Eine Bemerkung über zufällige Anordnungen der natürlichen Zahlen

Autor(en): **Hadwiger, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **46 (1946)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966874

Eine Bemerkung über zufällige Anordnungen der natürlichen Zahlen

Von *H. Hadwiger*, Bern

Wir betrachten eine zufallsartig gebildete Anordnung (Umordnung) der Reihe der natürlichen Zahlen

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots, \tag{1}$$

etwa

$$17,\ 308,\ 44,\ 45,\ 407719,\ \ldots, \tag{2}$$

so dass also in der Reihe (2) jede Zahl der ursprünglichen natürlichen Zahlenreihe (1) genau einmal vorkommt. Hierbei kann es geschehen, dass in der Reihe (2) zufällig konsekutive Zahlen, d. h. solche, die in der natürlichen Anordnung (1) aufeinanderfolgen, ebenfalls nacheinander auftreten. In der Anordnung (2) bilden die Zahlen 44 und 45 ein derartiges konsekutives Zahlenpaar.

Es bezeichne nun W_ν die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer zufallsartigen Anordnung der natürlichen Zahlen genau ν konsekutive Zahlenpaare auftreten. Der Wahrscheinlichkeitswert wird weiter unten genauer definiert. — Bemerkenswerterweise hat nun die Wahrscheinlichkeit W_ν für jedes ν einen nicht trivialen Wert, d. h. sie ist nicht 0 oder 1. — Wir zeigen in dieser Note, dass

$$W_\nu = \frac{1}{\nu!\, e} \tag{3}$$

gilt. Man bestätigt leicht die Gültigkeit der Summenrelation

$$\sum_0^\infty W_\nu = 1\,. \tag{4}$$

In naheliegender Weise definieren wir die oben eingeführte Wahrscheinlichkeit wie folgt: Es bezeichne A_n^ν die Anzahl der Permutationen der n Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$, welche genau ν konsekutive Paare enthalten [1]). Dann setzen wir

$$W_\nu = \lim_{n \to \infty} \frac{A_n^\nu}{n!}, \tag{5}$$

vorausgesetzt, dass sich ein wohlbestimmter Grenzwert ergibt.

Die unten folgende Tabelle enthält die A_n^ν für $1 \leq n \leq 6$.

n \ ν	0	1	2	3	4	5
1	1					
2	1	1				
3	3	2	1			
4	11	9	3	1		
5	53	44	18	4	1	
6	309	265	110	30	5	1

Zunächst beweisen wir die Gültigkeit der rekursiven Beziehung [2])

$$A_n^\nu = \binom{n-1}{\nu} A_{n-\nu}^0, \tag{6}$$

welche darlegt, dass es für die Ermittlung der Anzahlen A_n^ν ausreicht, die Werte der A_n^0, d. h. die Anzahl der Permutationen ohne konsekutive Paare, zu kennen.

---

[1]) Die Fragestellung ist verwandt mit derjenigen von *G. Schulz* in Aufgabe Nr. *319* des Jahresberichtes der D. M. V. *52*, 1942, S. 69. Eine vom Verfasser eingereichte Lösung (noch nicht erschienen) stützt sich in methodischer Beziehung auf eine Abhandlung von *L. von Schrutka*, Eine neue Einteilung der Permutationen, Math. Ann. *118*, 1941, S. 246—250. Das nämliche trifft auch in bezug auf die vorliegende Note zu.

[2]) Diese Rekursionsformel wurde von *L. von Schrutka* auf empirischem Wege gefunden (Brief vom 14. Mai 1943 von *L. von Schrutka*, Wien, an den Verfasser).

Ein Nachweis von (6) gelingt in der folgenden Weise: In der natürlichen Anordnung

$$(7) \qquad 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$$

der ersten n Zahlen lassen sich $n-1$ verschiedene konsekutive Paare unterscheiden, nämlich

$$(8) \qquad (1,\ 2),\ (2,\ 3),\ \ldots,\ (n-1,\ n).$$

Zur Bildung einer Anordnung der n Zahlen mit ν konsekutiven Paaren haben wir zunächst von diesen $n-1$ Paaren ν Paare auszuwählen. Durch diese Wahl werden konsekutive Sequenzen von Zahlen der Reihe (7) bestimmt, die in der zu bildenden Anordnung sicher aufeinanderfolgen müssen. Es ist zweckmässig, diese Sequenzen in der Reihe (7) durch Klammern zusammenzufassen, also beispielsweise

$$(9) \qquad 1,\ 2,\ (3,\ 4),\ 5,\ (6,\ 7,\ 8,\ 9),\ 10,\ 11,\ (12,\ 13,\ 14),\ 15,\ \ldots,\ n.$$

Soll nun eine Anordnung erzeugt werden, welche genau die ausgewählten ν konsekutiven Paare und keine andern aufweist, so ist die Zahlenreihe (7) so zu permutieren, dass einmal die durch die Klammern in (9) zusammengefassten Sequenzen erhalten bleiben und dass weiter keine neuen konsekutiven Paare entstehen. Werden in (9) die Einzelelemente und die Klammern als neue Einheiten betrachtet, so kann (9) als eine neue Anordnung von $n-\nu$ Elementen betrachtet werden. Eine Permutation dieser Elemente führt nun gerade dann zu einer Permutation der Reihe (7) der oben verlangten Eigenschaft, wenn diese keine in (9) aufeinanderfolgenden Elemente enthält. Die Anzahl dieser Permutationen ist offenbar $A^0_{n-\nu}$. Wenn wir jetzt noch berücksichtigen, dass eine Auswahl der ν konsekutiven Paare auf $\binom{n-1}{\nu}$ verschiedene Arten möglich ist, gelangen wir so zu $\binom{n-1}{\nu} A^0_{n-\nu}$ verschiedenen Permutationen der ursprünglichen Zahlenreihe (7) mit ν konsekutiven Paaren. Damit ist die Rekursion (6) bewiesen.

Wenn man andererseits die Permutationen der ersten n Zahlen mit ν konsekutiven Paaren dadurch erzeugt, dass man die Zahl n bei Permutationen der ersten $n-1$ Zahlen mit $\nu-1$ bzw. ν bzw. $\nu+1$ konsekutiven Paaren an geeigneter Stelle einschiebt, so wird man auf die Rücklaufformel

$$(10) \qquad A_n^{\nu} = A_{n-1}^{\nu-1} + (n-1-\nu)\, A_{n-1}^{\nu} + (\nu+1)\, A_{n-1}^{\nu+1}$$

geführt. In der Tat entsteht eine zur Auswahl A_n^{ν} gehörende Permutation dadurch, dass man

1. die Zahl n auf die rechte Seite der Zahl $n-1$ in einer Permutation der $A_{n-1}^{\nu-1}$ hinsetzt. Hierfür bietet sich 1 Möglichkeit;
2. die Zahl n an eine beliebige Stelle der zu A_{n-1}^{ν} gehörenden Permutationen setzt mit Ausnahme der Zwischenplätze konsekutiver Zahlen und des Platzes auf der rechten Seite der Zahl $n-1$. Hierfür bieten sich $n-1-\nu$ Möglichkeiten;
3. die Zahl n an einen Zwischenplatz konsekutiver Zahlen einer Permutation der $A_{n-1}^{\nu+1}$ einschiebt. Hierfür bieten sich $\nu+1$ Möglichkeiten.

Aus (10) und (6) ergibt sich nun die Rücklaufformel

$$(11) \qquad A_n^0 = (n-1)\, A_{n-1}^0 + (n-2)\, A_{n-2}^0,$$

welche die rekursive Berechnung der Anzahlen A_n^0 ermöglicht.

Zu einem expliziten Ausdruck gelangen wir auf die folgende Art: Wir bilden die erzeugende Funktion

$$(12) \qquad \Phi(x) = \sum_0^{\infty} A_{n+1}^0 \frac{x^n}{n!}.$$

Wie sich auf Grund der Rücklaufformel (11) leicht verifizieren lässt, ist die Funktion (12) eine Lösung der Differentialgleichung

$$(13) \qquad (1-x)\, \Phi'(x) - (1+x)\, \Phi(x) = 0,$$

deren Integration mit Rücksicht auf $\Phi(0) = 1$ die Darstellung

$$(14) \qquad \Phi(x) = e^{-x} \left(\frac{1}{1-x} \right)^2$$

ergibt. Durch Multiplikation der Potenzreihen, welche die beiden Faktoren in (14) für $|x| < 1$ darstellen, erhält man die expliziten Ausdrücke für die Koeffizienten der Reihe (12), nämlich [1])

---

[1]) Es besteht eine enge Beziehung zwischen der Anzahl A_n^0 und der bei einer *Euler*schen Aufgabe (vgl. *E. Netto*, Lehrbuch der Combinatorik, Teubner 1927, S. 66—71) auftretenden Anzahl P_n^0 derjenigen Permutationen, die kein Element auf ihrem Platz belassen. — Wie man auf Grund der expliziten Darstellungen bestätigen kann, gilt die Relation

$$A_n^0 = (-1)^n + (n+1)\, P_{n-1}^0.$$

$$A_n^0 = (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + (n+1)(n-1)!\sum_{0}^{n}(-1)^{\lambda}\frac{1}{\lambda!}. \tag{15}$$

Im Hinblick auf die Relation (6) gewinnt man so

$$A_n^{\nu} = (-1)^{n-\nu-1}\frac{(n-1)!}{\nu!\,(n-\nu)!} + \frac{(n-\nu+1)(n-1)!}{\nu!}\sum_{0}^{n-\nu}(-1)^{\lambda}\frac{1}{\lambda!}. \tag{16}$$

Nun kann man leicht bestätigen, dass

$$W_{\nu} = \lim_{n\to\infty}\frac{A_n^{\nu}}{n!} = \frac{1}{\nu!\,e} \tag{17}$$

ist. Damit ist unsere Behauptung (3) bewiesen.