Réflexions sur le calcul du bénéfice de mortalité et sur celui des réserves mathématiques en cas de modification des bases techniques

Autor(en): Urech, A.

Objekttyp: Article

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer

Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires

Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Band (Jahr): 45 (1945)

PDF erstellt am: 29.06.2024

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-555429

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek* ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

Réflexions sur le calcul du bénéfice de mortalité et sur celui des réserves mathématiques en cas de modification des bases techniques

Par Aug. Urech, Berne

Durant les dix années écoulées, les sociétés d'assurances sur la vie ont été amenées à modifier complètement leurs bases techniques. Le recul de la mortalité et celui du taux de l'intérêt ont nécessité une adaptation aux nouvelles conditions, d'abord des tarifs et des réserves mathématiques des assurances de rentes, adaptation qui s'est faite en plusieurs fois, au fur et à mesure que les nouvelles observations précisaient et montraient à quel point la chute de la mortalité et celle de l'intérêt étaient importantes. En 1942, les tarifs des assurances en cas de décès des sociétés suisses furent également fondés sur des bases techniques nouvelles. La plupart des sociétés n'avaient pas attendu ce moment-là pour renforcer leurs réserves mathématiques des assurances en cas de décès de l'ancien portefeuille, afin de passer aussitôt que possible au calcul d'après les nouvelles bases. La participation aux bénéfices, elle aussi, a fait l'objet de nombreuses recherches. Elle a dû être abaissée de façon très sensible.

Dans la présente étude, nous nous proposons d'examiner deux problèmes sur lesquels l'unité ne s'est pas encore faite au sein des actuaires: le mode de calcul du bénéfice de mortalité et la constitution des réserves mathématiques en cas de modification des bases techniques. Il n'est pas certain du reste que les opinions pourront toujours se rencontrer. Dans beaucoup de questions d'assurance, et même dans celles qui ne paraissent relever au premier abord que de déductions mathématiques, il y a une part souvent importante d'appréciation personnelle. C'est que les formules font intervenir les bases techniques, tables de mortalité, taux d'intérêt, tables d'invalidité, etc., sur lesquelles les opinions varient. Parfois, il est assez difficile de s'affranchir complète-

ment d'habitudes prises, d'analyser les hypothèses qu'on fait implicitement, et cela non seulement dans la pratique, mais aussi dans le raisonnement pur. Longtemps, la plupart des actuaires estimaient que les bases techniques utilisées pour établir un tarif devaient servir au calcul des réserves mathématiques jusqu'à l'extinction du portefeuille. Si ces bases se révélaient insuffisantes au cours des années, on pouvait bien modifier le tarif, mais les réserves mathématiques des assurances conclues aux anciennes primes étaient encore calculées pendant des dizaines d'années d'après les anciennes bases techniques. Il a fallu les modifications profondes enregistrées dans la mortalité et dans l'intérêt au cours de la dernière décennie pour qu'on se rende nettement compte que ce mode de faire peut conduire à des situations extrêmement difficiles.

Le calcul des tarifs, celui des réserves mathématiques, reposent sur des bases techniques de premier ordre qu'on choisit de manière qu'à vues humaines elles représentent aussi bien que possible les événements futurs, tout en maintenant une marge de sécurité. Lorsqu'on sent le besoin de modifier les bases techniques, on a en somme le sentiment qu'elles diffèrent trop des faits tels qu'ils se dérouleront probablement. C'est en nous pénétrant bien de cette remarque, que nous devons examiner les questions suivantes, dont l'importance est plus grande qu'il ne paraît peut-être à première vue. Le tableau 1, ainsi que le graphique 1, donnent les tables de mortalité utilisées dans ce travail.

Nous considérons un portefeuille composé uniquement d'assurances mixtes $30:\overline{30}$, conclues le 1^{er} janvier d'une même année, à l'âge de 30 ans et pour une durée de 30 ans. Le tarif a été calculé à l'aide de la table de mortalité des 23 compagnies allemandes MWI et le taux d'intérêt de $3\frac{1}{2}$ %. Nous admettons qu'à partir du début de la $(t+1)^e$ année d'assurance, la mortalité effective est donnée par la table de la Société suisse d'Assurances générales sur la vie humaine, à Zurich, RAH $\frac{1894/1930}{1921/1931}$ que nous désignerons dans la suite pour simplifier par RAH.

¹) Société suisse d'Assurances générales sur la vie humaine, Zurich, Soixantequinze ans d'activité, 1857—1932.

Taux annuels de mortalité

Tableau 1

31 901 231 514 246 173 141 32 924 239 521 253 179 148 33 944 248 530 262 186 156 34 970 256 539 273 192 164 35 0,00 999 0,00 265 0,00 550 0,00 286 0,00 199 0,00 172 36 0,01 027 277 561 302 208 183 37 1 058 293 575 320 220 196 38 1 095 311 589 341 233 211 39 1 133 330 606 364 248 228 40 0,01 176 0,00 347 0,00 624 0,00 388 0,00 260 0,00 243 0 41 1 228 383 644 413 287 272 42 1 279 423 667 439 317	(8) 0,00 203 206 210 216 220 0,00 225 233
30	206 210 216 220 200 225
31 901 231 514 246 178 141 32 924 239 521 253 179 148 33 944 248 530 262 186 156 34 970 256 539 273 192 164 35 0,00 999 0,00 265 0,00 550 0,00 286 0,00 199 0,00 172 36 0,01 027 277 561 302 208 183 37 1 058 293 575 320 220 196 38 1 095 311 589 341 233 211 39 1 133 330 606 364 248 228 40 0,01 176 0,00 347 0,00 624 0,00 388 0,00 260 0,00 243 41 1 228 383 644 413 287 272 42 1 279 423 667 439 317 305	206 210 216 220 ,00 225
31 901 231 514 246 178 141 32 924 239 521 253 179 148 33 944 248 530 262 186 156 34 970 256 539 273 192 164 35 0,00 999 0,00 265 0,00 550 0,00 286 0,00 199 0,00 172 36 0,01 027 277 561 302 208 183 37 1 058 293 575 320 220 196 38 1 095 311 589 341 233 211 39 1 133 330 606 364 248 228 40 0,01 176 0,00 347 0,00 624 0,00 388 0,00 260 0,00 243 41 1 228 383 644 413 287 272 42 1 279 423 667 439 317 305	210 216 220 200 225
33 944 248 530 262 186 156 34 970 256 539 273 192 164 35 0,00 999 0,00 265 0,00 550 0,00 286 0,00 199 0,00 172 0 36 0,01 027 277 561 302 208 183 37 1 058 293 575 320 220 196 38 1 095 311 589 341 233 211 39 1 133 330 606 364 248 228 40 0,01 176 0,00 347 0,00 624 0,00 388 0,00 260 0,00 243 0 41 1 228 383 644 413 287 272 2 42 1 279 423 667 439 317 305 342 43 1 331 468 693 466 351 342 44 1 386 518	216 220 0,00 225
34 970 256 539 273 192 164 35 0,00 999 0,00 265 0,00 550 0,00 286 0,00 199 0,00 172 0 36 0,01 027 277 561 302 208 183 37 1 058 293 575 320 220 196 38 1 095 311 589 341 233 211 39 1 133 330 606 364 248 228 40 0,01 176 0,00 347 0,00 624 0,00 388 0,00 260 0,00 243 0 41 1 228 383 644 413 287 272 0 42 1 279 423 667 439 317 305 0 0 43 1 331 468 693 466 351 342 0 44 1 386 518 721 495 389 383 0	220 0,00 225
35 0,00 999 0,00 265 0,00 550 0,00 286 0,00 199 0,00 172 0 36 0,01 027 277 561 302 208 183 37 1 058 293 575 320 220 196 38 1 095 311 589 341 233 211 39 1 133 330 606 364 248 228 40 0,01 176 0,00 347 0,00 624 0,00 388 0,00 260 0,00 243 0 41 1 228 383 644 413 287 272 42 1 279 423 667 439 317 305 43 1 331 468 693 466 351 342 44 1 386 518 721 495 389 383 45 0,01 437 0,00 573 0,00 753 0,00 527 0,00 430 0,00 430 46 1 488 634 <	,00 225
36 0,01 027 277 561 302 208 183 37 1 058 293 575 320 220 196 38 1 095 311 589 341 233 211 39 1 133 330 606 364 248 228 40 0,01 176 0,00 347 0,00 624 0,00 388 0,00 260 0,00 243 0 41 1 228 383 644 413 287 272 2 42 1 279 423 667 439 317 305 342 344 383 383 383 383 383 383 383 383 383 383 383 383 383 383 383 <td></td>	
36 0,01 027 277 561 302 208 183 37 1 058 293 575 320 220 196 38 1 095 311 589 341 233 211 39 1 133 330 606 364 248 228 40 0,01 176 0,00 347 0,00 624 0,00 388 0,00 260 0,00 243 0 41 1 228 383 644 413 287 272 2 42 1 279 423 667 439 317 305 342 344 383 383 383 383 383 383 383 383 383 383 383 383 383 383 383 <td></td>	
37 1 058 293 575 320 220 196 38 1 095 311 589 341 233 211 39 1 133 330 606 364 248 228 40 0,01 176 0,00 347 0,00 624 0,00 388 0,00 260 0,00 243 0 41 1 228 383 644 413 287 272 42 1 279 423 667 439 317 305 43 1 331 468 693 466 351 342 44 1 386 518 721 495 389 383 45 0,01 437 0,00 573 0,00 753 0,00 527 0,00 430 0,00 430 46 1 488 634 788 563 476 482 47 1 549 703 828 604 527 541 48 1 621 779 872 651 584 </td <td>233</td>	233
38 1 095 311 589 341 233 211 39 1 133 330 606 364 248 228 40 0,01 176 0,00 347 0,00 624 0,00 388 0,00 260 0,00 243 0 41 1 228 383 644 413 287 272 42 1 279 423 667 439 317 305 43 1 331 468 693 466 351 342 44 1 386 518 721 495 389 383 45 0,01 437 0,00 573 0,00 753 0,00 527 0,00 430 0,00 430 0 46 1 488 634 788 563 476 482 47 1 549 703 828 604 527 541 48 1 621 779 872 651 584 608 49 1 705 863 921 704 <td></td>	
39 1 133 330 606 364 248 228 40 0,01 176 0,00 347 0,00 624 0,00 388 0,00 260 0,00 243 0 41 1 228 383 644 413 287 272 42 1 279 423 667 439 317 305 43 1 331 468 693 466 351 342 44 1 386 518 721 495 389 383 45 0,01 437 0,00 573 0,00 753 0,00 527 0,00 430 0,00 430 0 46 1 488 634 788 563 476 482 47 1 549 703 828 604 527 541 48 1 621 779 872 651 584 608 49 1 705 863 921 704 647 682 50 0,01 814 0,00 958 0,00 976	243
40 0,01 176 0,00 347 0,00 624 0,00 388 0,00 260 0,00 243 0 41 1 228 383 644 413 287 272 42 1 279 423 667 439 317 305 43 1 331 468 693 466 351 342 44 1 386 518 721 495 389 383 45 0,01 437 0,00 573 0,00 753 0,00 527 0,00 430 0,00 430 46 1 488 634 788 563 476 482 47 1 549 703 828 604 527 541 48 1 621 779 872 651 584 608 49 1 705 863 921 704 647 682 50 0,01 814 0,00 958 0,00 976 0,00 764 0,00 719 0,00 766 51 1 931 0,01 662 0,01 038	255
41 1 228 383 644 413 287 272 42 1 279 423 667 439 317 305 43 1 331 468 693 466 351 342 44 1 386 518 721 495 389 383 45 0,01 437 0,00 573 0,00 753 0,00 527 0,00 430 0,00 430 46 1 488 634 788 563 476 482 47 1 549 703 828 604 527 541 48 1 621 779 872 651 584 608 49 1 705 863 921 704 647 682 50 0,01 814 0,00 958 0,00 976 0,00 764 0,00 719 0,00 766 51 1 931 0,01 062 0,01 038 831 797 860	267
41 1 228 383 644 413 287 272 42 1 279 423 667 439 317 305 43 1 331 468 693 466 351 342 44 1 386 518 721 495 389 383 45 0,01 437 0,00 573 0,00 753 0,00 527 0,00 430 0,00 430 46 1 488 634 788 563 476 482 47 1 549 703 828 604 527 541 48 1 621 779 872 651 584 608 49 1 705 863 921 704 647 682 50 0,01 814 0,00 958 0,00 976 0,00 764 0,00 719 0,00 766 51 1 931 0,01 062 0,01 038 831 797 860	
42 1 279 423 667 439 317 305 43 1 331 468 693 466 351 342 44 1 386 518 721 495 389 383 45 0,01 437 0,00 573 0,00 753 0,00 527 0,00 430 0,00 430 46 1 488 634 788 563 476 482 47 1 549 703 828 604 527 541 48 1 621 779 872 651 584 608 49 1 705 863 921 704 647 682 50 0,01 814 0,00 958 0,00 976 0,00 764 0,00 719 0,00 766 0 51 1 931 0,01 062 0,01 038 831 797 860	,00 278
43 1 331 468 693 466 351 342 44 1 386 518 721 495 389 383 45 0,01 437 0,00 573 0,00 753 0,00 527 0,00 430 0,00 430 46 1 488 634 788 563 476 482 47 1 549 703 828 604 527 541 48 1 621 779 872 651 584 608 49 1 705 863 921 704 647 682 50 0,01 814 0,00 958 0,00 976 0,00 764 0,00 719 0,00 766 51 1 931 0,01 062 0,01 038 831 797 860	303
44 1 386 518 721 495 389 383 45 0,01 437 0,00 573 0,00 753 0,00 527 0,00 430 0,00 430 0 46 1 488 634 788 563 476 482 47 1 549 703 828 604 527 541 48 1 621 779 872 651 584 608 49 1 705 863 921 704 647 682 50 0,01 814 0,00 958 0,00 976 0,00 764 0,00 719 0,00 766 0 51 1 931 0,01 062 0,01 038 831 797 860	330
45 0,01 437 0,00 573 0,00 753 0,00 527 0,00 430 0,00 430 0,00 430 0 46 1 488 634 788 563 476 482 47 1 549 703 828 604 527 541 48 1 621 779 872 651 584 608 49 1 705 863 921 704 647 682 50 0,01 814 0,00 958 0,00 976 0,00 764 0,00 719 0,00 766 0 51 1 931 0,01 062 0,01 038 831 797 860	360
46 1 488 634 788 563 476 482 47 1 549 703 828 604 527 541 48 1 621 779 872 651 584 608 49 1 705 863 921 704 647 682 50 0,01 814 0,00 958 0,00 976 0,00 764 0,00 719 0,00 766 0 51 1 931 0,01 062 0,01 038 831 797 860	394
46 1 488 634 788 563 476 482 47 1 549 703 828 604 527 541 48 1 621 779 872 651 584 608 49 1 705 863 921 704 647 682 50 0,01 814 0,00 958 0,00 976 0,00 764 0,00 719 0,00 766 51 1 931 0,01 062 0,01 038 831 797 860	00.400
47 1 549 703 828 604 527 541 48 1 621 779 872 651 584 608 49 1 705 863 921 704 647 682 50 0,01 814 0,00 958 0,00 976 0,00 764 0,00 719 0,00 766 0 51 1 931 0,01 062 0,01 038 831 797 860	,00 430
48 1 621 779 872 651 584 608 49 1 705 863 921 704 647 682 50 0,01 814 0,00 958 0,00 976 0,00 764 0,00 719 0,00 766 0 51 1 931 0,01 062 0,01 038 831 797 860	469
49 1 705 863 921 704 647 682 50 0,01 814 0,00 958 0,00 976 0,00 764 0,00 719 0,00 766 0 51 1 931 0,01 062 0,01 038 831 797 860	513
50 0,01 814 0,00 958 0,00 976 0,00 764 0,00 719 0,00 766 0 51 1 931 0,01 062 0,01 038 831 797 860	561
51 1931 0,01 062 0,01 038 831 797 860	613
51 1 931 0,01 062 0,01 038 831 797 860	,00 671
1 001 0,01 002 0,02 000	733
52 2060 1179 1106 906 884 967	802
52 2 060 1 179 1 100 300 664 307 53 2 200 1 309 1 183 990 982 0,01 086	877
53 2 200 1 309 1 183 350 362 3,31 000 54 2 349 1 453 1 268 0,01 084 0,01 090 1 221	959
31 2343 1433 1200 0,01001 0,01000	
55 0,02 506 0,01 613 0,01 364 0,01 190 0,01 210 0,01 371 0	,01 048
56 2681 1791 1470 1311 1343 1540	1 146
57 2 866 1 990 1 589 1 450 1 493 1 731	$1\ 254$
58 3 073 2 210 1 721 1 608 1 658 1 945	1 370
59 3 288 2 454 1 868 1 783 1 841 2 184	1497
60 0,03 535 0,02 726 0,02 033 0,01 973 0,02 045 0,02 453 0	
	,01 636

Nous examinons comment il convient de calculer le bénéfice de mortalité au cours de la $(t+1)^e$ année d'assurance.

Partons de la formule de récurrence

$$(1) \qquad (1+i) \left[{}_t V^{(\text{MWI})} + P^{(\text{MWI})}_{30:30\,||} - q^{(\text{MWI})}_{30+t} - p^{(\text{MWI})}_{30+t} \,{}_{t+1} V^{(\text{MWI})} = 0 \,, \right.$$

qui exprime que la réserve mathématique à la fin de la t^e année, augmentée de la prime et des intérêts, permet de payer les décès qui se produisent au cours de la $(t+1)^e$ année et de constituer à la fin de l'année les réserves mathématiques pour les survivants, sans qu'il y ait ni bénéfice ni perte. Les notations se comprennent facilement; nous pouvons nous dispenser de les définir à nouveau. La formule suppose que les événements se produisent suivant les données de la table MWI.

Si la mortalité effective n'est pas égale à la mortalité présumée, on a à la fin de la $(t+1)^e$ année un bénéfice ou une perte. Nous avons admis que la mortalité effective dès le début de la $(t+1)^e$ année d'assurance est donnée par la table RAH. Pour déterminer le bénéfice B, positif ou négatif, durant la $(t+1)^e$ année, on remplace dans la formule de récurrence les décès de la table MWI par ceux de la table RAH, et de même les vivants MWI à la fin de l'année par ceux de la table RAH. On a alors,

$$(2) \qquad B = (1+i) \left[{}_t V^{(\text{MWI})} + \left. P^{(\text{MWI})}_{30:30} \right| - q^{(\text{RAH})}_{30+t} - p^{(\text{RAH})}_{30+t} \, {}_{t+1} V^{(\text{MWI})}. \right.$$

En tenant compte de la relation (1), on peut écrire:

$$(3) \qquad B = (q_{{\bf 30}+t}^{\rm (MWI)} - q_{{\bf 30}+t}^{\rm (RAH)}) \left(1 - {}_{t+1}V^{\rm (MWI)}\right).$$

C'est la formule qu'on utilise souvent pour déterminer le bénéfice de mortalité. Elle conduit pour une assurance mixte 30:30 de 10 000 francs aux bénéfices indiqués dans le tableau 2 ci-après, colonne (2), ainsi que dans le graphique 2. Ce bénéfice diminue très rapidement avec les années, ce qui présente les inconvénients que nous avons signalés dans une étude précédente ¹).

¹) Bulletin de l'Association des Actuaires Suisses nº 31, 1^{er} avril 1936, pages 78—83.

Bénéfices de mortalité et d'intérêt sur une assurance mixte $30:\overline{30}|$ de 10~000 francs au cours de l'année (t+1), valeur à la fin de l'année Tableau 2

t+1	MWI>RAH	MWI 3½%►MWI 4%	Total (2) + (3)	N 1939 ≻ RAH	A 1924-29►RAH
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.
1	64,47	1,32	65,79	27,68	1,57
2	64,45	2,25	66,70	27,22	1,44
3	$64,\!53$	3,22	67,75	26,56	1,31
4	64,13	4,22	68,35	25,97	1,28
5	$64,\!26$	5,25	69,51	25,46	1,52
6	$64,\!44$	6,32	70,76	25,00	1,83
7	64,13	7,42	71,55	24,25	2,12
8	63,61	8,56	72,17	23,41	2,22
9	63,28	9,75	73,03	22,38	2,39
10	62,79	10,97	73,76	21,51	2,62
10	02,10	10,01	10,10	21,01	2,02
11	62,66	12,23	74,89	20,85	3,05
12	61,59	13,53	$75,\!12$	18,92	2,15
13	60,01	14,88	74,89	16,99	1,10
14	58,00	16,27	$74,\!27$	15,00	— 0,13
15	55,74	17,71	73,45	12,91	— 1,44
16	52,81	19,21	72,02	10,87	— 2,73
17	49,43	20,76	70,19	8,79	- 3,98
18	46,12	22,38	68,50	6,71	— 5,22
19	42,96	24,06	67,02	4,66	6,29
20	39,89	25,81	65,70	2,69	7,24
21	37,32	27,63	64,95	0,77	— 8,09
22	34,46	29,52	63,98	— 0,93	— 8,73
23	31,31	31,49	62,80	- 2,52	- 9,21
24	27,83	33,55	61,38	— 3,81	- 9,41
25	23,95	35,70	59,65	— 4,76	- 9,26
26	19,63	37,96	57,59	_ 5,25	— 8,68
27	15,10	40,33	55,43	5,19	— 7,56
28	10,21	42,84	53,05	- 4,43	— 5,81
29	5,20	45,49	50,69	2,77	— 3,32
30	0	48,31	48,31	0	o o
	ľ	<i>'</i>			

Nous aurions pu aussi partir de la formule de récurrence

$$(1') \qquad (1+i) \left[{}_t V^{({\rm RAH})} + P^{({\rm RAH})}_{30:30} \right] - q^{({\rm RAH})}_{30+t} - p^{({\rm RAH})}_{30+t} \,_{t+1} V^{({\rm RAH})} = 0 \,, \label{eq:continuous}$$

qui lie les valeurs actuarielles relatives à la table RAH. Dès le début de la $(t+1)^{\rm e}$ année d'assurance, la mortalité effective est égale, suivant nos hypothèses, à celle de la table RAH. En revanche, la prime de l'assurance a été fixée d'après la table MWI; la prime pure est égale à 264 fr. 10, tandis que d'après la table RAH, elle ne serait que de 213 fr. 90.

Comme nous avons remplacé ci-dessus dans la formule de récurrence (1), écrite pour la table MWI, les éléments $q_{30+t}^{(\text{MWI})}$ et $p_{30+t}^{(\text{MWI})}$ par les éléments correspondants de la table RAH, nous pouvons, dans la formule (1'), remplacer la prime $P_{30:30|}^{(\text{RAH})}$ par $P_{30:30|}^{(\text{MWI})}$. Le résultat n'est plus égal à zéro, mais à une quantité

$$(2') \qquad B' = (1+i) \left[{}_t V^{({\rm RAH})} + \left. P_{{\rm 30:30}}^{({\rm MWI})} \right] - q_{{\rm 30+}t}^{({\rm RAH})} - p_{{\rm 30+}t-t+1}^{({\rm RAH})} V^{({\rm RAH})}. \right.$$

Nous pouvons l'écrire, en tenant compte de (1'),

(3')
$$B' = (1+i) \left[P_{30:30}^{(MWI)} - P_{30:30}^{(RAH)} \right].$$

Nous avons dit que l'expression (3) $B = (q_{30+t}^{(\text{MWI})} - q_{30+t}^{(\text{RAH})}) (1 - _{t+1}V^{(\text{MWI})})$ donne le bénéfice de mortalité durant la $(t+1)^{\text{e}}$ année. Nous pourrions aussi être tentés de considérer comme bénéfice de mortalité la quantité B' résultant de (3'). Toutefois, cela supposerait que la réserve mathématique MWI à la fin de la t^{e} année a été, au préalable, complétée de façon à avoir la réserve RAH. Pour réaliser les bénéfices annuels B' à partir de la $(t+1)^{\text{e}}$ année, la société aurait dû fournir, de ses propres deniers, la différence entre la réserve RAH et la réserve MWI. Pendant quelques années, les bénéfices B' seraient utilisés pour restituer à la société son avance. Ensuite, seulement, les assurés auraient un droit à faire valoir et le bénéfice serait égal, chaque année, à la différence des primes MWI et RAH, augmentée des intérêts, jusqu'à la fin de l'assurance.

Le bénéfice B donné par la formule (3) n'est pas du tout le même. Il est égal au produit de la somme sous le risque, mesurée d'après la table MWI, par la différence entre les taux de mortalité MWI et RAH. Cette formule a quelque chose de séduisant, de même que les interprétations qu'on peut en donner. Cependant, lorsqu'on approfondit la question, on a quelque peine à admettre que le bénéfice de mortalité soit calculé et distribué suivant la formule (3). Elle contient la réserve MWI. Or, depuis la $(t+1)^e$ année d'assurance, la mortalité par hypothèse se déroule suivant la table RAH; dès lors, la réserve MWI est un élément étranger.

Mais un inconvénient plus grand dans la pratique, c'est que par suite de l'allure des tables MWI et RAH, le bénéfice de mortalité B diminue très fortement avec les années. Pour une assurance mixte 30: 30 de 10 000 francs, il est de 62 fr. 79 durant la 10e année d'assurance, de 39 fr. 89 durant la 20e année, et il décroît ensuite jusqu'à zéro, ainsi qu'il ressort du tableau 2, colonne (2). Sans doute, lorsqu'on considère un portefeuille entier d'assurances et que la production est très forte, comme ce fut le cas en Suisse depuis bien des années, le recul du bénéfice de mortalité ne se manifeste pas aussi brutalement; les nouvelles entrées le freinent, le retardent, mais elles ne peuvent pas empêcher qu'il se produise. Dans le portefeuille des assurances de l'action de secours instituée en 1924 en faveur des assurés auprès de compagnies allemandes d'assurances sur la vie, on a constaté au cours des années une diminution extrêmement forte du bénéfice de mortalité. Depuis vingt ans, ce portefeuille n'a plus été alimenté par de nouvelles assurances. L'effet que nous signalons ci-dessus se fait certainement sentir et cause en bonne partie sans doute ce recul, dont l'ampleur a parfois surpris.

Nous ne nions pas que le bénéfice de mortalité peut diminuer tout naturellement, en même temps que le capital sous le risque. Ce qui nous paraît en revanche inadmissible, c'est la chute trop rapide, provenant de ce que la table MWI ne convient plus du tout. Lorsque les conditions de rendement des placements sont favorables, lorsqu'elles sont stables, le bénéfice d'intérêt augmente avec les années parallèlement à la réserve mathématique. L'augmentation compense plus ou moins la diminution du bénéfice de mortalité; elle en atténue les conséquences, mais elle ne les élimine pas. Nous avons calculé, à titre de comparaison, le bénéfice d'intérêt auquel conduit l'assurance mixte envisagée, 30:30, en supposant que le taux effectif de placement est de 4 %. La formule

(4)
$$B^{(i)} = 0.05 \left[{}_{t}V^{(MWI)} + P_{30:30}^{(MWI)} \right],$$

que l'on obtient en partant de la relation de récurrence (1), conduit au résultat qui est donné dans le tableau 2, colonne (3). Ce bénéfice d'intérêt, d'un demi pour-cent, augmente avec les années, toutefois moins rapidement que ne diminue le bénéfice de mortalité, si bien que le total des deux bénéfices décroît comme l'indique la colonne (4) du tableau 2.

La conclusion nous paraît claire. A partir du moment où les changements dans la mortalité nécessitent une modification radicale des bases techniques, il n'est pas de bonne politique, il n'est même pas juste de faire ressortir dans les comptes et de distribuer les forts bénéfices de mortalité qui découlent de l'application de la formule (1), d'autant moins, comme nous le verrons encore, que le changement dans la mortalité a pour conséquence un découvert dans les réserves mathématiques.

Nous choisissons encore d'autres couples de tables de mortalité représentant, l'une la mortalité présumée, l'autre, la mortalité effective. Admettons qu'on avait adopté au début comme table de mortalité de premier ordre la table norvégienne N 1939 1) représentée sur le graphique (1) en petits traits fins, et que la mortalité effective dès le commencement de la $(t+1)^{\rm e}$ année soit celle de la table RAH.

Les courbes représentant ces tables se coupent entre 50 et 51 ans. Jusque-là, comme le montrent le tableau 2 et le graphique 2, le bénéfice de mortalité calculé d'après la formule (3) — la table N étant substituée à MWI — est positif. Ensuite, il est négatif. Si l'on se place à l'âge de 47 ans, on continue avec la formule (3), à comptabiliser et à distribuer des bénéfices pendant quatre ans, bien qu'en réalité l'assurance doive conduire pour les treize dernières années à une perte. En effet, la valeur actuelle des moyens dont on dispose encore,

$$_{17}V_{30:\overline{30}|}^{(\mathrm{N})} + P_{30:\overline{30}|}^{(\mathrm{N})} a_{47:\overline{13}|}^{(\mathrm{RAH})} = 0,6590\,,$$

est plus petite que la prime unique $A_{47:\overline{13}|}^{({
m RAH})}=0,6596$.

Cet exemple fait bien ressortir ce qu'il y a d'artificiel dans certaines circonstances, à calculer le bénéfice de mortalité par la formule (3).

¹) J. Burmann-Moe, Die neuen norwegischen Rechnungsgrundlagen für Rentenversicherung, R 1939, und für Lebensversicherung, N 1939. «Skandinavisk Aktuarietidskrift», Uppsala 1939, page 161.

On aboutirait encore à la même conclusion en choisissant pour la mortalité présumée la table anglaise A 1924—1929 ¹).

On arrive ainsi à des résultats qu'on a de la peine à accepter. Il faut en chercher la cause dans la définition qu'on donne du bénéfice de mortalité et spécialement dans le fait que la table choisie pour la mortalité présumée ne peut pas convenir.

Le bénéfice annuel de mortalité durant la $(t+1)^e$ année, défini par la formule (3), ne dépend pas seulement des événements qui se produisent durant cette année-là, mais encore des hypothèses qu'on fait en ce qui concerne la mortalité au cours des années qui suivront; la réserve mathématique , V^(MWI) intervient dans la formule et avec elle la mortalité présumée jusqu'à la fin de l'assurance. Si cette mortalité présumée n'est plus du tout conforme aux hypothèses qu'on est raisonnablement en droit de faire à la fin de la te année, il n'est pas sage de la conserver encore dans les calculs. On ne doit pas le perdre de vue lorsqu'on établit l'excédent bénéficiaire, sinon les comptes annuels sont faussés; on fait apparaître et on distribue aux dépens des exercices futurs des bénéfices qui ne se réaliseront peut-être jamais. La formule (3) pouvait être admise tant qu'on avait de bonnes raisons de croire que la table MWI, choisie comme base technique de premier ordre, représentait la mortalité future avec suffisamment d'exactitude. Dès qu'on reconnaît que ce n'est plus le cas, MWI n'est plus une mesure appropriée pour le calcul du bénéfice; la formule (3) doit être abandonnée.

Nous avons supposé que la mortalité effective, à partir de la $(t+1)^{\rm e}$ année d'assurance, était donnée par la table RAH. Nous nous rapprocherons davantage de la réalité en admettant qu'à partir de la $(t+1)^{\rm e}$ année, la table RAH peut être choisie à bon droit comme table de mortalité de premier ordre, c'est-à-dire qu'à vues humaines, elle doit représenter convenablement la mortalité future effective, tout en laissant une marge de sécurité raisonnable. Cela nous permettra aussi d'arriver à une conclusion positive pour notre premier sujet.

Nous divisons dès la fin de la $t^{\rm e}$ année le bénéfice de mortalité en deux composantes: la première, $B_{\rm 1}$, résulte du passage de la mortalité MWI à la mortalité RAH, comme si RAH donnait pour l'avenir la

¹) Continuous investigation into the mortality of assured lives, vol. I, Cambridge 1934, page XXXVIII.

mortalité effective; la deuxième, B_2 , est le bénéfice qu'on réalisera encore par rapport à la table RAH choisie comme base de premier ordre.

Examinons la première de ces composantes. A la fin de la t^e année, lorsqu'on abandonne la table MWI comme base de premier ordre pour adopter RAH, nous calculons le bénéfice positif ou négatif B_1 que réalise la compagnie du fait de ce changement. La compagnie complète la réserve MWI, pour avoir à disposition la réserve RAH, après quoi elle aura chaque année un bénéfice égal à la différence des primes MWI et RAH, valeur au début de l'année. La valeur actuelle des bénéfices de mortalité futurs par rapport à la table RAH, diminuée de la somme avancée par la société pour compléter la réserve mathématique peut s'écrire:

$$\begin{aligned} & B_{\mathbf{1}} = \left[P_{30:\overline{30|}}^{(\mathrm{MWI})} - P_{30:\overline{30|}}^{(\mathrm{RAH})} \right] \mathbf{a}_{30+t:\overline{30-t|}}^{(\mathrm{RAH})} - \left[{}_t V^{(\mathrm{RAH})} - {}_t V^{(\mathrm{MWI})} \right], \\ & \text{ou bien,} \\ & B_{\mathbf{1}} = {}_t V^{(\mathrm{MWI})} + P_{30:\overline{30|}}^{(\mathrm{MWI})} \mathbf{a}_{30+t:\overline{30-t|}}^{(\mathrm{RAH})} - A_{30+t:\overline{30-t|}}^{(\mathrm{RAH})}, \end{aligned}$$

expression dont l'interprétation est aisée. Le bénéfice B_1 sera réparti d'une manière satisfaisante sur les années d'assurance qui restent, par exemple uniformément, suivant la formule,

$$(6) \qquad B_{\mathbf{1}} = (1+i) \left[P_{30:\overline{30}|}^{(\mathtt{MWI})} - P_{30:\overline{30}|}^{(\mathtt{RAH})} - \frac{{}_{t}V^{(\mathtt{RAH})} - {}_{t}V^{(\mathtt{MWI})}}{\mathtt{a}_{30+t:\overline{30-t}|}^{(\mathtt{RAH})}} \right],$$

valeur à la fin de l'année. Dans notre exemple de l'assurance mixte $30:\overline{30}$ de 10 000 francs, ce bénéfice annuel constant est égal à 41 fr. 32 si le passage à la nouvelle table de mortalité se fait après dix ans. On pourrait du reste aussi amortir entièrement la somme fournie à titre de renforcement de la réserve mathématique avant de répartir un bénéfice.

La deuxième composante du bénéfice, celle qu'on réalisera du fait que la mortalité effective est inférieure à la mortalité donnée par la table RAH pourra être calculée, chaque année, en partant de la formule de récurrence (1) écrite pour la table RAH. Elle est égale à

(7)
$$B_{2} = \left(q_{30+t}^{(\text{RAH})} - q_{30+t}^{(\text{eff.})}\right) \left(1 - {}_{t+1}V_{30}^{(\text{RAH})}\right)$$

où $q_{30+t}^{\text{(eff.)}}$ désigne le taux effectif de mortalité.

La somme des valeurs actuelles, au moment t, des composantes B_1 et B_2 n'est pas rigoureusement égale au bénéfice total. L'introduction d'un élément intermédiaire, la table RAH, qui ne correspond à aucun fait réel, entraîne une erreur qui n'a cependant pas d'importance pratique. Elle provient de ce que dans la formule (5), la valeur $a_{30+t:\overline{30-t}|}$ de la rente est fondée sur la table RAH et non pas sur la mortalité future effective, qu'on ne connaît pas.

En admettant que la mortalité effective soit inférieure d'un quart, à la mortalité de la table RAH, et que le changement des bases techniques ait lieu après 10 ans, on obtient le tableau 3 qui suit:

Décomposition du bénéfice de mortalité de l'assurance mixte $30:\overline{30}$ de 10~000 francs en ses deux composantes B_1 et B_2 Tableau 3

,			
t+1 (1)	Bénéfice B_1 (Passage de MWI à RAH) (2)	Bénéfice B_2 (Passage de RAH à la mortalité effective 0,75 RAH)	Total (4)
	Fr.	Fr.	Fr.
11	$41,\!32$	6,44	47,76
12	$41,\!32$	6,83	48,15
13	$41,\!32$	7,23	48,55
14	41,32	7,63	48,95
15	41,32	8,01	49,33
16	41,32	8,42	49,74
17	41,32	8,78	50,10
18	41,32	9,18	50,50
19	$41,\!32$	9,49	50,81
20	41,32	9,73	51,05
21	41,32	9,87	51,19
22	41,32	9,92	51,24
23	41,32	9,86	51,18
24	41,32	9,56	50,88
25	41,32	9,05	50,37
26	41,32	8,22	49,54
27	41,32	7,03	48,35
28	41,32	5,34	46,66
29	41,32	3,05	44,37
30	41,32	0	41,32

Le bénéfice annuel total, ainsi calculé, varie peu avec les années comme le montre la colonne (4); le recul si accentué que nous constations dans la colonne (2) du tableau 2 est évité.

Notre conclusion sera la suivante. Le bénéfice de mortalité durant la $(t+1)^e$ année ne peut être calculé par la formule

$$B = (q_{x+t}^{(\text{pr.})} - - q_{x+t}^{(\text{eff.})}) (1 - t_{t+1}V^{(\text{pr.})}),$$

où l'indice (pr.) signifie qu'on calcule avec la mortalité présumée, que si la table de mortalité faisant fonction de table de premier ordre pour la mortalité présumée convient aux conditions dans lesquelles on se trouve. Si ce n'est pas le cas, si la mortalité effective s'écarte par trop de la mortalité présumée, on adoptera une nouvelle table de mortalité convenant comme table de premier ordre, puis on divisera le bénéfice de mortalité en deux composantes qu'on calculera comme il est dit ci-dessus.

Il resterait à examiner quelles qualités une table de mortalité doit avoir pour convenir comme table de premier ordre. C'est dans une grande mesure une question d'appréciation à laquelle nous ne nous arrêterons pas ici. Nous nous contenterons d'indiquer dans le tableau 4 le bénéfice de mortalité qu'on réaliserait dans trois circonstances différentes, où RAH pourrait, à notre avis, être adoptée à titre de table de mortalité de premier ordre, soit:

- a) si l'on a de bonnes raisons d'admettre que la mortalité sera à l'avenir inférieure d'un quart à celle de la table RAH;
- b) si l'on admet que la mortalité sera à l'avenir inférieure à celle de la table RAH, de 10 % à l'âge de 30 ans, de 11 % à 31 ans, de 12 % à 32 ans, et ainsi de suite, de 39 % à 59 ans et de 40 % à 60 ans; on escompterait donc une amélioration très grande dans les âges avancés, ce qui rapprocherait la mortalité suisse de celle d'autres pays;
- c) si l'on admet enfin que la mortalité sera à l'avenir inférieure à celle de la table RAH, de 40 % à 30 ans, de 39 % à 31 ans, de 38 % à 32 ans, et ainsi de suite, de 11 % à 59 ans et de 10 % à 60 ans.

Bénéfice de mortalité sur une assurance mixte $30:\overline{30}$ de 10~000~francs

Tableau 4

		1	
t+1	a) RAH ➤ 0,75 RAH	b) RAH \rightarrow (0,90-0,60) RAH	c) RAH \rightarrow (0,60-0,90) RAH
(1)	(2)	(3)	(4)
	Fr.	Fr.	Fr.
1	5,49	2,16	8,82
2	5,57	2,40	8,64
3	5,63	2,72	8,54
4	5,68	2,93	8,43
5	5,72	3,22	8,22
6	5,74	3,48	8,09
7	5,83	3,72	7,95
8	5,99	4,10	7,96
9	6,20	4,45	7,94
10	6,29	4,84	7,83
11	6,44	5,11	7,69
12	6,83	5,69	7,90
13	$7,\!23$	6,34	8,05
14	7,63	7,04	8,21
15	8,01	7,70	8,38
16	8,42	8,42	8,42
17	8,78	9,17	8,45
18	9,18	9,91	8,45
19	9,49	10,61	8,32
20	9,73	11,26	8,15
21	9,87	11,85	7,93
22	9,92	12,31	7,56
23	9,86	12,60	7,08
24	9,56	12,64	$6,\!52$
25	9,05	12,31	5,78
26	8,22	11,53	4,94
27	7,03	10,12	3,94
28	5,34	7,90	2,78
29	3,05	4,64	1,46
30	0	0	0

Dans chaque cas, nous adopterons RAH comme table de mortalité de premier ordre. Si la mortalité se déroule effectivement comme

nous l'avons admis, le bénéfice de mortalité sur l'assurance mixte $30:\overline{30}$ de 10 000 francs, calculé d'après la formule

$$B = (q_{30+t}^{(\text{RAH})} - q_{30+t}^{(\text{eff.})}) (1 - l_{t+1}V_{30}^{(\text{RAH})})$$
 ,

est donné dans le tableau 4 ainsi que sur la représentation graphique 2.

Une autre question importante qui se pose à la suite de la modification des bases techniques est celle des réserves mathématiques.

Si nous affectons les symboles relatifs aux anciennes bases techniques de l'indice I, et ceux qui concernent les nouvelles bases de l'indice II, la réserve mathématique de toute assurance peut se calculer d'après les formules suivantes:

(8)
$${}_{t}V_{x}^{\mathbf{I}} = A_{x+t}^{\mathbf{I}} - P_{x}^{\mathbf{I}} a_{x+t}^{\mathbf{I}}.$$

(8')
$${}_{t}V_{x}^{\mathrm{II}} = A_{x+t}^{\mathrm{II}} - P_{\overline{x}}^{\underline{\mathrm{II}}} a_{x+t}^{\mathrm{II}}.$$

Nous utilisons la méthode prospective qui est tout indiquée en cas de changement des bases techniques. La formule (8) donne la réserve mathématique calculée d'après les anciennes bases; la formule (8'), celle qui est déterminée d'après les nouvelles bases techniques.

Mais, au cours de l'assurance, un élément important, la prime, ne peut cependant pas être modifié; la prime commerciale est fixée par contrat. D'où la possibilité d'envisager encore une formule pour le calcul de la réserve mathématique,

$${}_{t}V_{x}^{\mathrm{I},\,\mathrm{II}}=A_{x+t}^{\mathrm{II}}-P_{x}^{\mathrm{I}}a_{x+t}^{\mathrm{II}}\,.$$

La valeur actuelle des prestations de l'assuré est déterminée d'après la prime pure qui correspond à la prime du contrat. L'indice supérieur I, II signifie que le calcul de la réserve est fondé sur les nouvelles bases en ce qui concerne A et a, et sur les anciennes en ce qui concerne la prime P. Nous n'étudions ici que le calcul de la réserve sur primes pures. La question qui se pose est celle de savoir s'il convient, lorsqu'on change de bases techniques, d'utiliser la formule (8') qui fait intervenir la nouvelle prime, ou bien la formule (8'') qui est fondée sur l'ancienne prime.

Lorsque la prime suivant les nouvelles bases techniques est plus grande que celle qui résulte des anciennes bases,

$$P_x^{\text{II}} > P_x^{\text{I}}$$

on est généralement d'accord qu'il convient d'utiliser la formule (8"). A et a sont fondés sur les nouvelles bases, et P sur les anciennes; sinon, on surestimerait le terme soustractif P.a, c'est-à-dire la valeur actuelle des primes futures; la réserve portée au bilan serait trop faible. Cette situation s'est présentée pour les assurances de rentes différées et les capitaux différés. Le recul de la mortalité et celui du taux de l'intérêt ayant agi dans le même sens, les anciennes primes se sont révélées souvent beaucoup trop faibles. Les sociétés ont renforcé leurs réserves mathématiques en conséquence.

X

2

Dans les assurances en cas de décès, en revanche, le recul de la mortalité a pour effet une diminution de la prime; celui du taux de l'intérêt, une augmentation. La nouvelle prime est souvent plus petite que l'ancienne

$$P_x^{\mathrm{II}} < P_x^{\mathrm{I}}$$
.

A-t-on le droit d'utiliser la formule (8"), ou bien convient-il plutôt de calculer d'après la formule (8')? Les avis sont partagés. En faveur de la formule (8"), on invoque le fait que le contrat stipule le paiement de l'ancienne prime. La société a le droit, explique-t-on, d'estimer la valeur actuelle des primes de l'assuré sur la base de l'ancienne prime, comme elle avait le devoir de le faire lorsque P_x^{I} était plus petit que $P_x^{\rm II}$. Examinons d'un peu plus près ce qui se passe lorsqu'on est amené à changer les bases techniques, dans l'hypothèse $P_x^{\mathrm{II}} < P_x^{\mathrm{I}}$.

Supposons par exemple que les anciennes bases techniques soient la table MWI 3½ % et les nouvelles, RAH 3½ %. Les réserves mathématiques d'une assurance mixte 30:30 de 10 000 francs conclue à l'âge de 30 ans pour une durée de 30 ans, calculées d'après les formules (8), (8') et (8"), sont données dans le tableau 5, colonnes (2), (3) et (4) et sur la représentation graphique 3.

* lopisherwise: Wenn P"< P' giet bei Formel 8' also P" in den Einnahmen: n La visesve portie an bilan serait trop grande

Réserve mathématique d'une assurance mixte $30:\overline{30}$ de 10~000~francs

	ī																					-							_	_
Ax+t 3x+t P = 213,90: RAH 31/2 % (8)	Fr.	315	523	7.38 9.59	1186	1420	1661	1909	2162	2424	2693	2970	3253	3544 9843	0±00	4147	4781	5111	5449	5796	6153	6522	6901	7293	6692	8120	8557	9015	3443	10000
$Ax+t \}$ RAH 3% $Bx+t \}$ P = 264,10: MWI 3½% (7)	Fr.	648	— 419 	182 —	310	567	832	1105	1383	1672	1967	2272	2583	2903 3931	1020	3565 2010	9510 4963	4625	4997	5378	5771	6177	6593	7024	7470	7933	8414	8917	3440	10000
(P = $230,30$) (6)	Fr.	0 3	215	437 665	899	1141	1389	1646	1908	2179	2456	2741	3034	3334 3640	7400	3957 4980	4619	4952	5301	5660	6059	6409	6801	7205	7624	8059	8511	8983 0478	0.146	10000
$ \frac{Ax+t}{3x+t} \begin{cases} \text{BAH 3 } \frac{1}{2}\% \\ 10^{P*} = 224,20 \text{ (form. 10)} \\ (5) \end{cases} $	Fr.										2181	2463	2753	3052 3360	0000	3677	4339	4687	5044	5413	5794	6188	6596	7020	7462	7921	8402	8906	0450	10000
$ \frac{Ax+t}{3x+t} \begin{cases} \text{RAH 3 } \frac{1}{2}\% \\ P = 264, 10; \text{MWI 3 } \frac{1}{2}\% \\ 4 \end{cases} $	Fr.	- 910	— 693 460		20	254	511	2776	1050	1334	1626	1928	2239	2559 9880	6002	3228 2573	0-00 8088	4310	4692	5088	5496	5918	6355	6089	7282	7774	8288	8258 0000	0000	10000
RAH 3 $\frac{1}{2}$ % ($P = 213,90$) (3)	Fr.	0 0	199 405	405 618	839	1067	1302	1546	1797	2056	2324	2601	2887	3180 3480	04040	3793 4114	4444	4784	5135	5497	5871	6258	6659	7075	7508	0962	8431	8926	00000	10000
	Fr.	0 0	787 800 800	380 080	786	1000	1221	1449	1685	1929	2181	2442	2711	2990 3979	0.120	35 35 5 35 5 30 5 30	49.19	4548	4898	5262	5640	6035	6446	9289	7327	7802	8303	98834	0000	1 10000
t (1)		0 1	- 0	N 00	4	ಸಂ	9	<u>-</u>	x 0 <	6	10	11	12	13	H 1	15	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	87.6	i e	ne

Les trois courbes sont assez voisines. Cependant, pour un portefeuille d'assurances, les différences relatives de même que les différences absolues sont importantes.

Si, à partir de la $(t+1)^e$ année, la mortalité effective est celle de la table RAH et qu'on constitue dès ce moment-là la réserve suivant cette table — trait fort continu du graphique —, la prime RAH suffira exactement, avec les intérêts sur la réserve et sur cette prime, à payer les décès et à constituer la réserve RAH. On aura chaque année un bénéfice de mortalité égal à la différence entre la prime MWI et la prime RAH, plus les intérêts sur cette différence. Cependant, cela suppose qu'à la fin de la t^e année d'assurance la réserve mathématique MWI a été complétée au moyen des deniers de la société afin de disposer de la réserve RAH. L'assureur prête, en quelque sorte, le montant nécessaire, qui sera amorti comme nous l'avons déjà vu.

La courbe de la réserve MWI — trait fin continu du graphique croît d'abord plus lentement que la courbe RAH — dans notre exemple jusqu'à t=19 —, ensuite plus rapidement; la différence dans la croissance s'accentue avec les années. Si donc l'on continuait après la te année à constituer la réserve mathématique suivant la table MWI, cela absorberait les premières années, tant que la croissance de la courbe MWI est inférieure à celle de la courbe RAH, une plus petite partie de la prime que la constitution de la réserve RAH; en revanche, plus tard, lorsque la courbe MWI croît plus rapidement que la courbe RAH, la constitution de la réserve MWI exigerait plus que celle de la réserve RAH, et le surplus augmenterait d'année en année. Les décès effectifs à indemniser sont les mêmes, que la réserve soit calculée d'après MWI ou d'après RAH. En alimentant la réserve d'après MWI, on fait ressortir dans les comptes et on distribue des bénéfices trop élevés durant les premières années, aux dépens des années ultérieures. Nous retrouvons par une voie un peu différente des résultats que nous avions obtenus dans la première partie de l'exposé. La réserve MWI ne peut pas convenir.

Enfin, si l'on constituait, après la $t^{\rm e}$ année, la réserve suivant la courbe en petits traits fins, c'est-à-dire en faisant usage de la table RAH pour les valeurs A_{x+t} et a_{x+t} et len prenant pour P la prime MWI, cette dernière prime sérait absorbée entièrement ainsi que les intérêts pour couvrir le risque et constituer la réserve. La société

(uis des hups

Hebe few. NE Dre for we willed - post =

pourrait faire face à ses engagements à condition que la mortalité ne s'aggrave pas dans la suite, mais il n'y aurait plus à l'avenir de bénéfice de mortalité. Au moment où l'on passerait de la réserve MWI à la réserve suivant la courbe en question, ainsi que nous l'avons figuré sur le graphique 3 pour t = 10, on considérerait comme bénéfice immédiat le bénéfice de mortalité qui est contenu dans la prime du tarif. On escompterait les bénéfices de mortalité des exercices futurs; ils apparaîtraient dans les comptes avant qu'ils ne soient effectivement réalisés. On pourrait objecter que ces bénéfices compensent dans une certaine mesure les pertes que la société fait sur les assurances de rentes et les capitaux différés en calculant les réserves comme il est dit ci-dessus d'après la formule (8"), du moins si le passage à de nouvelles bases techniques se fait à la même époque. Cela ne nous paraît pas admissible non plus. Chaque catégorie d'assurance doit avoir des réserves suffisantes. La formule (8") pour le calcul de la réserve mathématique doit ainsi être exclue lorsque $P_x^{\rm II} < P_x^{\rm I}$. unlegante

Nous pouvons encore présenter la question sous un angle un peu différent. Dans l'assurance sur la vie, on a l'habitude de conclure les contrats en stipulant une prime constante; on dit aussi une prime nivelée pour bien marquer qu'elle doit garder pendant toute la durée de l'assurance le même niveau. Cette prime se calcule d'après des bases techniques de premier ordre convenablement choisies. On désire surtout éviter les primes croissantes. Cette remarque étant faite, reprenons notre question.

A la fin de la t^{e} année d'assurance, nous adoptons de nouvelles bases techniques, les anciennes ne pouvant plus convenir. Il est tout naturel de calculer quelle prime annuelle constante $_{t}P^{*}$ permettrait, dans les nouvelles circonstances, de continuer l'assurance à partir de la $(t+1)^{e}$ année. La mortalité effective est, par hypothèse, égale à la mortalité RAH. La société dispose de la réserve mathématique

MWI. La prime pure cherchée _tP* découle de la relation

(9)
$${}_{t}V_{x}^{(\text{MWI})} + {}_{t}P^* a_{x+t}^{(\text{RAH})} = A_{x+t}^{(\text{RAH})},$$

d'où nous tirons:

(10)
$${}_{t}P^{*} = P_{x}^{(\text{RAH})} + \frac{{}_{t}V_{x}^{(\text{RAH})} - {}_{t}V_{x}^{(\text{MWI})}}{a_{x+t}^{(\text{RAH})}}.$$

Some 440/41, hu élément impossant, la prime un pour copendant par étre modifire

Bei 8" und

labor x

La prime ${}_{t}P^{*}$ est égale à la prime RAH augmentée de la quote d'amortissement annuel dont il a déjà été question, qui doit permettre le passage de la réserve mathématique MWI à la réserve RAH. Si nous voulons respecter le principe de la prime constante, nous pourrons considérer comme bénéfice et répartir la différence entre la prime MWI et la prime ${}_{t}P^{*}$, soit, avec les intérêts,

(11)
$$B_{1} = (1+i) \left[P_{x}^{(\text{MWI})} - P_{x}^{(\text{RAH})} - \frac{{}_{t}V_{x}^{(\text{RAH})} - {}_{t}V_{x}^{(\text{MWI})}}{a_{x+t}^{(\text{RAH})}} \right].$$

C'est le bénéfice que nous avons trouvé plus haut, sous formule (6), par un autre raisonnement. Dans l'exemple de l'assurance mixte $30:\overline{30}$ de 10 000 francs, lorsque le passage des anciennes bases techniques aux nouvelles se fait après 10 ans, nous avions d'après le tableau 3, $B_1=41$ fr. 32. C'est moins que le bénéfice indiqué dans le tableau 2, colonne (2), qu'on réaliserait les premières années après le passage des anciennes bases aux nouvelles si l'on continuait à constituer la réserve d'après MWI. Le surplus peut servir à compléter peu à peu ladite réserve. Les moyens à disposition permettent d'alimenter une réserve plus forte que la réserve MWI. Dès lors, nous ne pouvons pas considérer la réserve calculée d'après la formule (8) comme suffisante, et encore moins celle qui résulte de la formule (8'').

Nous réservons donc une partie de la prime MWI pour la distribuer aux assurés, à titre de participation aux bénéfices. La société dispose du solde, soit de la prime constante $_tP^*$ définie par la relation (10) pour couvrir le risque et constituer la réserve mathématique. En conséquence, la réserve mathématique qu'on doit avoir τ années après le passage aux nouvelles bases techniques peut s'écrire:

d'où l'on déduit:

(12')
$$t_{t+\tau}V_x^* = {}_{t+\tau}V_x^{(\text{RAH})} - \frac{{}_{t}V_x^{(\text{RAH})} - {}_{t}V_x^{(\text{MWI})}}{a_{x+t}^{(\text{RAH})}} a_{x+t+\tau}^{(\text{RAH})}.$$

Au moment $\tau = 0$, elle est égale à la réserve MWI, puis elle est comprise entre les réserves MWI et RAH. Elle est plus petite que la réserve RAH calculée d'après la formule (8'). La différence est égale au

montant de la dette que la société devrait encore amortir après τ années, si au moment t du passage aux nouvelles bases techniques, elle avait emprunté la somme nécessaire pour compléter la réserve MWI de manière à disposer de la réserve RAH et qu'elle ait prélevé chaque

année sur la prime la quantité fixe $\frac{tV_x^{(\text{RAH})} - tV_x^{(\text{MWI})}}{a_{x+t}^{(\text{RAH})}}$ pour l'amortisse-

ment. Si le passage aux nouvelles bases techniques a lieu après t=10 années, on obtient pour la réserve mathématique $_{t+\tau}V_x^*$ de l'assurance mixte $30:\overline{30}$ les valeurs qui figurent dans la colonne (5) du tableau 5, la prime $_{10}P^*$ étant de 224 fr. 20.

En résumé, si l'on constitue la réserve mathématique d'après la formule (8), on a pratiquement une assurance à primes croissantes. En utilisant la formule (8"), on considère déjà au moment du passage aux nouvelles bases techniques comme bénéfices effectivement réalisés les bénéfices qu'on escompte faire durant les années futures; on les comptabilise en une fois et l'assuré doit ensuite payer pendant toute la durée de l'assurance la prime élevée MWI. Ces formules doivent être rejetées. En revanche, la réserve peut être constituée sur la base de la table RAH, la prime utilisée pour le calcul étant $_{t}P^{*}$, définie par la formule (10). Dans la pratique, lorsqu'il s'agit d'un portefeuille d'assurances, le calcul de la réserve $t+\tau V_x^*$ serait malaisé; il faudrait déterminer la prime _tP* pour chaque police. On utilisera de préférence la formule (8') qui fait intervenir la prime P_x^{II} suivant les nouvelles bases. Nous n'avons pas examiné les différences qui en résultent pour des portefeuilles entiers, notre but étant plutôt de montrer que les formules (8) et (8") ne conduisent pas à des résultats satisfaisants.

Les problèmes sur les réserves mathématiques sont souvent assez délicats à résoudre. Les variations de la réserve sous l'influence d'un changement dans la mortalité sont encore mal connues; il s'agit d'un problème avec un grand nombre de variables. Dans nos raisonnements, nous nous sommes appuyés à diverses reprises sur des résultats valables lorsqu'on passe de la table MWI à la table RAH; ils sont vrais sans doute pour beaucoup de tables, en particulier pour celles qu'on utilise en Suisse; cependant, ils ne se vérifient pas toujours. En examinant par exemple comment il convient de constituer la réserve mathématique lorsque la nouvelle prime P^{II} est plus petite que l'ancienne, P^{I} , nous avons fait implicitement quelques hypothèses.

La différence des réserves RAH et MWI, ${}_tV_x^{({\rm RAH})} - {}_tV_x^{({\rm MWI})}$, est toujours positive dans l'exemple considéré. Nous en avons déduit, entre autres, que la réserve MWI doit être complétée et que la prime ${}_tP^*$ est plus grande que la prime RAH. Cependant, de $P^{\rm II} < P^{\rm I}$, nous ne pouvons pas déduire que la réserve ${}_tV_x^{\rm II}$ est nécessairement plus grande que ${}_tV_x^{\rm I}$. Nous savons au contraire que ce n'est pas toujours le cas. Le théorème du changement de signe de Moser nous en fournit des exemples.

Nous pourrions limiter davantage le problème; nous pourrions par exemple supposer que la nouvelle table de mortalité II satisfait à la condition

$$A_{x+t:\overline{n-t}|}^{\mathrm{II}} < A_{x+t:\overline{n-t}|}^{\mathrm{I}},$$

pour toutes les valeurs des paramètres x, t et n. On en déduit certaines conclusions intéressantes. Cependant, il n'en résulte pas que la réserve mathématique ${}_tV_x^{\rm II}$ déterminée d'après les nouvelles bases techniques, formule (8'), est toujours plus grande que la réserve calculée suivant les anciennes bases, formule (8). Ce n'est du reste pas nécessairement le cas; il suffit de considérer l'exemple de l'assurance mixte $40:\overline{25}$ pour le démontrer, en choisissant pour les anciennes bases techniques la table SM 1921—1930 $3\frac{1}{2}$ % et pour les nouvelles une table extrême donnant à tous les âges des taux de mortalité nuls, le taux d'intérêt étant également de $3\frac{1}{2}$ %. Pendant 10 ans, la réserve ${}_tV^{\rm II}$ est plus petite que ${}_tV^{\rm I}$, puis elle est plus grande.

Les développements qui précèdent ne s'appliquent donc pas toujours; il y a lieu d'examiner le problème dans chaque cas. Cependant, les résultats obtenus ont de la valeur pour les tables qui sont utilisées le plus souvent en Suisse, et nous espérons que nos considérations pourront servir à d'autres recherches.

Dans notre exemple, seule la table de mortalité a été modifiée. Cela n'a pas d'importance pour le raisonnement. Quelques sociétés ont encore abaissé le taux technique d'intérêt ou s'apprêtent à le faire, celui de $3\frac{1}{2}$ % qui avait été choisi pour les anciens tarifs paraissant maintenant trop élevé. Pour fixer les idées, choisissons un nouveau taux technique de 3 %. Nous avons reporté dans le tableau 5, colonnes (6) et (7), et sur le graphique 3, la réserve RAH 3 % établie d'après la formule (8'), ainsi que la réserve calculée d'après (8''), la

table RAH 3 % étant utilisée pour A_{x+t} et a_{x+t} , tandis que la prime est celle de la table MWI $3\frac{1}{2}$ %. Cette dernière réserve est négative lorsque t est petit, mais elle augmente rapidement et surpasse à partir de t=16 la réserve MWI $3\frac{1}{2}$ %. Elle est, à tous les âges, inférieure à la réserve RAH 3 %, la prime RAH 3 % étant plus petite que la prime MWI $3\frac{1}{2}$ %.

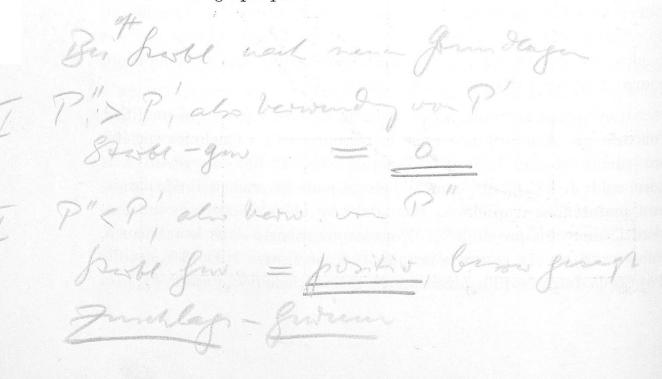
Enfin, nous avons encore indiqué dans le tableau 5, colonne (8), et sur le graphique 3, les valeurs de la réserve calculée d'après la formule (8"), A_{x+t} et a_{x+t} étant fondés sur la table RAH 3% et la prime sur RAH $3\frac{1}{2}$ %. Cela facilitera les considérations sur le passage à de nouvelles bases techniques lorsque le taux d'intérêt seul est modifié.

Notre conclusion sera qu'après la modification des bases techniques, il convient en général de calculer les réserves mathématiques en adoptant dans la formule

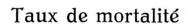
$$_{t}V_{x}=A_{x+t}-P_{x}\,\mathsf{a}_{x+t}$$

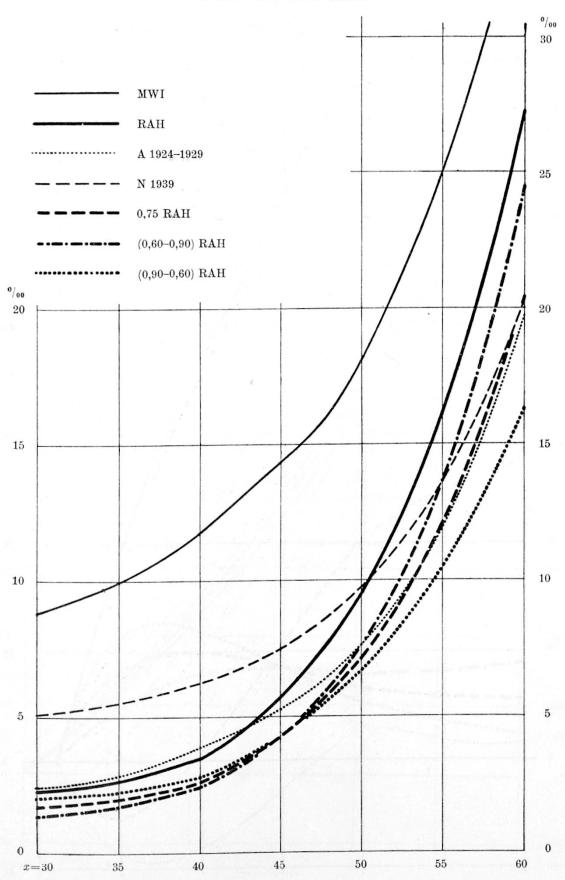
les nouvelles bases techniques pour déterminer les valeurs actuelles A_{x+t} et a_{x+t} , tandis qu'on choisira comme prime P_x la plus petite des primes $P_x^{\mathbf{I}}$ et $P_x^{\mathbf{II}}$ résultant respectivement des anciennes et des nouvelles bases.

Je tiens à remercier encore ici deux de mes collègues du Bureau fédéral des assurances de leur collaboration dans la présente étude: M^{11e} Leuba, qui a eu l'obligeance de faire les calculs, et M. Zaugg, qui a dessiné les graphiques.



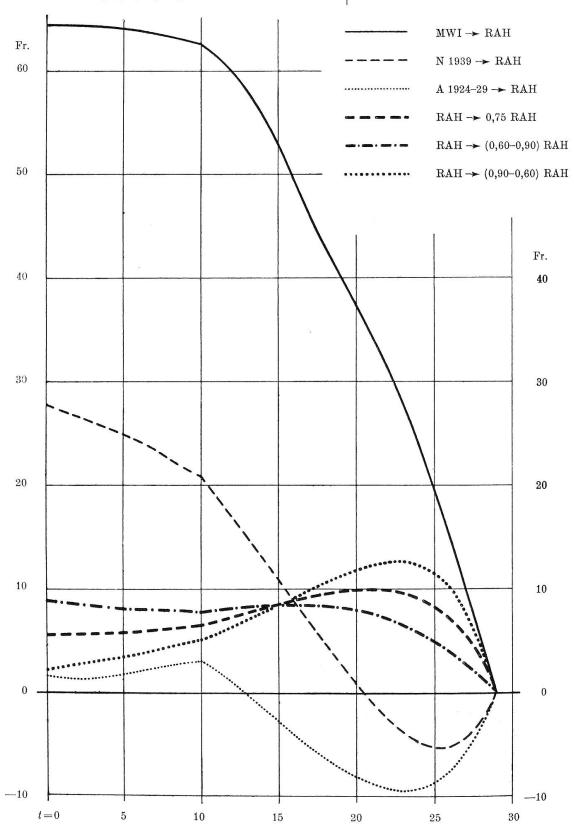
Graphique 1





Bénéfice de mortalité

sur une assurance mixte $30:\overline{30}|$ de fr. $10\,000$



Graphique 3

Réserve mathématique

