Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 46 (1946)

Artikel: Über die Bedeutung der infinitesimalen Betrachtungsweise für die Grundlagen der Versicherungstechnik

Autor: Zwinggi, Ernst

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966873

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über die Bedeutung der infinitesimalen Betrachtungsweise für die Grundlagen der Versicherungstechnik

Nach einem Vortrag, gehalten an der Jahresversammlung vom 13. Oktober 1945 der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker

Von *Ernst Zwinggi*, Basel

Einleitung

Über den unmittelbaren Nutzen der infinitesimalen Betrachtungsweise in der Versicherungs*technik*, insbesondere über die *praktische* Bedeutung der kontinuierlichen Methode, sind die Meinungen geteilt. Es wäre aber unrichtig, in diesem Tatbestand vereinfachend den Ausdruck des üblichen Zwiespaltes «Theorie» und «Praxis» sehen zu wollen, als ob die «Praktiker» auf der einen, die «Theoretiker» auf der andern Seite ständen. Die Ansätze der kontinuierlichen Methode beispielsweise bereiten dem Studierenden der Versicherungsmathematik zu Beginn offensichtliche Schwierigkeiten, während doch zu erwarten wäre, dass die enge Berührung mit der reinen Mathematik erleichternd wirken würde. Unterschiede in der Art der Ausbildung vermögen die spätere Arbeitsweise nachhaltig zu bestimmen; so ist es auffallend, wie die Aktuare der nordischen Länder der kontinuierlichen Methode auch für die Lösung «praktischer» Fragen weit mehr zugetan sind als z. B. diejenigen unseres Landes.

Ohne wesentliche Einrede ist die Anwendung der kontinuierlichen Betrachtungsweise auf die Abklärung *grundsätzlicher* Fragen geblieben, wie z. B. auf das allgemeine Verhalten des Deckungskapitals bei Änderung der Rechnungsgrundlagen. Sobald aber eine Formel auch der *numerischen Auswertung* zugänglich sein soll, erfolgt meist die völlige Abkehr vom infinitesimalen Ansatz. Nur selten wird versucht, das Integral — um ein solches wird es sich meist handeln —

in dem Sinne aufzulösen oder umzudeuten, dass damit «gerechnet» werden kann; im Gegenteil, der ursprüngliche Ansatz wird gänzlich verlassen, und der neue geht dann aus von den *jährlichen, «beobachtbaren»* Vorgangszahlen.

Diese oftmals einer Ablehnung der Hilfsmittel der Analysis gleichkommende Einstellung ist aber nur scheinbar, nur äusserlich. Sobald eine *Versicherungsform mit mehr als einer Ausscheideursache* vorliegt, kann die Berechnung und die eindeutige Verknüpfung der jährlichen Vorgangszahlen ohne die Betrachtung der Ereignisse über unendlich kleine Zeitabschnitte gar nicht erfolgen. (Ob dabei Differenzierbarkeit der Funktionen im Sinne der «klassischen» Theorie der Intensitätsfunktionen vorausgesetzt wird oder nicht, ist mehr eine Frage des Verfahrens als grundsätzlicher Art.) Der Ansatz mit den jährlichen Vorgangszahlen ist nicht der strenge Ausgangspunkt der Ableitung, sondern bereits der Abschluss eines vorbereitenden Weges, der nur unter Verwendung von Begriffen der Infinitesimalrechnung beschritten werden konnte und der zur eigentlichen «Auswertung» überleitet. Jeder Berechnung im engeren Sinne geht also eine methodische Aufbereitung voran: der infinitesimale Ansatz wird umgeformt in eine Beziehung, welche die jährlichen Vorgangszahlen enthält; diese Beziehung ist — um es nochmals zu sagen — nicht der Beginn der Ableitung, sondern bereits eine «Rechenregel», die aus sich allein nicht oder nur selten erklärlich ist.

Im ersten der beiden folgenden, nur lose zusammenhängenden Beispiele wollen wir zeigen, wie einfach und durchsichtig sich auch rechnerisch die *Verknüpfung von Personengruppen zu versicherten Gesamtheiten* bei Wahl der infinitesimalen Betrachtungsweise gestaltet. Ihre *Nutzanwendung* werden die Ergebnisse in erster Linie in der *Witwen- und Waisenversicherung* finden.

Das zweite Beispiel soll dartun, wie die *Kontributionsformel* der kontinuierlichen Betrachtungsweise bei Vorliegen mehrerer Ausscheideursachen sich leicht so umformen lässt, dass für die verschiedenen Komponenten des Überschusses ein mit wenig Rechenaufwand auswertbares Schema entsteht.

Wir glauben durch eine, wenn auch auf zwei Beispiele beschränkte Darstellung von Aufgaben aus der Praxis am besten belegen zu können, welche Vorteile das Beherrschen und Auswerten der infinitesimalen Ansätze dem «Praktiker» bietet.

Versicherung auf verbundene Leben [1])

1. Gegeben ist eine ursprüngliche Gesamtheit von $l(o)$ gleichartigen Verbindungen; jede Verbindung kann aus einer oder aus mehreren Personen bestehen. Auf die Gesamtheit (und damit auf die Personen in den Verbindungen) wirken h verschiedene, als voneinander unabhängig angenommene Ausscheideursachen ein. Eine Verbindung soll als aufgelöst gelten, wenn eine ihr angehörende Person ausscheidet; das Ausscheiden geschieht stets endgültig. Die praktisch meist vorkommenden Fälle sind:

a) Die Verbindung besteht aus *einer* Person: Versicherungen auf *ein* Leben:

- *α)* *eine* Ausscheideursache: Tod;
- *β)* *zwei* Ausscheideursachen: Tod und Invalidität, oder Tod und Wiederverheiratung, oder Tod und Stornierung.

b) Die Verbindung besteht aus *zwei und mehr* Personen: Versicherungen auf *zwei und mehr verbundene* Leben:

- *α)* *zwei* Leben und *zwei* Ausscheideursachen: Tod der ersten und Tod der zweiten Person;
- *β)* *zwei* Leben und *drei* Ausscheideursachen: Tod und Invalidierung der ersten Person, Tod der zweiten Person.

Die Anzahl der Verbindungen, welche in der Zeitspanne 0 bis t infolge der Ursache i aufgelöst wird, sei allgemein ${}^{i}f(t)$. Dann ist die Zahl der im Zeitpunkt t noch bestehenden Verbindungen gleich

$$l(t) = l(o) - \sum_{i=1}^{h} {}^{i}f(t) . \tag{1}$$

Als *abhängige k-jährige Rate* [2]) (Wahrscheinlichkeit) *der Auflösung* (des Ausscheidens) infolge der Ursache i benennen wir

---

[1]) Es handelt sich hier u. a. um eine knappe Wiedergabe der allgemeinen Ausführungen im I. Teil des Lehrbuches «Versicherungsmathematik» (Verlag Birkhäuser, Basel, 1946) mit Anwendungen auf die Versicherung verbundener Leben.

[2]) Wir vermeiden in diesem Zusammenhang absichtlich den Gebrauch des Wortes «Wahrscheinlichkeit», um nicht den Eindruck zu erwecken, es seien unsere Darlegungen an die Anwendung der Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung gebunden.

$$ {}^{*}_{k}q^{i}(t) = \frac{{}^{i}f(t+k) - {}^{i}f(t)}{l(t)} \tag{2} $$

und als *totale k-jährige Rate* (Wahrscheinlichkeit) *der Auflösung* (des Ausscheidens)

$$ {}_{k}q(t) = \frac{l(t) - l(t+k)}{l(t)} . \tag{3} $$

Sodann definieren wir unter der Annahme, $l(t)$ und ${}^{i}f(t)$ seien differenzierbare Funktionen [1]), als *Intensität* der Auflösung (des Ausscheidens) infolge der Ursache i den Grenzwert

$$ \lim_{k \to 0} {}^{*}_{k}q^{i}(t) = \mu^{i}(t)\,dt = \frac{d\,{}^{i}f(t)}{dt}\,\frac{1}{l(t)}\,dt \tag{4} $$

und als *Intensität* der Auflösung (des Ausscheidens) durch alle Ursachen zusammen

$$ \lim_{k \to 0} {}_{k}q(t) = \mu(t)\,dt = \frac{-dl(t)}{dt}\,\frac{1}{l(t)}\,dt = \frac{-d}{dt}\,[ln\,l(t)]\,dt . \tag{5} $$

Wegen (1) ist

$$ \mu(t) = \sum_{i=1}^{h} \mu^{i}(t) . \tag{6} $$

2. Aus der Gleichung (5) lässt sich $l(t)$ auf zwei Arten als Funktion der Intensitäten darstellen. Durch Integration von $dln(t) = -\mu(t)\,dt$ folgt

$$ ln\,\frac{l(t+k)}{l(t)} = -\int_{0}^{k} \mu(t+\zeta)\,d\zeta $$

und daraus

$$ \frac{l(t+k)}{l(t)} = 1 - {}_{k}q(t) = e^{-\int_{0}^{k} \mu(t+\zeta)\,d\zeta} . \tag{7} $$

Bei Integration von $dl(t+k) = -l(t+k)\,\mu(t+k)\,dk$ wird dagegen

---

[1]) Vgl. die Einleitung.

$$\frac{l(t+k)}{l(t)} = 1 - {}_kq(t) = 1 - \int_0^k \frac{l(t+\zeta)\,\mu(t+\zeta)}{l(t)}\,d\zeta\,. \tag{8}$$

Unter Verwendung von (6), (2) und (3) und mit der Bezeichnung

$$1 - {}_kq^i(t) = e^{-\int_0^k \mu^i(t+\zeta)\,d\zeta}$$

lassen sich (7) und (8) weiter schreiben als

$$1 - {}_kq(t) = \prod_{i=1}^{h} e^{-\int_0^k \mu^i(t+\zeta)\,d\zeta} = \prod_{i=1}^{h} [1 - {}_kq^i(t)] \tag{9}$$

oder

$$1 - {}_kq(t) = 1 - \sum_{i=1}^{h} \int_0^k \frac{l(t+\zeta)\,\mu^i(t+\zeta)}{l(t)}\,d\zeta = 1 - \sum_{i=1}^{h} {}^*_kq^i(t)\,. \tag{10}$$

Man bezeichnet ${}_kq^i(t)$ als *unabhängige* k-jährige Rate der Auflösung (Ausscheidewahrscheinlichkeit) und ${}^*_kq^i(t)$ als *abhängige* k-jährige Rate der Auflösung (Ausscheidewahrscheinlichkeit).

Bei der gewählten Art der Ableitung erscheint es belanglos, ob sich ${}_kq^i(t)$ und ${}^*_kq^i(t)$ unmittelbar messen lassen oder nicht; die Gleichungen (9) und (10) sind ausschliesslich das Ergebnis eines ungleich angesetzten Integrationsprozesses. Diese Tatsache wird hie und da übersehen, indem schon in der Definition eine Verbindung mit den Beobachtungszahlen gesucht wird [1]).

3. Zwischen ${}_kq^i(t)$ und ${}^*_kq^i(t)$ gilt mit $k = 1$ näherungsweise der folgende Zusammenhang. Aus (9) ist

$$\mu^i(t+\zeta) = \frac{-d}{d\zeta}\,ln\,[1 - {}_\zeta q^i(t)] = \frac{1}{1 - {}_\zeta q^i(t)}\,\frac{d}{d\zeta}\,{}_\zeta q^i(t)\,;$$

eingesetzt in

$${}^*q^i(t) = \int_0^1 \frac{l(t+\zeta)\,\mu^i(t+\zeta)}{l(t)}\,d\zeta$$

---

[1]) Z. B. unabhängige Rate = probabilité corrigée, abhängige Rate = probabilité expérimentale.

ergibt unter Beachtung von (7) und (9) die ohne weiteres verständliche Darstellung

$$^*q^i(t) = \int_0^1 \frac{\prod_{i=1}^{h}[1 - {}_kq^i(t)]}{1 - {}_kq^i(t)} \, d[{}_kq^i(t)] = \int_0^1 [1 - {}_kq^{-i}(t)] \, d[{}_kq^i(t)] .$$

Wird als Näherung angenommen, ${}_kq^{-i}(t)$ und ${}_kq^i(t)$ verlaufen im Intervall 0 bis 1 linear [1]), so wird

$$^*q^i(t) \sim \int_0^1 [1 - kq^{-i}(t)] \, d[kq^i(t)] = q^i(t) \left[1 - \frac{q^{-i}(t)}{2} \right] =$$

$$= q^i(t) \left[1 - \frac{1 - \frac{\prod_{i=1}^{h}[1 - q^i(t)]}{1 - q^i(t)}}{2} \right] \sim q^i(t) \frac{\prod_{i=1}^{h} \left[1 - \frac{q^i(t)}{2} \right]}{1 - \frac{q^i(t)}{2}} . \qquad (11)$$

4. Die Zahl der Verbindungen, welche aus der Gesamtheit $l(t)$ infolge der Ursache i im Zeitabschnitt t bis $t+1$ aufgelöst wird, ist mit (10) und (11) allgemein darstellbar als

$$\int_0^1 l(t+\zeta) \, \mu^i(t+\zeta) \, d\zeta = l(t) \, ^*q^i(t) \sim l(t) \, q^i(t) \frac{\prod_{i=1}^{h} \left[1 - \frac{q^i(t)}{2} \right]}{1 - \frac{q^i(t)}{2}} . \qquad (12)$$

5. *Beispiele zu 4.*

a) Witwenversicherung: Mit der üblichen Bezeichnung

$$l(t) = l^{aa}_{x+t} \, l_{y+t} , \; q^1(t) = q^{aa}_{x+t} , \; q^2(t) = i_{x+t} \text{ und } q^3(t) = q_{y+t}$$

folgt aus (12) für die Zahl der im Alter von x bis $x+1$ Jahren als verheiratet und aktiv sterbenden Männer

---

[1]) Sofern für $q^i(t)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, h$, der lineare Verlauf angenommen wird, ist er für $q^{-i}(t)$ nur noch näherungsweise erfüllt; wir haben es, wie öfters in der Versicherungsmathematik, mit Voraussetzungen zu tun, die sich gegenseitig ausschliessen, für die praktische Rechnung aber genügend genaue Ergebnisse zeitigen.

$$l^{aa}_{x+t}\, l_{y+t}\, q^{aa}_{x+t} \left[1 - \frac{i_{x+t}}{2}\right]\left[1 - \frac{q_{y+t}}{2}\right] \tag{13}$$

und in gleicher Weise für die Zahl der als verheiratet invalid werdenden Männer

$$l^{aa}_{x+t}\, l_{y+t}\, i_{x+t} \left[1 - \frac{q^{aa}_{x+t}}{2}\right]\left[1 - \frac{q_{y+t}}{2}\right]. \tag{14}$$

b) Waisenversicherung nach der direkten Methode: Die Rente betrage «1» für Vaterwaisen und «2» für Vollwaisen. Sofern der Vater bei Lebzeiten der Mutter stirbt, beginnt die Einfachwaisenrente «1» zu laufen, und zugleich erwirbt das Kind die Anwartschaft auf die Überlebensrente «1», zahlbar nach dem spätern Ableben der Mutter. Stirbt dagegen die Mutter bei Lebzeiten des Vaters, so wird für das Kind die Anwartschaft ausgelöst auf die Überlebensrente «2», zahlbar nach dem spätern Ableben des Vaters. Der Barwert der Anwartschaft auf die nach dem Tode (bei Lebzeiten der Mutter) des Vaters zahlbare Rente «1» einschliesslich der Anwartschaft auf die Erhöhung um «1» auf «2» beim spätern Ableben der Mutter ist

$$\sum_{t=0}^{s-z-1} v^{t+\frac{1}{2}} \frac{l_{x+t}}{l_x} \frac{l_{y+t}}{l_y} \frac{l_{z+t}}{l_z} q_{x+t} \left[1 - \frac{q_{y+t}}{2}\right]\left[1 - \frac{q_{z+t}}{2}\right] \cdot$$

$$\cdot \left[\mathsf{a}_{z+t+\frac{1}{2}:\overline{s-z-t-\frac{1}{2}}|} + \mathsf{a}_{y+t+\frac{1}{2}/z+t+\frac{1}{2}:\overline{s-z-t-\frac{1}{2}}|}\right]; \tag{15}$$

der Barwert der Anwartschaft auf die Rente «2» beim Tode (bei Lebzeiten des Vaters) der Mutter wird ähnlich

$$2\sum_{t=0}^{s-z-1} v^{t+\frac{1}{2}} \frac{l_{x+t}}{l_x} \frac{l_{y+t}}{l_y} \frac{l_{z+t}}{l_z} q_{y+t} \left[1 - \frac{q_{x+t}}{2}\right]\left[1 - \frac{q_{z+t}}{2}\right] \mathsf{a}_{x+t+\frac{1}{2}/z+t+\frac{1}{2}:\overline{s-z-t-\frac{1}{2}}|} \tag{16}$$

wo

$$\mathsf{a}_{x/z:\overline{s-z}|} = \sum_{t=0}^{s-z-1} v^{t+\frac{1}{2}} \frac{l_{x+t}}{l_x} \frac{l_{z+t}}{l_z} q_{x+t} \left[1 - \frac{q_{z+t}}{2}\right] \mathsf{a}_{z+t+\frac{1}{2}:\overline{s-z-t-\frac{1}{2}}|}. \tag{17}$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass die Renten rechnungsmässig in der Jahresmitte zu laufen beginnen.

6. Oftmals bewirkt die Auflösung der Verbindung nicht die Beendigung der Versicherung; für den überlebenden Teil der Verbindung kann

a) die Versicherung unverändert weiter laufen: z. B. gemischte Versicherung auf das «letzte» Leben;

b) eine Versicherungsleistung zu laufen beginnen: z. B. Witwenrente oder Waisenrente zahlbar infolge Ableben des Mannes;

c) ein geänderter anwartschaftlicher Anspruch entstehen: z. B. Anwartschaft auf eine Invaliden-Witwenrente, zahlbar nach dem Ableben des nunmehr invaliden Mannes oder Anwartschaft auf Erhöhung der Waisenrente nach dem Ableben der Mutter.

Wir können die drei Möglichkeiten allgemein durch die Annahme erfassen, es erfolge bei Auflösung der Verbindung durch eine oder durch mehrere bestimmte Ursachen ein Übertreten der verbleibenden Personen in eine zweite Gesamtheit von neuerdings gleichartigen Verbindungen, wobei die Zahl der Personen in einer Verbindung auch gleich gross bleiben kann[1]). Durch Invalidierung des Ehemannes z. B. wird die Verbindung aus der Gesamtheit der «aktiven» Ehepaare herausgelöst und in die Gesamtheit der Verbindungen der «invaliden» Ehepaare übergeführt.

Wir setzen voraus, unter den h Ursachen, welche die Verbindung auflösen, bewirke die Ursache $i = g$ den Übergang der verbleibenden Personen zu der andern Gesamtheit. Die erste Gesamtheit sei $l^{\mathrm{I}}(t)$ mit

$$\frac{l^{\mathrm{I}}(t+k)}{l^{\mathrm{I}}(t)} = \prod_{i=1}^{h} [1 - {}_k q^i(t)],$$

die zweite $l^{\mathrm{II}}(t)$ mit h' Ausscheideursachen und

$$\frac{l^{\mathrm{II}}(t+k)}{l^{\mathrm{II}}(t)} = \prod_{i=1}^{h'} [1 - {}_k \tilde{q}^i(t)] = 1 - {}_k \tilde{q}(t).$$

Wir suchen die einjährige Rate des Übertretens von I zu II und Verbleibens in II, d. h. die Zahl der Verbindungen, welche infolge der

---

[1]) Bei Übertritt infolge Invalidität z. B. bleibt die Zahl der Personen in einer Verbindung gleich gross, bei Übertritt infolge Tod wird sie herabgesetzt.

Ursache g auf der Zeitstrecke t bis $t+1$ von I herausgelöst und nach Ablauf der Periode in II noch enthalten ist, bezogen auf die Gesamtheit «1». Es ist der gesuchte Wert, ausgedrückt durch die Ordnungen und die Intensitäten,

$$p^{\mathrm{I/II}}(t) = \int_0^1 \frac{l^{\mathrm{I}}(t+\zeta)}{l^{\mathrm{I}}(t)} \mu^g(t+\zeta) \frac{l^{\mathrm{II}}(t+1)}{l^{\mathrm{II}}(t+\zeta)} d\zeta .$$

Weil aber

$$\frac{l^{\mathrm{I}}(t+k)}{l^{\mathrm{I}}(t)} = [1 - {}_kq^g(t)]\,[1 - {}_kq^{-g}(t)],$$

$$\mu^g(t+k) = \frac{1}{1 - {}_kq^g(t)} \frac{d}{dk} {}_kq^g(t),$$

$$\frac{l^{\mathrm{II}}(t+1)}{l^{\mathrm{II}}(t+k)} = \frac{1 - \tilde{q}(t)}{1 - {}_k\tilde{q}(t)},$$

folgt

$$p^{\mathrm{I/II}}(t) = [1 - \tilde{q}(t)] \int_0^1 \frac{1 - {}_\zeta q^{-g}(t)}{1 - {}_\zeta\tilde{q}(t)} d_\zeta q^g(t) \sim$$

$$\sim [1 - \tilde{q}(t)] \int_0^1 [1 - {}_\zeta q^{-g}(t) + {}_\zeta\tilde{q}(t)]\, d_\zeta q^g(t)$$

und bei linearem Verlauf aller unter dem Integral auftretenden Raten

$$p^{\mathrm{I/II}}(t) \sim [1 - \tilde{q}(t)]\, q^g(t) \int_0^1 [1 - \zeta q^{-g}(t) + \zeta\tilde{q}(t)]\, d\zeta =$$

$$= [1 - \tilde{q}(t)]\, q^g(t) \left[1 - \frac{q^{-g}(t)}{2} + \frac{\tilde{q}(t)}{2} \right]^{1)} \tag{18}$$

[1]) *A. Berger* (Prinzipien der Lebensversicherungstechnik, 2. Band, Berlin 1925, S. 236) gibt Beziehungen an, die von der unsrigen in der Form, kaum aber im ziffernmässigen Ergebnis abweichen; es gilt bei Annahme von h und h' Ausscheideursachen:

$$p^{\mathrm{I/II}}(t) \sim \frac{1 - \tilde{q}(t)}{1 - \frac{\tilde{q}(t)}{2}}\, q^g(t) \left[1 - \frac{q^{-g}(t)}{2} \right]$$

oder

$$p^{\mathrm{I/II}} \sim q^g(t) \left[1 - \frac{q^{-g}(t)}{2} \right] \left[1 - \frac{\tilde{q}(t)}{2} \right].$$

7. *Beispiel: Witwenversicherung:* Gleichung (18) soll auf den Fall angewendet werden, wo die Gesamtheit $l^{\mathrm{I}}(t)$ gleich ist der Zahl der «aktiven» Ehepaare $l^{aa}_{x+t}\, l_{y+t}$ und durch den Tod des Mannes x als aktiv der Übertritt der Frau y zu der Gesamtheit $l^{\mathrm{II}}(t) = l^{ww}_{y+t}$ der Witwen erfolgt. Die Zahl der Witwen am Ende des Sterbejahres ist bei Vernachlässigung der Ehescheidung als Auflösungsursache, wenn

$$q^{g}(t) = q^{aa}_{x+t}\,,\; q^{-g}(t) = 1-(1-i_{x+t})(1-q_{y+t})\,,\; \tilde{q}^{1}(t) = q^{ww}_{y+t}\,,$$

$$\tilde{q}^{2}(t) = h^{w}_{y+t} \text{ und } \tilde{q}(t) = 1-(1-q^{ww}_{y+t})(1-h^{w}_{y+t})\,,$$

gleich

$$l^{\mathrm{I}}(t)\, p^{\mathrm{I/II}}(t) = l^{aa}_{x+t}\, l_{y+t}\,(1-q^{ww}_{y+t})(1-h^{w}_{y+t})\, q^{aa}_{x+t}\,\cdot$$

$$\cdot\left[1-\frac{1-(1-i_{x+t})(1-q_{y+t})}{2}+\frac{1-(1-q^{ww}_{y+t})(1-h^{w}_{y+t})}{2}\right]. \quad (19)$$

Ohne die infinitesimale Betrachtungsweise zu verwenden, würde es schwer halten, die fünf auftretenden unabhängigen Raten (Wahrscheinlichkeiten) zweifelsfrei zu verbinden [1]).

8. Bei der Todesfallversicherung auf das «letzte» Leben bedürfen wir der «Wahrscheinlichkeit», dass z. B. x vor Erleben des Alters $x+t$ stirbt, y dagegen das Alter $y+t$ erlebt. Nach den Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird man dafür $\frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}\,\frac{l_{y+t}}{l_y}$ setzen. Mit Hilfe von (18) ist es aber möglich, bei der Berechnung von der Anwendung der Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung abzusehen. Sofern y vor und nach dem Tode von x der gleichen Sterblichkeit unterworfen ist, also $q^{-g}(t) = \tilde{q}(t) = q_{y+t}$, ist

$$p^{\mathrm{I/II}}(t) = (1-q_{y+t})\, q_{x+t} = q_{x+t}\, p_{y+t}\,.$$

Aus $l_{x+k}\, l_{y+k}$ Verbindungen entstehen auf Jahresende $l_{x+k}\, l_{y+k}\, q_{x+k}\, p_{y+k}$ überlebende Personen y; multipliziert mit $\frac{l_{y+t}}{l_{y+k+1}}$ und summiert über alle Sterbetermine von x ergibt

[1]) Es darf vermutet werden, dass sich die Formeln des Verfahrens der Bevölkerungsfortschreibung verhältnismässig einfach herleiten lassen, wenn ähnlich vorgegangen wird.

$$\sum_{k=0}^{t-1} l_{x+k} l_{y+k} \; q_{x+k} p_{y+k} \; \frac{l_{y+t}}{l_{y+k+1}} \; ;$$

daraus folgt für die «Wahrscheinlichkeit», dass x vor Erreichen des Alters $x+t$ stirbt, y das Alter $y+t$ aber erlebt,

$$\sum_{k=0}^{t-1} \frac{l_{x+k} l_{y+k}}{l_x l_y} \; q_{x+k} \, p_{y+k} \; \frac{l_{y+t}}{l_{y+k+1}} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} \; \frac{l_{y+t}}{l_y} \; .$$

Dabei ist gut zu beachten, dass die einzelnen Multiplikationen nicht etwa die verkappte Anwendung eines Satzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung, sondern durchwegs die Ausnützung von Beziehungen bedeuten, welche ohne die Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu verwenden, gefunden worden sind. Mit der Ausschaltung des Begriffes «Wahrscheinlichkeit» aus dem mathematischen Aufbau der Versicherung auf verbundene Leben ist aber keinesfalls eine Herabsetzung des Wertes der Wahrscheinlichkeitsrechnung als Grundlage der Mathematik der Lebensversicherung beabsichtigt. Wir wollten lediglich zeigen, wie es auch ohne Heranziehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung möglich ist, die Grundwerte der Versicherung auf verbundene Leben abzuleiten. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu verwenden ist *ein* Weg unter verschiedenen gangbaren.

Kontributionsformel und Schema der Gewinn- und Verlustrechnung

1. Die Zerlegung der Überschüsse in die Komponenten gehört zu den jährlich wiederkehrenden Aufgaben des Bilanzmathematikers; meist liegt ein mehr oder weniger umfangreiches Schema vor, aus dem die Gewinnkomponenten nach Einsetzen der Zahlen des Geschäftsjahres abgelesen werden können. Die Gewinnung und Überprüfung des Schemas kann auf verschiedenen Wegen erfolgen; besonders durchsichtig sind die Ableitungen, sobald die kontinuierliche Betrachtungsweise gewählt wird.

Der Versicherer soll z. B. für gemischte Versicherungen auf Ende des Versicherungsjahres über das Zillmerdeckungskapital ${}_tV^{\bar{a}}_{x:\overline{n}|}$ als Rücklage verfügen. (Den Übergang zum Nettodeckungskapital findet man mit $\alpha = 0$.) Die Intensität der Sterblichkeit nach den Grundlagen für die Deckungskapitalberechnung sei μ_{x+t+k}, die Intensität der Verzinsung gleich δ. Das Zillmerdeckungskapital erfüllt dann für $t > 0$ die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{d}{dk}\,{}_{t+k}V^{a}_{x:\overline{n}|} - [\delta + \mu_{x+t+k}]\,{}_{t+k}V^{a}_{x:\overline{n}|} - P^{a}_{x:\overline{n}|} + \mu_{x+t+k} = 0. \qquad (20)$$

Wir multiplizieren mit l_{x+t+k} und integrieren zwischen $k = 0$ und $k = 1$. Es folgt, weil

$$\int_0^1 l_{x+t+k} \cdot d_{t+k} V^{a}_{x:\overline{n}|} = l_{x+t+1} \cdot {}_{t+1}V^{a}_{x:\overline{n}|} - l_{x+t} \cdot {}_{t}V^{a}_{x:\overline{n}|} + \int_0^1 l_{x+t+k}\mu_{x+t+k} \cdot {}_{t+k}V^{a}_{x:\overline{n}|}\,dk$$

die Beziehung [1])

$$l_{x+t} \cdot {}_{t}V^{a}_{x:\overline{n}|} + P^{a}_{x:\overline{n}|}\int_0^1 l_{x+t+k}\,dk + \delta\int_0^1 l_{x+t+k} \cdot {}_{t+k}V^{a}_{x:\overline{n}|}\,dk -$$

$$- \int_0^1 l_{x+t+k}\mu_{x+t+k}\,dk - l_{x+t+1} \cdot {}_{t+1}V^{a}_{x:\overline{n}|} = 0\,. \qquad (21)$$

Gleichung (21) wird ausgedehnt auf den Einbezug der vorzeitigen Vertragsauflösung als Rechnungsgrundlage, wobei die Abgangsvergütung gleich dem Zillmerdeckungskapital ${}_{t}V^{a}_{x:\overline{n}|}$ ist; das auf einen Versicherten entfallende Deckungskapital ändert dadurch nicht [2]). Es ist dann, wenn l^{d}_{x+t} die Tafel der vertragstreuen Versicherten und σ_{x+t+k} die Intensität der Stornierung bedeuten, aus (21)

$$l^{d}_{x+t} \cdot {}_{t}V^{a}_{x:\overline{n}|} + P^{a}_{x:\overline{n}|}\int_0^1 l^{d}_{x+t+k}\,dk + \delta\int_0^1 l^{d}_{x+t+k} \cdot {}_{t+k}V^{a}_{x:\overline{n}|}\,dk - \qquad (22)$$

$$- \int_0^1 l^{d}_{x+t+k}\mu_{x+t+k}\,dk - \int_0^1 l^{d}_{x+t+k}\sigma_{x+t+k} \cdot {}_{t+k}V^{a}_{x:\overline{n}|}\,dk - l^{d}_{x+t+1} \cdot {}_{t+1}V^{a}_{x:\overline{n}|} = 0.$$

2. Die Tarifprämie $\pi_{x:\overline{n}|}$ zerfällt in die Nettoprämie $P_{x:\overline{n}|} = \dfrac{A_{x:\overline{n}|}}{a_{x:\overline{n}|}}$, in die Tilgungsquote für die in das Zillmerdeckungskapital eingehenden

[1]) Diese Integralgleichung für das Deckungskapital ist in einem andern Zusammenhang schon mehrfach untersucht worden. Vgl. z. B. *E. Zwinggi:* Die Bedeutung der Integralgleichungen für die Berechnung und Darstellung des Deckungskapitals. Blätter für Versicherungs-Mathematik, 4. Band, 1. Heft, 1937, S. 36—40.

[2]) Dieser Nachweis lässt sich leicht aus der Differentialgleichung (20) erbringen; es fallen die Glieder heraus, welche die Intensität der Stornierung enthalten.

Abschlusskosten $\bar{\alpha}$ mit $\frac{\bar{\alpha}}{a_{x:\overline{n}|}}$ und in einen Rest Z. Der Rest Z enthält den Tilgungsbetrag für die Abschlusskosten, welche über α hinausgehen ($\alpha > \bar{\alpha}$), also $\frac{\alpha - \bar{\alpha}}{a_{x:\overline{n}|}}$, sodann die Zuschläge für die laufenden Verwaltungskosten und schliesslich den Gewinn-(Sicherheits-)Zuschlag.

Die tatsächliche Sterblichkeit sei gemessen durch die Intensität μ'_{x+t+k}; ferner bedeute σ'_{x+t+k} die Intensität der tatsächlichen Stornierung, wobei die bedingungsgemäss gewährte Abfindung ${}_{t+k}R_{x:\overline{n}|}$ betrage. Ferner sei mit $\delta'(t+k)$ die Intensität der tatsächlichen Verzinsung bezeichnet.

Vom verfügbaren Rest $Z\,dk$ werde im Zeitabschnitt $t+k$ bis $t+k+dk$ tatsächlich $Z'(t+k)\,dk$ verbraucht, nämlich $\Delta'(t+k)\,dk$ für die Überschussanteile, $\beta'(t+k)\,[\pi_{x:\overline{n}|} - \bar{\Delta}'(t+k)]\,dk$ für Inkassokosten und $\gamma'(t+k)\,dk$ für die übrigen laufenden Kosten.

Die Zahl der in k bis $k+dk$ infolge Tod und Stornierung aus der Gesamtheit der Versicherten l'^{d}_{x+t+k} tatsächlich ausscheidenden Versicherten ist $l'^{d}_{x+t+k}(\mu'_{x+t+k} + \sigma'_{x+t+k})\,dk$; auf einen verbleibenden Versicherten soll aus dem Überschuss im Zeitabschnitt $t+k$ bis $t+k+dk$ der Anteil $\Delta'(t+k)\,dk$ entfallen. Der gesamte Überschuss wird dann

$$l'^{d}_{x+t+k}(1 - \mu'_{x+t+k}\,dk - \sigma'_{x+t+k}\,dk)\,\Delta'(t+k)\,dk\,,$$

und ist gleich

$$\begin{aligned} l'^{d}_{x+t+k}\,[{}_{t+k}V^{\bar{a}}_{x:\overline{n}|} + \pi_{x:\overline{n}|}\,dk]\,[1 + \delta'(t+k)\,dk] - l'^{d}_{x+t+k}\,\mu'_{x+t+k}\,dk - \\ - l'^{d}_{x+t+k}\,\sigma'_{x+t+k}\cdot{}_{t+k}R_{x:\overline{n}|}\,dk - l'^{d}_{x+t+k}\,Z'(t+k)\,dk - \\ - l'^{d}_{x+t+k}\,[1 - \mu'_{x+t+k}\,dk - \sigma'_{x+t+k}\,dk]\,[{}_{t+k}V^{\bar{a}}_{x:\overline{n}|} + d\,{}_{t+k}V^{\bar{a}}_{x:\overline{n}|}]\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Gleichung (23) ist die *Kontributionsformel*[1]) in kontinuierlicher Gestalt.

---

[1]) In der strengen Form hat man $\bar{\Delta}'(t) = \Delta'(t)$ zu setzen; Beziehung (23) nimmt alsdann den Wert Null an und wird so zur Bestimmungsgleichung für $\Delta'(t)$.

Nach Integration über k von $k = 0$ bis $k = 1$ folgt aus (23):

$$\text{Überschuss im Rechnungsjahr} = \int_0^1 l'^d_{x+t+k} \Delta'(t+k)\,dk =$$

$$= l'^d_{x+t} \cdot {}_t V^a_{x:\overline{n}|} + \pi_{x:\overline{n}|} \int_0^1 l'^d_{x+t+k}\,dk + \int_0^1 \delta'(t+k)\, l'^d_{x+t+k} \cdot {}_{t+k} V^a_{x:\overline{n}|}\,dk -$$

$$- \int_0^1 l'^d_{x+t+k} \mu'_{x+t+k}\,dk - \int_0^1 l'^d_{x+t+k} \sigma'_{x+t+k} \cdot {}_{t+k} R_{x:\overline{n}|}\,dk -$$

$$- \int_0^1 l'^d_{x+t+k} Z'(t+k)\,dk - l'^d_{x+t+1} \cdot {}_{t+1} V^a_{x:\overline{n}|}. \qquad (24)$$

3. Wir bilden mit $l'^d_{x+t} = l^d_{x+t}$ den Unterschied (24) — (22) unter Beachtung, dass

$$l^d_{x+t+1} = l^d_{x+t} - \int_0^1 l^d_{x+t+k} (\mu_{x+t+k} + \sigma_{x+t+k})\,dk \text{ usw.},$$

und erhalten

$$\int_0^1 l'^d_{x+t+k} \Delta'(t+k)\,dk = [1 - {}_{t+1} V^a_{x:\overline{n}|}] \left| \int_0^1 l^d_{x+t+k} \mu_{x+t+k}\,dk - \int_0^1 l'^d_{x+t+k} \mu'_{x+t+k}\,dk \right| +$$

$$+ \int_0^1 l^d_{x+t+k} \sigma_{x+t+k} \cdot {}_{t+k} V^a_{x:\overline{n}|}\,dk - \int_0^1 l'^d_{x+t+k} \sigma'_{x+t+k} \cdot {}_{t+k} R_{x:\overline{n}|}\,dk +$$

$$+ {}_{t+1} V^a_{x:\overline{n}|} \left| \int_0^1 l'^d_{x+t+k} \sigma'_{x+t+k}\,dk - \int_0^1 l^d_{x+t+k} \sigma_{x+t+k}\,dk \right| +$$

$$+ \int_0^1 \delta'(t+k)\, l'^d_{x+t+k} \cdot {}_{t+k} V^a_{x:\overline{n}|}\,dk - \delta \int_0^1 l^d_{x+t+k} \cdot {}_{t+k} V^a_{x:\overline{n}|}\,dk +$$

$$+ \int_0^1 [\pi_{x:\overline{n}|} - Z'(t+k)]\, l'^d_{x+t+k}\,dk - P^a_{x:\overline{n}|} \int_0^1 l^d_{x+t+k}\,dk; \qquad (25)$$

bei Einführung der abhängigen einjährigen Sterberate ${}^*q_{x+t}$ und der abhängigen einjährigen Stornierungsrate ${}^*s_{x+t}$ entfällt auf eine zu Beginn des Jahres vorhandene Versicherung der Überschuss

$$[{}^*q_{x+t} - {}^*q'_{x+t}]\,[1 - {}_{t+1}V^{\bar{a}}_{x:\overline{n}|}] + [{}^*s'_{x+t} - {}^*s_{x+t}]\,{}_{t+1}V^{\bar{a}}_{x:\overline{n}|} +$$

$$+ \int_0^1 [{}_kp^d_{x+t}\,\sigma_{x+t+k} \cdot {}_{t+k}V^{\bar{a}}_{x:\overline{n}|} - {}_kp'^d_{x+t}\,\sigma'_{x+t+k} \cdot {}_{t+k}R_{x:\overline{n}|}]\,dk +$$

$$+ \int_0^1 [\delta'(t+k)\,{}_kp'^d_{x+t} - \delta'_k\,p^d_{x+t}]\,{}_{t+k}V^{a}_{x:\overline{n}|}\,dk +$$

$$+ \int_0^1 [{}_kp'^d_{x+t}\,[\pi_{x:\overline{n}|} - Z'(t+k)] - {}_kp^d_{x+t} \cdot P^{\bar{a}}_{x:\overline{n}|}]\,dk\,. \qquad (26)$$

Damit ist der Jahresüberschuss aufgeteilt in den *Gewinn aus der Sterblichkeit, den Gewinn aus der Stornierung, den Gewinn aus der Verzinsung und den Gewinn aus den Zuschlägen.*

Zur Zerlegung des Gewinnes in ganzen Beständen ist es vorteilhafter, von (25) statt von (26) auszugehen. An die Stelle der fiktiven Bestände l^d_{x+t} treten die wirklichen Bestände, ferner ist über alle Alter und alle abgelaufenen Versicherungsdauern zu summieren. Alsdann entsprechen dem Sinne nach (nicht mathematisch) die Integrale über die Werte mit dem Akzent ′ den Posten der Erfolgsrechnung: *a)* Betrag der durch Tod fällig gewordenen Versicherungssummen abzüglich Deckungskapital, *b)* Betrag der ausbezahlten Rückkaufswerte abzüglich der durch Storno frei gewordenen Deckungskapitalien, *c)* Betrag der eingenommenen Zinsen, schliesslich *d)* Beträge der durch Verwaltungskosten und Gewinnvergütungen verbrauchten Zuschläge.

Die Integrale über die Grössen ohne Akzent, d. h. über die rechnungsmässigen Vorgänge, lassen sich ohne grosse Mühe näherungsweise bestimmen. Bezeichnet im Ausdruck für den Zinsengewinn $l^d_{x+t+k} \cdot {}_{t+k}V^{\bar{a}}_{x:\overline{n}|} = y(t+k)$, so ist z. B. bei Anwendung der *Newton*schen Interpolationsformel

$$\int_0^1 y(t+k)\,dk = y(t) + \frac{1}{2}\,\Delta\,y(t) - \frac{1}{12}\,\Delta^2 y(t) + \ldots .$$

Bei Abbruch der Reihe mit den ersten Differenzen wird $y(t)$ als im Integrationsintervall linear verlaufend angenommen. Es wird dann bei meist ausreichender Genauigkeit

$$\int_0^1 l^d_{x+t+k} \cdot {}_{t+k}V^{\bar{a}}_{x:\overline{n}|}\, dk \sim \frac{1}{2}\left[l^d_{x+t} \cdot {}_tV^{\bar{a}}_{x:\overline{n}|} + l^d_{x+t+1} \cdot {}_{t+1}V^{\bar{a}}_{x:\overline{n}|}\right] =$$

$$= l^d_{x+t}\, \frac{{}_tV^{\bar{a}}_{x:\overline{n}|} + {}_{t+1}V^{\bar{a}}_{x:\overline{n}|}}{2} - l^d_{x+t}\left({}^*q_{x+t} + {}^*s_{x+t}\right) \frac{{}_{t+1}V^{\bar{a}}_{x:\overline{n}|}}{2}. \qquad (27)$$

Durch zweckentsprechende Anlage der Reserveregister, d. h. durch Anordnung nach dem erreichten Alter (Methode der konstanten Hilfszahlen), können die Werte (27) für den ganzen Bestand verhältnismässig leicht berechnet werden.