Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 45 (1945)

Artikel: Über die Laplace-Transformation und ihre Anwendungen

Autor: Saxer, Walter

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-554980

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

B. Wissenschaftliche Mitteilungen

Über die Laplace-Transformation und ihre Anwendungen

Von *Walter Saxer,* Zürich

Wenn man die verschiedenen Darstellungen der Geschichte der exakten Wissenschaften durchblättert, konstatiert man mit Leichtigkeit die völlige Übereinstimmung der Geschichtsschreiber darin, dass mit der Entdeckung der Differential- und Integralrechnung oder — ich möchte allgemeiner sagen — der Analysis, das eigentliche Zeitalter der modernen Wissenschaft angebrochen ist. Die Geschichtsschreiber stimmen darin überein, dass damit eine neue Form des wissenschaftlichen Denkens geschaffen wurde. Worin besteht denn im wesentlichen diese neue Art der Wissenschaft, verglichen mit den Methoden des Mittelalters und der Griechen? Durch die Einführung des Differentialquotienten und der damit im Zusammenhang stehenden unendlich kleinen Grössen und den Integralen, die ja Summen mit sehr vielen sehr kleinen Summanden darstellen, ist es gelungen, den ewigen Prozess des Werdens und Vergehens in der Natur mathematisch zu beschreiben. Die Darstellung irgendeines physikalischen, chemischen oder biologischen Vorganges durch eine Differentialgleichung und ihre Integration bedeutet ja gar nichts anderes, als dass vom Vorgange eine Art Momentaufnahme gemacht wurde. Die Differentialgleichung liefert uns das mathematische Bild dieser Momentaufnahme; sie zeigt die Beziehungen zwischen den den Vorgang beherrschenden Grössen und Funktionen. Diese Integration der Differentialgleichung bedeutet den Schluss in die Zukunft, sie liefert Aussagen über das zukünftige Werden, das sich aus der Anfangssituation entwickelt. Die Differentialgleichung eines Vorganges formuliert in möglichst konzentrierter Form ein Determinationsprinzip, und ihre Integration be-

schreibt ausführlich die Konsequenzen, die sich aus diesem Determinationsprinzip ergeben.

Beispiele für diese Behauptung lassen sich heute beliebig viele geben. Sehr instruktiv sind in dieser Beziehung immer noch die Vorgänge in der Astronomie und der Mechanik, die ja auch Newton zu seinen fundamentalen Entdeckungen geführt haben. Wenn beispielsweise ein neuer Planet entdeckt wird, so genügen wenige Messungen über seine Lage, um aus dieser Anfangskonfiguration seine zukünftige Bahn für ewig rechnen zu können. Denn die Differentialgleichung der Bahnen der Planeten ist bekannt und kann integriert werden. Sie sehen hier in besonders anschaulicher Weise, wie aus einer momentanen Situation in die Zukunft hinaus integriert wird.

Es ist Ihnen allen bekannt, dass es sehr häufig möglich ist, für Vorgänge wohl ihre Differential- oder Integralgleichung aufzustellen, dass aber ihre Lösung, ihre Integration, nicht gelingt. Damit können aber gerade jene Schlüsse, die uns interessieren, nämlich das Verhalten gewisser Funktionen in der Zukunft, nicht gezogen werden. Es ist deshalb wohl verständlich, dass die Mathematiker, Physiker, Ingenieure usw. seit der Entdeckung der Analysis grosse Anstrengungen unternahmen, möglichst viele Differential- und Integralgleichungen zu lösen. Tatsächlich bildet das Gebiet dieser Art Funktionalbeziehungen heute einen wesentlichen und grossen Teil der gesamten Analysis.

Bei der Lösung von Differentialgleichungen hat man sich zum Teil von algebraischen Gesichtspunkten leiten lassen. Bekanntlich ist die Algebra älter — es gehörte stets zu den fundamentalen Aufgaben der Algebra, Gleichungen zu lösen. Bei gewissen Klassen von Differentialgleichungen (ich denke hier vor allem an die linearen) ergaben sich bemerkenswerte Analogien zwischen der Lösung von Differentialgleichungen und gewöhnlichen Gleichungen. Deshalb ist es wohl verständlich, dass man versuchte, die Lösung von Differential- und Integralgleichungen zu algebraisieren, d. h. auf die Lösung gewöhnlicher algebraischer Gleichungen zurückzuführen.

In den letzten 40 Jahren sind in dieser Hinsicht bemerkenswerte Fortschritte erreicht worden dank enger Zusammenarbeit zwischen Mathematikern und Technikern. Vor allem hat sich eine schon von Laplace angewendete Transformation als überaus kräftig zur Lösung

gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen sowie von Integralgleichungen erwiesen. Wenn Sie die letzten 20 Jahrgänge unserer Mitteilungen durchgehen, werden Sie feststellen, dass eine Reihe von Arbeiten dem *Erneuerungsproblem* gewidmet sind. Bekanntlich hat der von uns allen verehrte und unvergessene Prof. Moser in Bern in der Jubiläumssitzung des Jahres 1925 in einem schönen Vortrag darauf hingewiesen, dass die ganze Frage der Erneuerung letzten Endes auf die Lösung und Diskussion gewisser Volterrascher Integralgleichungen hinausläuft. Mehrere Arbeiten der letzten Jahrgänge unserer Mitteilungen befassen sich mit der Lösung solcher Integralgleichungen — ich nenne als Verfasser die Herren Hadwiger, Féraud, Tarjan und Zwinggi. Die ersten drei Autoren benutzen u. a. die Laplace-Transformation. Daraus ersehen Sie zunächst, dass diese Ihrem engeren Arbeitsgebiete ebenfalls nahe liegt. Die neueren funktionentheoretischen Untersuchungen der letzten Jahre haben aber ganz allgemein gezeigt, dass die Laplace-Transformation ein sehr mächtiges Instrument überhaupt in der Analysis darstellt. Ich erinnere beispielsweise an ihre Anwendung in der analytischen Zahlentheorie, im Gebiet der ganzen Funktionen usw. Aus allen diesen Gründen hat mich der Vorstand unserer Vereinigung damit beauftragt, Ihnen in einer Vorlesung das Wesen der Laplace-Transformation auseinanderzusetzen.

Unsere Tagungen haben sich ja in den letzten Jahren mehr mit der Diskussion von — ich möchte beinahe sagen — Tagesfragen, wenn auch sehr wichtigen, befasst. Darob wollen wir aber das Hauptziel unserer Vereinigung, die Pflege unserer wichtigsten Invarianten — nämlich die Erkenntnisse der Mathematik — nicht vergessen.

Bei solchen mathematischen Vorträgen kommt es ja immer wieder vor, dass man diese oder jene Einzelheit in der Eile nicht ver-versteht. Das halte ich keineswegs für tragisch. Solche Vorträge sollten Sie vor allem ermuntern, sich in der eigenen Studierstube noch viel intensiver mit dem im Vortrag behandelten Gegenstand zu befassen und die entsprechende Literatur zu studieren. Als Standard-Lehrbuch nenne ich Ihnen

Doetsch: Theorie und Anwendungen der Laplace-Transformation, Verlag Springer, Berlin 1937.

I.

Definitionen und Sätze

Die folgenden Definitionen und Sätze wollen das Wesentliche möglichst einfach und anschaulich beschreiben. Deshalb verzichten wir mit Absicht auf möglichste Allgemeinheit.

Definition: $F(t)$ sei eine für $t \geqq 0$ definierte reelle stetige Funktion. Unter ihrer Laplaceschen Transformierten verstehen wir das folgende Integral

$$L[F(t)] = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$$

s sei im folgenden im allgemeinen eine reelle Zahl.

Selbstverständlich braucht dieses Integral lange nicht für alle Funktionen definiert zu sein. Wenn jedoch das Integral einen endlichen Wert besitzt, dann bezeichnen wir $F(t)$ als die *Objektfunktion oder Originalfunktion* und $f(s)$ die *Resultat- oder Bildfunktion.* $F(t)$ ist in diesem Fall eine sogenannte L-Funktion, d. h. eine Funktion, auf welche die L-Transformation tatsächlich angewendet werden kann.

Dem Objektraum wird der Bildraum zugeordnet. Es wäre natürlich wichtig, die Funktionen $F(t)$ funktionentheoretisch so beschreiben zu können, dass man auf Grund möglichst einfacher Kriterien entscheiden könnte, ob es sich um eine L-Funktion handle oder nicht. Diese Frage ist nicht einfach zu behandeln und vorläufig auch noch nicht endgültig abgeklärt. Beispielsweise lässt sich auf alle beschränkten Funktionen die L-Transformation anwenden.

Beispiele: $$L(1) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1 \cdot dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s} \quad \text{(definiert für } s > 0)$$

$$L(t^n) = \int_0^\infty e^{-st}\, t^n\, dt = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (n \text{ positive ganze Zahl})$$

$$L(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-st}\, e^{at}\, dt = \left.\frac{e^{t(a-s)}}{a-s}\right|_0^\infty = \frac{1}{s-a}\ (s > a)\,.$$

Für die Anwendungen ist es wertvoll, eine möglichst grosse Tabelle solcher Laplace-Integrale zu besitzen. Solche Tabellen befinden sich in den entsprechenden Lehrbüchern.

Ein-Eindeutigkeit der Abbildung: Es ist klar, dass infolge der vorigen Definition der Funktion $F(t)$ eindeutig eine bestimmte Funktion $f(s)$ entspricht. Kann man auch das Umgekehrte behaupten? Entspricht der Bildfunktion $f(s)$ eindeutig eine ganz bestimmte Originalfunktion? Mittelst des *Fourierschen Integraltheorems* kann man beweisen, dass dies der Fall ist, solange wir uns lediglich mit stetigen Funktionen befassen, was ja bei den Anwendungen für die Technik in der Regel der Fall ist. Aus diesen Gründen kann man die vorige Funktionentabelle wie ein einfaches Wörterbuch benutzen. In jeder Horizontalen stehen genau zwei Funktionen, Original und Bild, die ein-eindeutig zusammengehören.

Die Umkehrungsformel lautet:

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt \quad f(s) \text{ konvergiere für } s > \alpha \text{ absolut.}$$

Dann gilt die Umkehrformel

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} f(s)\, ds \quad s = x + iy.$$

Eigenschaften der L-Transformation

1. Additionssatz:

$$L[a_1 F_1(t) + a_2 F_2(t) + \ldots + a_n F_n(t)] = a_1 L[F_1(t)] + \ldots + a_n L[F_n(t)]$$

$a_1, a_2, \ldots a_n$ bedeuten Konstante. Der Beweis ergibt sich aus fundamentalen Eigenschaften des Integralbegriffes. Dieser Satz kann nicht ohne weiteres auf unendliche Summen übertragen werden.

2. Dämpfungssatz:

$$L(F(t)\, e^{\pm at}) = \int_0^\infty e^{(-s \pm a)t} F(t)\, dt = f(s \mp a).$$

Die Dämpfung der im Originalraum mit e^{-at} multiplizierten Funktion $F(t)$ wirkt sich im Bildraum lediglich durch eine Translation aus.

3. Differentiationssatz:

$$L(F'(t)) = s\,L(F(t)) - F(o) = s f(s) - F(o)\,.$$

Beweis: Gemäss partieller Integration erfolgt:

$$\int_0^\infty F'(t)\,e^{-st}\,dt = F(t)\,e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty (F(t)\,e^{-st}\,dt\,.$$

Da $\int_0^\infty e^{-st}\,F(t)\,dt$ nach Voraussetzung existieren soll, wird $\lim\limits_{t\to\infty} F(t)\,e^{-st}$ als 0 angenommen.

Die obige Formel ist für die Anwendungen der Laplaceschen Transformation im Gebiete der Differentialgleichungen sehr wichtig. Denn sie zeigt, dass die Differentiation im Originalraum sich im Bildraum lediglich in der Multiplikation der Bildfunktionen mit der Variablen s auswirkt. Die transzendente Operation des Differenzierens ist durch die algebraische Operation des Multiplizierens abgelöst worden und dieser Umstand ermöglicht die Algebraisierung der Differentialgleichungen. Vorerst wollen wir aber die vorige Formel auf Ableitungen höherer Ordnung verallgemeinern.

Man erhält:

$$L(F''(t)) = s\,L[F'(t)] - F'(o) = s^2\,L[F(t)] - s\,F(o) - F'(o)\,.$$

Bevor wir in der Zusammenstellung der Sätze weitergehen, wollen wir schon an dieser Stelle zeigen, wie man lineare, inhomogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten durch Anwendung der Laplaceschen Operation algebraisiert und damit löst. Das Lösungsschema entspricht dem Vorgehen in der darstellenden Geometrie: man transformiert das Problem in den Bildraum, löst das transformierte Problem und transformiert zurück.

Beispiel: Man löse die Differentialgleichung:

$$F''(t) - 2\,F'(t) + F(t) = \sin\,(3\,t)$$

unter den Anfangsbedingungen $F(o) = F'(o) = 0\,.$

Lösung: $L[F''(t) - 2F'(t) + F(t)] = L[\sin(3t)]$

$$L[F''(t)] - 2L[F'(t)] + L[F(t)] = \frac{3}{s^2+9}$$

$$s^2 L[F(t)] - 2s L[F(t)] + L[F(t)] = \frac{3}{s^2+9}$$

$$L[F(t)] = \frac{3}{(s^2+9)(s^2-2s+1)}.$$

Die Bildfunktion wird gefunden nach der Methode der Partialbruchzerlegung. Wenn unser Wörterbuch vollständig ist, können wir die Originalfunktion sofort aufschlagen. Man findet:

$$F(t) = \frac{3}{50}\left[5te^t - e^t + \cos(3t) - \frac{4}{3}\sin(3t)\right].$$

4. Faltungssatz: Die wichtigsten Sätze in der ganzen Theorie sind die sogenannten Faltungssätze, von denen ich Ihnen einen schildern will.

Unter einem Faltungsintegral versteht man ein Integral von der Form

$$\int_0^t F_1(\tau)\, F_2(t-\tau)\, d\tau = F_1 * F_2$$

Es gehorcht dem *kommutativen Gesetz* $F_1 * F_2 = F_2 * F_1$.

Der Beweis ergibt sich sofort durch eine Variablentransformation

$$t - \tau = U.$$

Es gehorcht auch dem *assoziativen Gesetz*

$$(F_1 * F_2) * F_3 = F_1 * (F_2 * F_3).$$

Die Reihenfolge der Faktoren spielt bei der Faltung keine Rolle. Das assoziative Gesetz ist eine Konsequenz des nachstehenden *Faltungsgesetzes:*

$$L(F_1 * F_2) = L(F_1) \cdot L(F_2).$$

Der Faltung im Originalraum entspricht im Bildraum die Multiplikation der beiden Bildfunktionen. Der Beweis dieses Faltungssatzes

ergibt sich durch geeignete Umformung des durch $L(F_1 * F_2)$ definierten Doppelintegrals.

Mit diesen vier Sätzen ist die Systematik der Eigenschaften der L-Transformation in keiner Weise erschöpft. Sie dürften aber genügen, um die folgenden Anwendungen zu verstehen.

II.

Anwendungen der L-Transformation auf die Integralgleichungen

Direkt präpariert für die Anwendungen der Laplace-Transformation sind die Volterraschen Integralgleichungen vom sogenannten Faltungstypus, zu denen auch die von Moser aufgestellte Integralgleichung gehört. Ebenso kann die in der Bevölkerungsstatistik massgebende und z. B. von Lotka und Linder betrachtete Integralgleichung leicht auf eine solche Volterrasche Integralgleichung transformiert werden, wie beispielsweise Hadwiger in einer seiner Untersuchungen festgestellt hat. Volterrasche Integralgleichungen kommen immer dann vor, wenn es sich um Erscheinungen mit Nachwirkungen, z. B. Vererbungserscheinungen, Elastizitätsuntersuchungen usw. handelt. Es handelt sich um die Integralgleichung:

$$F(t) = G(t) + \int_0^t K(t-\tau)\, F(\tau)\, d\tau$$

$G(t)$ und $K(t-\tau)$ als der Kern der Integralgleichung sind gegeben. Gesucht wird die Funktion $F(t)$. Beispielsweise beim Problem der Erneuerung sei im Zeitpunkt $t = 0$ die Anzahl der gleichaltrigen Personen mit einem festen Anfangsalter H; nach t betrage dieselbe noch $H \cdot P(t)$. Abgehende Personen sollen immer sofort ersetzt werden, mit dem festen Anfangsalter, die Anzahl der im Intervall $d\tau$ eintretenden Personen werde mit $H \cdot F(\tau)\, d\tau$ bezeichnet, wobei man $F(\tau)$ die Erneuerungsfunktion nennt. Soll die Zahl der Mitglieder konstant bleiben, erhält man offenbar die Gleichung I:

$$\text{I.} \qquad H = HP(t) + \int_0^t H\, F(\tau)\, P(t-\tau)\, d\tau\,.$$

Differenziert man diese Gleichung nach t, so erhält man

$$F(t) = -P'(t) - \int_0^t F(\tau)\, P'(t-\tau)\, d\tau .$$

Dies ist genau eine Integralgleichung von der vorigen Form.

Vielleicht kann man einwenden, dass die Erneuerungsfunktion $F(\tau)$ immerhin nicht direkt gegeben ist. Hingegen kann man beispielsweise direkt durch Beobachtung die Anzahl der Neueingetretenen im Laufe der Zeit t nämlich $\Phi(t)$ geben. Dann erhält man die Integralgleichung:

$$H = H\, P(t) + \int_0^t P(t-\tau)\, H \cdot d\Phi(\tau)$$

wie sie von Richter [1]) in seiner grundlegenden Arbeit formuliert wurde.

Lösung der Integralgleichung II:

$$\text{II.} \qquad F(t) = G(t) + \int_0^t K(t-\tau)\, F(\tau)\, d\tau .$$

Nehmen wir an, dass auf sämtliche Funktionen $G(t)$, $K(t)$, $F(t)$ die L-Transformation angewendet werden darf. Im Falle des Erneuerungsproblems trifft dies sicher zu, da alle dort vorkommenden Funktionen beschränkt sind. Man erhält

$$f(s) = g(s) + k(s) \cdot f(s)$$

$$\text{oder } f(s) = \frac{g(s)}{1-k(s)} = g(s) + g(s) \cdot \frac{k(s)}{1-k(s)} = g(s) + g(s) \cdot q(s) .$$

Die Bildfunktion der gesuchten Funktion $F(t)$ ist demnach bekannt. Wenn unser Wörterbuch vollständig ist, kann die Originalfunktion direkt aufgeschlagen werden. Im andern Fall ist die Umkehrformel zu benutzen.

Man kann zeigen, dass sich $q(s)$ zurücktransformieren lässt, da für genügend grosses s gilt $k(s) \neq 1$. Deshalb besitzt $F(t)$ die Darstellung

$$F(t) = G(t) + Q * G = G(t) + \int_0^t Q(t-\tau)\, G(\tau)\, d\tau .$$

---

[1]) *H. Richter*, Untersuchungen zum Erneuerungsproblem. Mathemat. Annalen, Bd. 118 (1941), S. 145—193.

Das ist die in der Theorie der Integralgleichungen bekannte Darstellung mittelst des reziproken Kerns. Zwischen beiden Kernen besteht die folgende Beziehung

$$\frac{k(s)}{1-k(s)} = q(s)$$

$$-k(s) + q(s) = q(s)\,k(s)$$

$$Q(t) - K(t) = \int_0^t Q(\tau)\,K(t-\tau)\,d\tau\,.$$

Im Falle der Moserschen Erneuerungsgleichung I ergibt die L-Transformation das folgende Resultat:

$$L(I) = p(s) + f(s)\cdot p(s)$$

$$f(s) = \left[\frac{1}{s} - p(s)\right]\cdot\frac{1}{p(s)} = \frac{1}{s\,p(s)} - 1\,.$$

Moser hat seine Beziehungen vor allem deshalb formuliert, weil er sich für die Frage des *Beharrungszustandes* interessierte. Er nahm a priori an, dass die Lösung seiner Integralgleichung mit wachsendem t einem Grenzwert zustrebe. Schon die Definition des Beharrungszustandes ist nicht selbstverständlich, wie ich schon im Jahre 1932 in einer kleinen Arbeit auseinandersetzte. Ebenso muss das asymptotische Verhalten der Lösung einer Integralgleichung genauer untersucht werden. Diese Fragen des Beharrungszustandes wurden von Richter in seiner Habilitationsarbeit, teilweise ebenfalls mit Hilfe der L-Transformation, besonders sorgfältig untersucht. Für den Fall, dass die Lösung wirklich einem Grenzwert zustrebt, spricht Richter in durchaus zutreffender Weise von einer eigentlichen Stabilisierung des Vorganges. Kann man nun anschauliche Kriterien für die Funktionen K und G geben, damit die Stabilisierung des Vorganges eintritt? Im Falle der Erneuerung sind diese Funktionen die Sterbenswahrscheinlichkeit oder ihre Ableitung und deshalb von einer bestimmten Grenze t_0 an 0.

Richter hat schon in einer kleineren Arbeit im Jahre 1940 tatsächlich bewiesen, dass diese Voraussetzung, verbunden mit recht allgemeinen Eigenschaften, wie stückweise Differenzierbarkeit für

das Eintreten der Stabilisierung genügt. Immerhin benötigte er für seinen Beweis eine sehr genaue Diskussion mit Hilfe der wesentlichsten Begriffe in der Analysis reeller Funktionen, wie gleichmässige Stetigkeit, Konvergenz von Funktionsfolgen usw.

Sofern diese Voraussetzung des Verschwindens des Kernes der Integralgleichung von einer bestimmten Stelle an nicht zutrifft, wird die Diskussion wesentlich schwieriger, wie schon Hadwiger anhand eines Gegenbeispieles festgestellt hatte. Richter hat eben in seiner Habilitationsschrift diesen Fall ganz allgemein untersucht und ist dabei zu sehr allgemeinen Ergebnissen und auch zu neuen Stabilisierungsbegriffen gekommen.

Diese knappen Ausführungen haben hoffentlich die Bedeutung der Laplace-Transformation deutlich gezeigt. Gleichzeitig beweist die Entwicklung des Erneuerungsproblems sehr schön, dass man auch in der Versicherungsmathematik auf mathematisch durchaus interessante und keineswegs leichte Probleme stösst. Theorie und Praxis können sich auch in unserm Arbeitsgebiet gegenseitig nach wie vor äusserst nützliche Dienste leisten, wenn auf beiden Seiten Achtung vor der Arbeit des andern und vor allem der Drang nach Wahrheit besteht.