Beitrag zur Konstruktion einer Sterbetafel bei kleinen Beständen

Autor(en): **Picard, Robert**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **43 (1943)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-551015

Beitrag zur Konstruktion einer Sterbetafel bei kleinen Beständen.

Von *Robert Picard,* Genf.

Die Konstruktion einer Sterbetafel setzt theoretisch eine grosse Zahl von Beobachtungen voraus. Wie gross diese Zahl sein muss, oder umgekehrt, mit wie wenig Beobachtungen man noch auskommen kann, ist eine Frage, die nur sehr schwer zu beantworten sein dürfte.

In der vorliegenden Arbeit wird der Versuch unternommen, aus einer relativ kleinen Zahl von Beobachtungen eine Sterbetafel zu gewinnen.

Es ist klar, dass das Gelingen oder Misslingen dieses Versuches wesentlich vom Ausgleichsverfahren abhängt. Der «Angleichung», wie wir das hier benützte Verfahren nennen wollen, liegt ein einfacher Gedanke zugrunde, der andernorts auch schon zur Anwendung gekommen sein dürfte, wenn auch in der Literatur darüber keine Anhaltspunkte gefunden wurden.

Es bezeichne

$\Sigma\, B_x$ der unter einjährigem Risiko stehende Bestand,

$\Sigma\, T_x$ die innerhalb der Beobachtungsperiode beobachteten Todesfälle.

Gegeben sei eine Sterbetafel I (Hilfstafel) durch ihre einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x^I. Die rechnungsmässige Sterblichkeit des Bestandes $\Sigma\, B_x$, gemessen an der Tafel I, beträgt $\Sigma\, Q_x$, wobei gesetzt wird:

$$Q_x = B_x q_x^I. \tag{1}$$

Unsere Absicht geht dahin, von I zu einer Tafel II mit den Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x^{II} überzugehen, so dass $\Sigma\, B_x\, q_x^{II}$ sich möglichst gut der beobachteten Sterblichkeit $\Sigma\, T_x$ anpasst.

Zu diesem Zwecke setzen wir

$$q_x^{II} = \alpha + \beta\, q_x^I. \tag{2}$$

Darin sind α und β Konstanten, die wir nach der Methode der kleinsten Quadratsumme derart bestimmen, dass der Ausdruck

$$(3)\qquad \Sigma\left[B_x\cdot(\alpha+\beta q_x^I)-T_x\right]^2=\Sigma\left[\alpha B_x+\beta Q_x-T_x\right]^2$$

ein Minimum wird.

Auf Grund dieser Minimumsbedingung folgt, dass die partiellen Ableitungen nach α und β gleich 0 sein müssen. Wir erhalten auf diese Weise die zwei folgenden Gleichungen, aus denen α und β berechnet werden können:

$$(4)\qquad \begin{aligned}\alpha\,\Sigma B_x^2+\beta\,\Sigma B_x Q_x&=\Sigma B_x T_x,\\ \alpha\,\Sigma B_x Q_x+\beta\,\Sigma Q_x^2&=\Sigma Q_x T_x.\end{aligned}$$

Damit sind die Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x^{II} eindeutig bestimmt.

Die Annahme, die der Gleichung (2) zugrunde liegt, dass nämlich zwischen q^I und q^{II} eine lineare Beziehung bestehe, lässt sich folgendermassen begründen:

Wenn die Tafel I dem Gompertz-Makehamschen Gesetz folgt, das heisst, wenn die Sterbeintensitäten μ_x^I in der Form

$$(5)\qquad \mu_x^I=a+bc^x\quad (a,b,c=\text{const.})$$

dargestellt werden können, wenn ferner, nicht zwischen den Sterbenswahrscheinlichkeiten, jedoch zwischen den Sterbeintensitäten die Beziehung (2) besteht, d. h. wenn

$$(6)\qquad \mu_x^{II}=\alpha+\beta\mu_x^I,$$

dann ist

$$(7)\qquad \mu_x^{II}=(\alpha+\beta a)+\beta bc^x.$$

Wir schliessen daraus, dass mit I auch II dem Gompertz-Makehamschen Gesetz folgt. Nun kann bekanntlich jede Sterbetafel, von den jugendlichen Altern abgesehen, mit mehr oder minder grosser Annäherung durch eine Gompertz-Makehamsche Formel ausgedrückt werden. Wir haben zwar zur Ermittlung der gesuchten Tafel angenommen, dass die lineare Beziehung (2) zwischen den Sterbewahrscheinlichkeiten q_x bestehe, aber der Unterschied zwischen q_x und den Sterbeintensitäten μ_x ist nicht bedeutend.

Der Umstand, dass die Konstante c in beiden Tafeln identisch wird, bedeutet keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit.

Schon S. Dumas [1]) hat darauf hingewiesen, dass diese Grösse bei den verschiedenen Tafeln nicht sehr voneinander abweicht und dass zudem ihre Variation innerhalb der praktisch vorkommenden Grenzen den Tafelverlauf nicht wesentlich beeinflusst.

Wenn auch für die der Gleichung (2) zugrunde liegende Hypothese gute Gründe sprechen, so soll damit nicht gesagt sein, dass nicht auch andere Beziehungen, wie z. B. die folgende, denkbar sind:

$$q_x^{II} = \alpha + \beta\, q_x^{I} + \gamma\, (q_x^{I})^2. \tag{8}$$

Die Stärke, aber auch die Schwäche der Methode der Angleichung liegt darin, dass eine passende Hilfstafel herangezogen werden muss. Dies ist bei den gebräuchlichen Ausgleichsverfahren nicht der Fall; da ist jede Tafel gewissermassen eine Neuschöpfung, unabhängig von frühern Erfahrungen. Anders die Methode der Angleichung; sie lehnt sich bewusst an eine andere Tafel an. Dies hat zur Folge, dass charakteristische Schwankungen der Hilfstafel auf die neue Tafel übertragen werden, während umgekehrt Eigenheiten, die das Beobachtungsmaterial vielleicht aufweist, gar nicht in Erscheinung treten können. Diesen Nachteilen, die übrigens jedem analytischen Ausgleichsverfahren auch anhaften, wird man aber bei einem kleinen Beobachtungsmaterial kein Gewicht beilegen dürfen.

Die Methode der Angleichung erhebt gewiss nicht Anspruch darauf, mit den klassischen Ausgleichsverfahren in Wettbewerb treten zu wollen; ihr Vorteil liegt auf praktischem Gebiet. Sie führt auch bei kleinen Beständen ohne umständliche Rechenarbeit zu einem brauchbaren Resultat. Sieht man mit Loewy [2]) die Aufgabe der Ausgleichung darin, «die beobachtete Zahlenreihe durch eine andere zu ersetzen, die sich dem Beobachtungsmaterial möglichst eng anschmiegt und einen regelmässigen Verlauf aufweist», dann erfüllt auch die Methode der Angleichung diese Aufgabe.

Die Güte der Angleichung hängt selbstverständlich von der verwendeten Hilfstafel ab; zweckmässigerweise wird man dafür eine solche wählen, von der von vornherein feststeht, dass ihre Sterblichkeit derjenigen der beobachteten nahe kommt. Ist eine geeignete Hilfstafel nicht zur Hand, so kann man sich eine solche durch ein rohes graphisches Verfahren unschwer verschaffen.

---

[1]) S. Dumas: Le contrôle de la mortalité, Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker. 21. Heft, Juni 1926, S. 91.

[2]) Manes, Versicherungslexikon, 3. Auflage, S. 217.

Die Methode ist auch anwendbar, wenn der unter Risiko stehende Bestand nicht, wie üblich, aus Personen oder Policen, sondern aus Risikokapital gebildet wird. Als Zähleinheit figuriert dann Fr. 1 Risikokapital, und die beobachtete Sterblichkeit ist auf Grund der effektiven Schadenszahlungen zu bestimmen. Der Wert einer solchen, direkt auf dem finanziellen Ergebnis ruhenden Tafel ist augenscheinlich. Auf die Möglichkeit, eine Sterbetafel mit Hilfe des Risikokapitals zu ermitteln, haben P. Meyer[1]) und im Anschluss daran A. Berger[2]) hingewiesen.

Nachfolgend geben wir noch das Ergebnis einer praktischen Auswertung der Methode der Angleichung bekannt. Zur Verfügung standen die Sterblichkeitserfahrungen aus den Jahren 1936—1942 der Helvetia-Leben, Lebensversicherungsgesellschaft in Genf, an ihrem Bestand an Einzelkapitalversicherungen. Der Direktion dieser Gesellschaft spreche ich für die bereitwillig erteilte Erlaubnis, dieses Material veröffentlichen zu dürfen, meinen verbindlichsten Dank aus.

Die Berechnungen wurden auf Grund folgender Festsetzungen durchgeführt:

Als Zähleinheit diente die Police, als Beobachtungsjahr das Kalenderjahr. Die Beobachtungsperiode erstreckte sich vom 1. Januar 1936 bis 31. Dezember 1942. Erfasst wurde der Bestand an Einzelkapitalversicherungen auf den Tod (Grossleben, Schweizerportefeuille), ohne die Versicherungen auf mehrere Leben. Von dieser Ausnahme abgesehen, umfasst die Untersuchung sämtliche jeweils am 31. Dezember in den Reserveregistern aufgeführten Policen. Die Altersbestimmung erfolgte in der üblichen Weise, auf- oder abgerundet auf ganze Jahre.

Es sei

(9)

B_x^{1935} = die Anzahl der Policen der 1935 x-Jährigen am 31. Dezember 1935,

B_x^{1936} = die Anzahl der Policen der 1936 x-Jährigen am 31. Dezember 1936

. . . usw.

---

[1]) P. Meyer: Ein Beitrag zum Dividendenproblem in der Lebensversicherung. Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft. Heft XX, Berlin 1911, S. 61.

[2]) A. Berger: Die Prinzipien der Lebensversicherungstechnik, Berlin 1923, I. Teil, S. 135.

Unter der Voraussetzung, dass alle Mutationen in der Jahresmitte stattfinden, ergibt sich für 1936 der unter Risiko stehende Bestand x-Jähriger als

$$(10) \qquad \frac{1}{2}\left(B_x^{1935} + B_x^{1936}\right).$$

Für die Beobachtungsperiode vom 1. Januar 1936 bis 31. Dezember 1942 setzt sich der unter einjährigem Risiko stehende Bestand B_x x-Jähriger wie folgt zusammen:

$$(11) \qquad B_x = \frac{1}{2} B_x^{1935} + \left(B_x^{1935} + \ldots\ldots + B_x^{1941}\right) + \frac{1}{2} B_x^{1942}.$$

Diesem Bestand x-Jähriger steht folgende beobachtete Sterblichkeit T_x gegenüber:

$$(12) \qquad T_x = T_x^{1936} + T_x^{1937} + \ldots\ldots + T_x^{1942}.$$

Für die Angleichung wurden nur die Alter von 10—64 Jahren herangezogen. Dies ergibt ein Total von 100840 Zähleinheiten, d. h. rund $^1/_7$ des Bestandes, welcher für RAH 1930—1940 zur Verfügung stand.

Als Hilfstafel wurde die Tafel A 1924—1929 (Schlusstafel) [1]) gewählt. Es wurden auch Versuche mit andern Tafeln unternommen, insbesondere mit RAH 1930—1940 [2]). Während für die mittleren Alter von 20—50 Jahren die Schlusstafel A 1924—1929 sich nur unwesentlich von RAH 1930—1940 unterscheidet, weist die letztere gegenüber der ersteren in den jungen Altern relativ niedrige, in den hohen Altern dagegen relativ hohe Sterblichkeitssätze auf. Da sich der beobachtete Bestand gegen die Tafelenden zu besser an A 1924—1929 als an RAH 1930—1940 anpasst, wurde die erstere als Hilfstafel herangezogen.

Auf Grund dieser Festsetzungen wurde folgende lineare Beziehung ermittelt:

$$(13) \qquad q_x^{II} = -0{,}000964 + 1{,}113\, q_x^{I}.$$

[1]) Continuous investigation into the mortality of assured lives. Monetary Tables A 1924—1929, Vol. I. Cambridge 1934.

[2]) H. Wyss: Betrachtungen über die Sterblichkeit bei Einzelkapitalversicherungen der Schweizerischen Lebensversicherungs- und Rentenanstalt, Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker, 42. Bd., Heft 2, 1942, S. 309.

Es sei erwähnt, dass man mit RAH 1930—1940 als Hilfstafel zu folgender Gleichung geführt wird:

$$q_x^{II} = -0{,}000225 + 0{,}963\, q_x^{I}. \tag{14}$$

Die folgende Gegenüberstellung zeigt den Grad der Übereinstimmung zwischen der effektiven und der rechnungsmässigen Sterblichkeit:

Altersgruppe	Policen unter einjährigem Risiko	Beobachtete Sterblichkeit	Rechnungsmässige Sterblichkeit
10—14	3 938.5	6	3.9
15—19	4 570.5	6	6.9
20—24	8 104.5	12	13.4
25—29	14 532.5	24	24.1
30—34	18 947.–	38	35.6
35—39	18 832.5	45	49.2
40—44	14 878.5	57	58.0
45—49	9 542.–	57	54.4
50—54	4 793.–	52	42.9
55—59	2 036.5	25	30.1
60—64	664.5	13	16.3
10—64	100 840.–	335	334.8

Im nachfolgenden geben wir noch eine detaillierte Aufstellung des Bestandes der beobachteten Sterblichkeit und der angeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeiten bekannt:

Sterblichkeitserfahrungen 1936—1942 der Helvetia-Leben.

Alter	Policen unter einjährigem Risiko	Beobachtete Sterblichkeit	Angeglichene Sterbenswahrscheinlichkeit in ‰	Alter
x	B_x	T_x	$1000\, q_x$	x
10	805.5	–	0.77	10
11	786.–	2	0.88	11
12	770.–	1	0.99	12
13	776.5	2	1.11	13
14	800.5	1	1.22	14
15	832.–	1	1.33	15
16	866.–	2	1.44	16
17	907.5	3	1.54	17
18	956.–	–	1.61	18
19	1009.–	–	1.64	19
20	1129.–	4	1.65	20
21	1352.5	1	1.65	21
22	1618.5	1	1.65	22
23	1851.5	1	1.65	23
24	2153.–	5	1.65	24
25	2390.5	5	1.65	25
26	2635.–	1	1.65	26
27	2905.–	3	1.65	27
28	3169.–	9	1.66	28
29	3433.–	6	1.68	29
30	3602.5	11	1.72	30
31	3733.5	5	1.77	31
32	3818.5	11	1.85	32
33	3885.5	6	1.95	33
34	3907.–	5	2.07	34
35	3961.–	7	2.22	35
36	3910.–	14	2.40	36
37	3781.–	10	2.60	37
38	3665.–	8	2.83	38
39	3515.5	6	3.09	39
40	3374.–	15	3.35	40
Übertrag	72299.5	146		

Alter	Policen unter einjährigem Risiko	Beobachtete Sterblichkeit	Angeglichene Sterbenswahrscheinlichkeit in ‰	Alter
x	B_x	T_x	$1000\, q_x$	x
Übertrag	72299.5	146		
41	3154.–	14	3.63	41
42	2951.–	8	3.92	42
43	2784.–	8	4.22	43
44	2615.5	12	4.55	44
45	2387.–	11	4.90	45
46	2142.–	10	5.30	46
47	1901.5	14	5.76	47
48	1666.5	5	6.28	48
49	1445.–	17	6.87	49
50	1260.–	12	7.54	50
51	1093.–	9	8.29	51
52	957.–	8	9.12	52
53	806.–	15	10.05	53
54	677.–	8	11.10	54
55	580.–	3	12.28	55
56	472.–	9	13.63	56
57	390.5	5	15.17	57
58	324.–	5	16.93	58
59	270.–	3	18.88	59
60	211.–	3	21.—	60
61	163.–	4	23.25	61
62	122.5	3	25.68	62
63	96.5	–	28.32	63
64	71.5	3	31.24	64
	100840.–	335		