \frac{i_0\, \varepsilon}{i_0 - i}\right] \frac{a_{\overline{s|}}}{a^0_{\overline{s|}}} - \frac{i_0\, \varepsilon}{i_0 - i} \tag{2}$$

avec $$a^0_{\overline{s}|} = \sum_{k=1}^{k=s} (1+i_0)^{-k} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+i}-1\right).$$

Les nombres $K^{(2)}_{\overline{s}|}$ et $K^{(2)}_s$ se trouvent déjà calculés dans les tables financières de cours et de rendement en usage: la table «Bond Values» de *Huss et Hagström* par exemple.

Le problème que nous nous proposons de résoudre maintenant est le suivant:

Problème: Quel est le cours ${}_{m|}K^{(2)}_n$ d'un emprunt de 1 dont $p\,\%$ seront amortis annuellement en n années par le système de l'annuité constante, le premier amortissement ayant lieu à la fin de la $(m+1)^e$ année? Le taux d'intérêt nominal est i_0, le taux de rendement i et les coupons sont semestriels.

Les principes actuariels de la technique des emprunts à long terme nous permettent d'écrire immédiatement:

$$(3) \qquad {}_{m|}K^{(2)}_n = i_0 (1+\varepsilon)\, a_{\overline{m}|} + v^m \left[(1-p) K^{(2)}_{\overline{n}|} + p\, K^{(2)}_n\right].$$

Le calcul de cette formule nécessite l'utilisation non seulement d'une table financière de cours et de rendement, mais aussi d'une table d'intérêts composés. Nous allons montrer maintenant comment on peut transformer le membre de droite de la formule (3) de manière à éviter l'utilisation d'une table d'intérêts composés.

Ecrivons le membre de droite de l'équation (3) sous la forme suivante:

$$(4) \quad {}_{m|}K^{(2)}_n = \left[\frac{i_0}{(1-p) K^{(2)}_{\overline{n}|} + p\, K^{(2)}_n}(1+\varepsilon)\, a_{\overline{m}|} + v^m\right]\left[(1-p) K^{(2)}_{\overline{n}|} + p\, K^{(2)}_n\right]$$

On remarquera maintenant que la première parenthèse n'est pas autre chose que la formule d'un emprunt à échéance fixe remboursable dans m années et dont le taux d'intérêt nominal est:

$$(5) \qquad j_0 = \frac{i_0}{(1-p) K^{(2)}_{\overline{n}|} + p\, K^{(2)}_n}\,.$$

Nous pouvons donc écrire (3) sous la forme suivante:

$$(6) \qquad \boxed{{}_{m|}K^{(2)}_n = K^{(2)}_{\overline{m}|}{}_{(j_0)}\left[(1-p) K^{(2)}_{\overline{n}|} + p\, K^{(2)}_n\right]}$$

Etant donné que $K_{\overline{m|}}^{(2)}{}_{(j_0)}$ peut se calculer par interpolation linéaire par rapport au taux d'intérêt nominal, la formule (6) résoud donc la question que nous nous étions posée, c'est-à-dire qu'il est possible de déterminer le cours, et partant le taux de rendement, d'un emprunt à amortissements partiels différés en utilisant uniquement une table financière de cours et de rendement.

Afin de montrer comment il convient de conduire les calculs, nous allons faire une application numérique.

Application numérique: L'emprunt $3\frac{1}{2}$ % de 1943 de la Confédération est amortissable à raison de 50 % en 15 ans dès la 11e année par le système de l'annuité constante. Dans le tableau suivant, dernière colonne, nous avons déterminé pour un certain nombre de taux de rendement brut le cours de cet emprunt au 15 avril 1943.

$$m = 10 \qquad n = 15 \qquad p = 0.5$$

i (1)	$0.5\left[K_{\overline{15|}}^{(2)} + K_{\overline{15|}}^{(2)}\right]$ (2)	$j_0 = \dfrac{0.035}{0.5\,K\left[_{\overline{15|}}^{(2)} + K_{\overline{15|}}^{(2)}\right]}$ (3)	$K_{\overline{10|}}^{(2)}{}_{(j_0)}$ (4)	${}_{10|}K_{15}^{(2)}$ (5)
%	%	%	%	%
3.0	103.275	3.389	103.54	106.93
3.1	102.075	3.429	103.01	105.15
3.2	100.895	3.469	102.51	103.43
3.3	99.725	3.510	102.00	101.72
3.4	98.575	3.551	101.51	100.06
3.5	97.445	3.592	101.02	98.44

Les nombres K nécessaires au calcul des colonnes (2) et (3) se trouvent directement dans la table de *Huss et Hagström*. Les nombres K de la (4)e colonne s'obtiennent par interpolation linéaire par rapport au taux d'intérêt nominal également à l'aide de la table précitée.

On voit en définitive que l'utilisation de la formule (6) permet d'obtenir rapidement le cours d'un emprunt à amortissements partiels différés.

Mentionnons encore qu'au cas où les coupons d'intérêt sont frappés d'un impôt α %, la formule (6) devient

$$(7) \qquad {}_{m|}\overline{K}_n^{(2)} = \overline{K}^{(2)}_{(t_0)\,\overline{m|}} \left[(1-p)\,\overline{K}^{(2)}_{(u_0)\,\overline{n|}} + p\,\overline{K}_n^{(2)}\right]$$

où

$\overline{K}^{(2)}_{(t_0)\,\overline{m|}}$ se calcule par interpolation linéaire par rapport au taux d'intérêt nominal, t_0 étant égal à $j_0\,(1-\alpha)$,

$\overline{K}^{(2)}_{(u_0)\,\overline{n|}}$ se calcule également par interpolation linéaire par rapport au taux d'intérêt nominal, u_0 étant égal à $i_0\,(1-\alpha)$,

$\overline{K}_n^{(2)}$ se calcule par la formule

$$\overline{K}_n^{(2)} = (1 - 100\,\alpha\,i_0\,B)\,K_n^{(2)} + 100\,\alpha\,i_0\,B,$$

les nombres B et $K_n^{(2)}$ se trouvant directement dans la table de *Huss et Hagström.*