Lineare Abhängigkeit und Äquivalenz von Punktsystemen

Autor(en): **Kreis, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

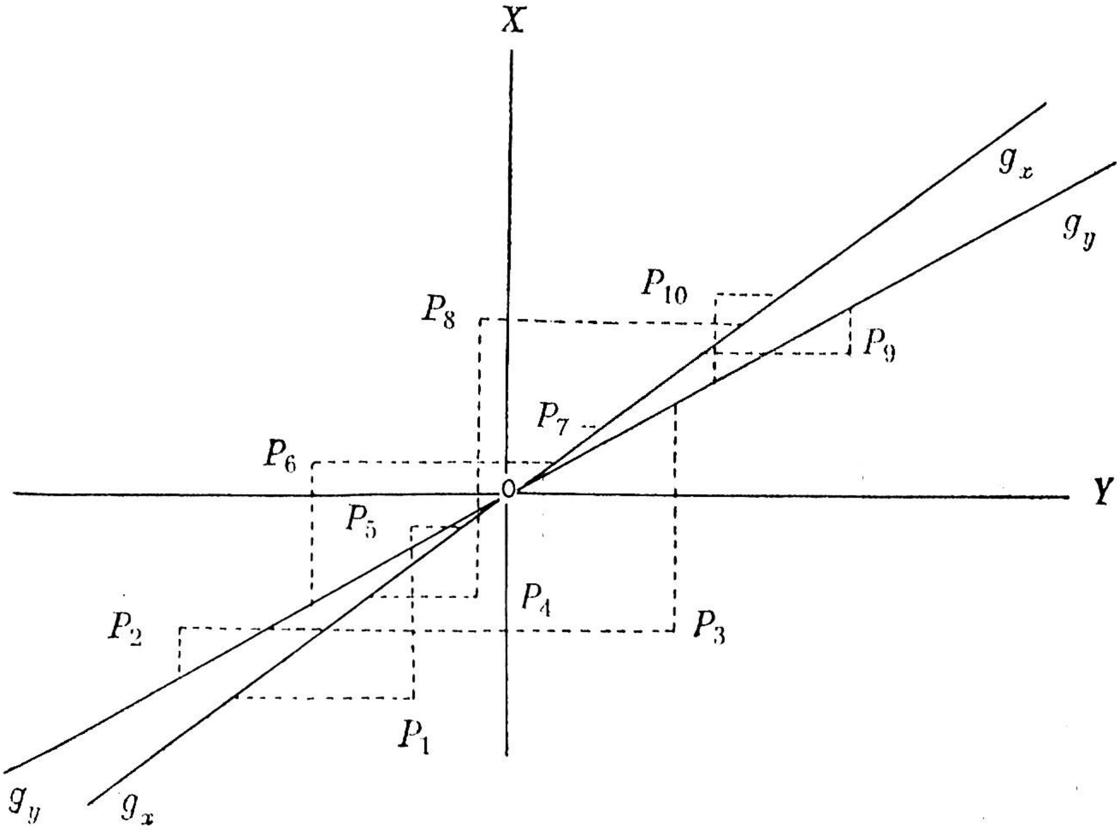
Band (Jahr): **46 (1946)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966878

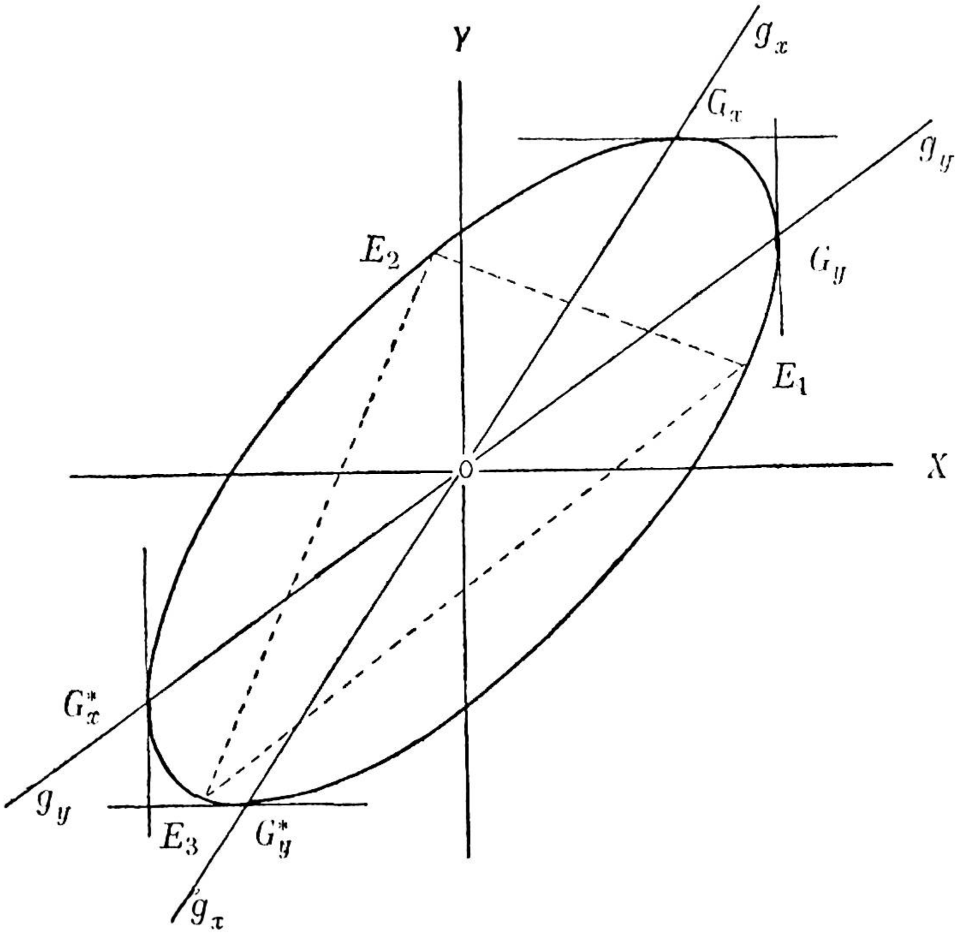
Lineare Abhängigkeit und Äquivalenz von Punktsystemen

Von *H. Kreis*, Winterthur



Durch die Methode der kleinsten Quadrate lassen sich durch $n > 2$ Punkte $P_k(x_k, y_k)$ zwei Gerade g_x und g_y auf eindeutige Art so bestimmen, dass die Streuung der Punkte in bezug auf diese Geraden minimal wird. Im ersten Falle wird die Summe der Quadrate $(\Delta x)^2$, im zweiten Falle die der Quadrate $(\Delta y)^2$ zu einem Minimum.

Analog lassen sich durch $n > 3$ Punkte $P_k(x_k, y_k, z_k)$ im Raume drei Ebenen φ_x, φ_y und φ_z auf eindeutige Art so bestimmen, dass die Streuung der Punkte in der X-, Y- und Z-Richtung in bezug auf diese drei Ebenen minimal wird. Im ersten Falle ist die Summe der n-Quadrate $(\varDelta x)^2$, im zweiten Falle die der Quadrate $(\varDelta y)^2$ und im dritten Falle die der Quadrate $(\varDelta z)^2$ ein Minimum.



Die Geraden g_x und g_y sind die sogenannten *Regressionsgeraden* des ebenen Punktsystems; in Analogie dazu können die drei Ebenen φ_x, φ_y und φ_z als *Regressionsebenen* des räumlichen Punktsystems bezeichnet werden.

Gegenstand dieser Arbeit ist der Beweis der beiden folgenden allgemeinen Lehrsätze:

I. Äquivalenz in der Ebene

Zu einem beliebigen ebenen Punktsystem gibt es unzählig viele äquivalente Dreiecke $E_1 E_2 E_3$, die mit dem gegebenen System die Regressionsgeraden g_x und g_y gemeinsam haben.

Die Gesamtheit dieser äquivalenten Eckpunkte E liegt auf einer Ellipse, der *Äquivalenzellipse*.

Die Regressgeraden g_x und g_y verbinden die Berührungspunkte der zur X- bzw. Y-Achse parallelen Tangenten der Äquivalenzellipse.

II. Äquivalenz im Raume

Zu einem beliebigen räumlichen Punktsystem gibt es unzählig viele äquivalente Tetraeder $E_1 E_2 E_3 E_4$, die mit dem gegebenen Punktsystem die Regressionsebenen φ_x, φ_y und φ_z gemeinsam haben.

Die Gesamtheit dieser äquivalenten Eckpunkte E liegt auf einem Ellipsoid, dem *Äquivalenzellipsoid.*

Die Regressionsebenen φ_x, φ_y und φ_z enthalten die Berührungsellipsen des zur X- bzw. Y- und Z-Achse parallelen Tangentialzylinders des Äquivalenzellipsoids.

I. Äquivalenz in der Ebene

Gegeben sei ein ebenes, *normiertes* Punktsystem

$$P_k(x_k, y_k),\ k = 1, 2, 3 \,.,.\, n.$$

Wir setzen also voraus:

$$\sum x_k = 0,\ \sum y_k = 0$$

$$\sigma_{xx}^2 = \frac{1}{n} \sum x_k^2 = 1\,,\ \sigma_{yy}^2 = \frac{1}{n} \sum y_k^2 = 1\,. \qquad (1)$$

Wenn wir noch die Summe $\sigma_{xy}^2 = \frac{1}{n} \sum x\,y$ einführen, so wird der Korrelationskoeffizient C allgemein durch das Verhältnis definiert

$$C = \sigma_{xy}^2 : \sigma_{xx}\,\sigma_{yy}\,,$$

so dass in einem normierten System der Wert von C mit dem Wert von σ_{xy}^2 übereinstimmt.

Zwei Punktsysteme heissen *äquivalent,* wenn sie folgende Bedingungen erfüllen:

1. beide Systeme haben den gleichen Schwerpunkt 0:

$$\sum x_k = \sum x_k' = 0,\ \sum y_k = \sum y_k' = 0;$$

2. die Streuungen σ in beiden Systemen sind gleich:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{x'x'} = 1\,, \sigma_{yy} = \sigma_{y'y'} = 1\,;$$

3. die Korrelationskoeffizienten beider Systeme sind gleich:

$$\sigma_{xy}^2 = \sigma_{x'y'}^2 \text{ oder } C = C'\,.$$

Wenn also ein Dreieck $E_1(a_1, b_1)\, E_2(a_2, b_2)\, E_3(a_3, b_3)$ mit dem Punktsystem (1) äquivalent sein soll, so müssen folgende Gleichungen gelten:

$$\begin{array}{rl|l} a_1 + a_2 + a_3 = 0\,, & & 1 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 0\,, & & \lambda \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 3\,, & & 1 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 3\,, & & \lambda^2 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 3\,C\,. & & 2\,\lambda \end{array} \qquad (2)$$

Multipliziert man mit den beigesetzten Faktoren und addiert, so wird

$$\begin{aligned} (a_1 + \lambda b_1) + (a_2 + \lambda b_2) + (a_3 + \lambda b_3) &= 0\,, \\ (a_1 + \lambda b_1)^2 + (a_2 + \lambda b_2)^2 + (a_3 + \lambda b_3)^2 &= 0\,, \end{aligned} \qquad (3)$$

wenn der Parameter λ so gewählt wird, dass

$$3\,\lambda^2 + 6\,C\,\lambda + 3 = 0\,, \qquad (4)$$

$$\lambda = -C \pm i\sqrt{1 - C_2}\,. \qquad (5)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$a_1 + \lambda b_1 = w_1\,, a_2 + \lambda b_2 = w_2\,, a_3 + \lambda b_3 = w_2\,,$$

so lassen sich die Gleichungen (3) schreiben

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 &= 0\,, \\ w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 &= 0\,. \end{aligned} \qquad (6)$$

Hieraus folgt durch Quadrieren und Subtrahieren

$$w_1 w_2 + w_2 w_3 + w_3 w_1 = 0\,,$$

d. h. w_1, w_2 und w_3 können als die Wurzeln einer rein-kubischen Gleichung aufgefasst werden, so dass

$$w_1 = c\,\varepsilon_1\,,\; w_2 = c\,\varepsilon_2\,,\; w_3 = c\,\varepsilon_3\,,$$

wo c eine beliebige Zahl, ε_1, ε_2, ε_3 die dritten Einheitswurzeln bedeuten. Es ist somit allgemein

$$\begin{aligned} c\,\varepsilon_1 &= a_1 + \lambda b_1 \quad \text{und} & c\,\varepsilon_1 &= a_1 + \lambda b_1\,, \\ c\,\varepsilon_2 &= a_2 + \lambda b_2 & \bar{c}\,\bar{\varepsilon}_2 &= a_2 + \bar{\lambda} b_2\,, \\ c\,\varepsilon_3 &= a_3 + \lambda b_3 & \bar{c}\,\bar{\varepsilon}_3 &= a_3 + \bar{\lambda} b_3\,, \end{aligned} \tag{7}$$

wo $\bar{c}$, $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\lambda}$ die konjugiert-komplexen Werte von c, ε, λ bedeuten. Durch Multiplikation der Gleichungspaare (7) ergibt sich

$$c\bar{c} = a_1^2 + (\lambda + \bar{\lambda})\, a_1 b_1 + \lambda\bar{\lambda}\, b_1^2\,,$$

oder, infolge Gleichung (4)

$$\lambda + \bar{\lambda} = -2\,C,\; \lambda\bar{\lambda} = 1$$

$$c\bar{c} = a_1^2 - 2\,C a_1 b_1 + b_1^2\,.$$

Analog

$$\begin{aligned} c\bar{c} &= a_2^2 - 2\,C a_2 b_2 + b_2^2\,, \\ c\bar{c} &= a_3^2 - 2\,C a_3 b_3 + b_3^2\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Die Koordinaten der Punkte $E_1\, E_2\, E_3$ genügen demnach der Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2\,C x y = c\bar{c}\,, \tag{9}$$

die, weil die Konstante C stets absolut kleiner oder höchstens gleich 1 ist, eine Ellipse, die *Aquivalenzellipse,* darstellt. Um den Wert des Absolutgliedes $c\bar{c}$ zu ermitteln, addieren wir die drei Gleichungen (8) und erhalten mit Rücksicht auf die Definitionsgleichungen (2)

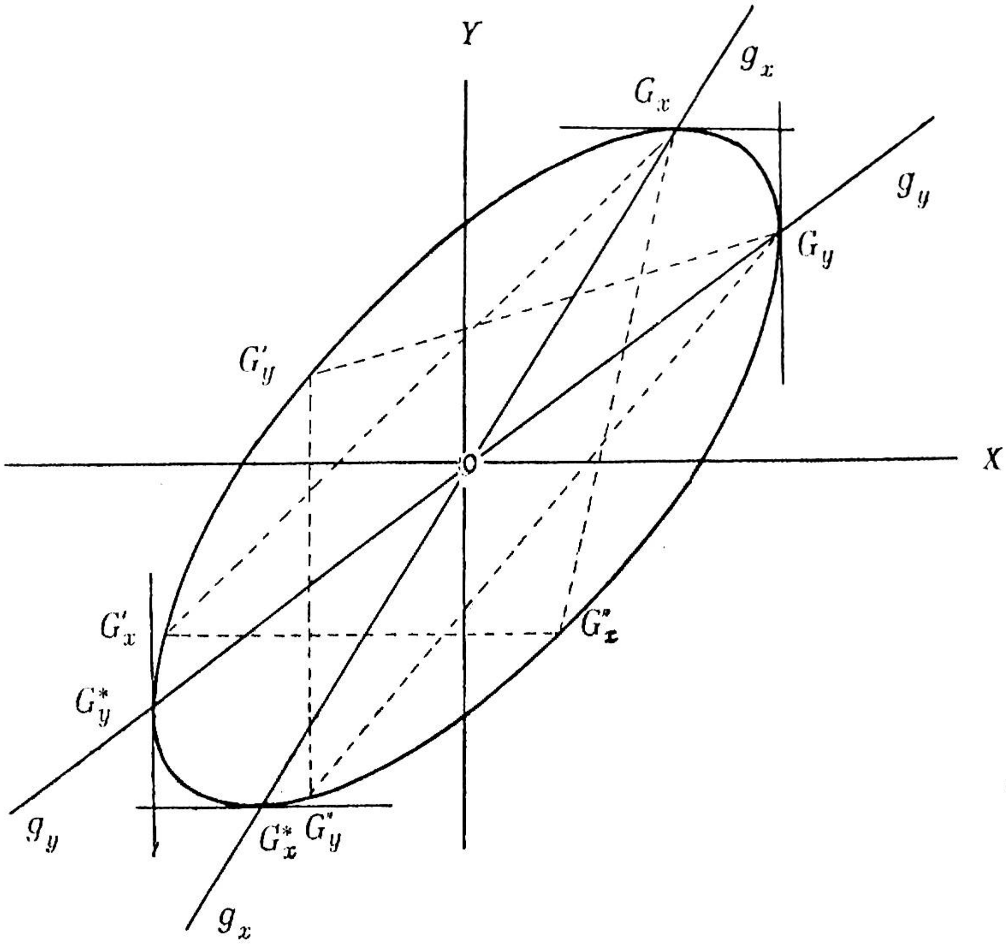
$$3\,c\bar{c} = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - 2\,C\,(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)\,,$$

$$c\bar{c} = 2 - 2\,C_2\,.$$

Die Gleichung der Äquivalenzellipse lautet somit

$$x^2 + y^2 - 2\,C x y = 2 - 2\,C^2\,. \tag{10}$$

Sie hängt ausschliesslich von dem einzigen Parameter C, d. h. vom Korrelationskoeffizienten des ursprünglichen Punktsystems ab. Die Achsen der Ellipse fallen mit den Winkelhalbierenden des Achsenkreuzes zusammen.



Die Grenzpunkte G_x, G^*_x bzw. G_y, G^*_y der Kurve, in welchen die Tangenten parallel zu den Koordinatenachsen sind, d. h. die Punkte mit absolut grössten Ordinaten bzw. Abszissen, lassen sich unmittelbar aus Gleichung (10) bestimmen. Diese lässt sich folgendermassen schreiben

$$(y - Cx)^2 + (1 - C^2)\, x^2 = 2 - 2\,C^2 .$$

Hieraus folgt

$$(1 - C^2)\, x^2 \leqq 2 - 2\,C^2 ,$$

somit

$$(1 - C^2)\, x^2_{\text{max.}} = 2 - 2\,C^2$$

und zugleich

$$(y - Cx)^2 = 0 .$$

Für die Gerade OG_y ergibt sich die Gleichung

$$OG_y : y - Cx = 0 \tag{11}$$

und als Koordinaten der Grenzpunkte G_y und G_y^*:

$$x = \pm\sqrt{2}\ , \ y = \pm C\sqrt{2}\ .$$

Schreibt man Gleichung (10) umgekehrt in der Form

$$(x - Cy)^2 + (1 - C^2)\, y^2 = 2 - 2\,C^2\,,$$

so erhält man

$$(1 - C^2)\, y^2_{\text{max.}} = 2 - 2\,C^2$$

und zugleich

$$(x - C\,y)^2 = 0\,.$$

Entsprechend lautet also die Gleichung von

$$OG_x : x - C\,y = 0\,. \tag{12}$$

Analog sind die Koordinaten der Grenzpunkte G_x und G_x^*:

$$x = \pm\, C\sqrt{2}\ , \ y = \pm\sqrt{2}\ .$$

Von besonderem Interesse sind die äquivalenten Dreiecke $G_x\,G_x'\,G_x''$ und $G_y\,G_y'\,G_y''$, die einen Grenzpunkt zu einer Ecke haben. Da die Seitenhalbierenden der äquivalenten Dreiecke sich im Schwerpunkt 0 treffen, lassen sich die Koordinaten der beiden fehlenden Eckpunkte berechnen. Es resultieren folgende Koordinaten:

(13)

$$G_y' : x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \qquad y = -\frac{C\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{3 - 3C^2}{2}}$$

$$G_y'' : x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \qquad y = -\frac{C\sqrt{2}}{2} - \sqrt{\frac{3 - 3C^2}{2}}$$

und analog

$$G_x' : x = -\frac{C\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{3 - 3C^2}{2}} \quad ; \qquad y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$G_x'' : x = -\frac{C\sqrt{2}}{2} - \sqrt{\frac{3 - 3C^2}{2}} \quad ; \qquad y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Gibt man sich einen beliebigen Punkt E_1 der Äquivalenzellipse, so sind die beiden anderen Eckpunkte $E_2 E_3$ vollständig bestimmt, indem man die Strecke $E_1 0$ um die Hälfte über 0 hinaus verlängert, und durch den Endpunkt die Parallele zur Ellipsentangente in E_1 zieht. Diese Parallele schneidet aus der Ellpise die gesuchten Ecken heraus. Wie *Steiner* [6] gezeigt hat, sind sämtliche äquivalente Dreiecke flächengleich; es sind die grösstmöglichen Dreiecke, die sich der Ellipse (10) einschreiben lassen.

Es sei nun $E_1 E_2 E_3$ irgendein äquivalentes Dreieck des gegebenen Punktsystems, ferner $y = px + q$ die Gleichung einer Geraden, auf welche die Eckpunkte des Dreieckes parallel zur Y-Achse projiziert werden sollen. Dabei gehört zu jeder Ecke $E_k\ (a_k, b_k)$ ein bestimmtes Bild $E'_k(a_k, y_k = pa_k + q)$. Die Konstanten p und q sollen nun so bestimmt werden, dass die Summe der quadratischen Abweichungen

$$S = (y_1 - b_1)^2 + (y_2 - b_2)^2 + (y_3 - b_3)^2$$

oder

$$S = (pa_1 + q - b_1)^2 + (pa_2 + q - b_2)^2\,(pa_3 + q - p)^2$$

ein Minimum wird. Mit Rücksicht auf Gleichung (2) ist

$$S = 3p^2 + 3q^2 + 3 - 6Cp = 3q^2 + 3(p - C)^2 + 3(1 - C^2)\,.$$

Der Ausdruck für S wird offensichtlich zu einem Minimum, wenn die Quadrate q^2 und $(p - C)^2$ verschwinden, d. h. wenn $q = 0$ und $p = C$ ist. Die gesuchte Gerade hat also die Gleichung

$$g_y : y = Cx\,. \tag{14}$$

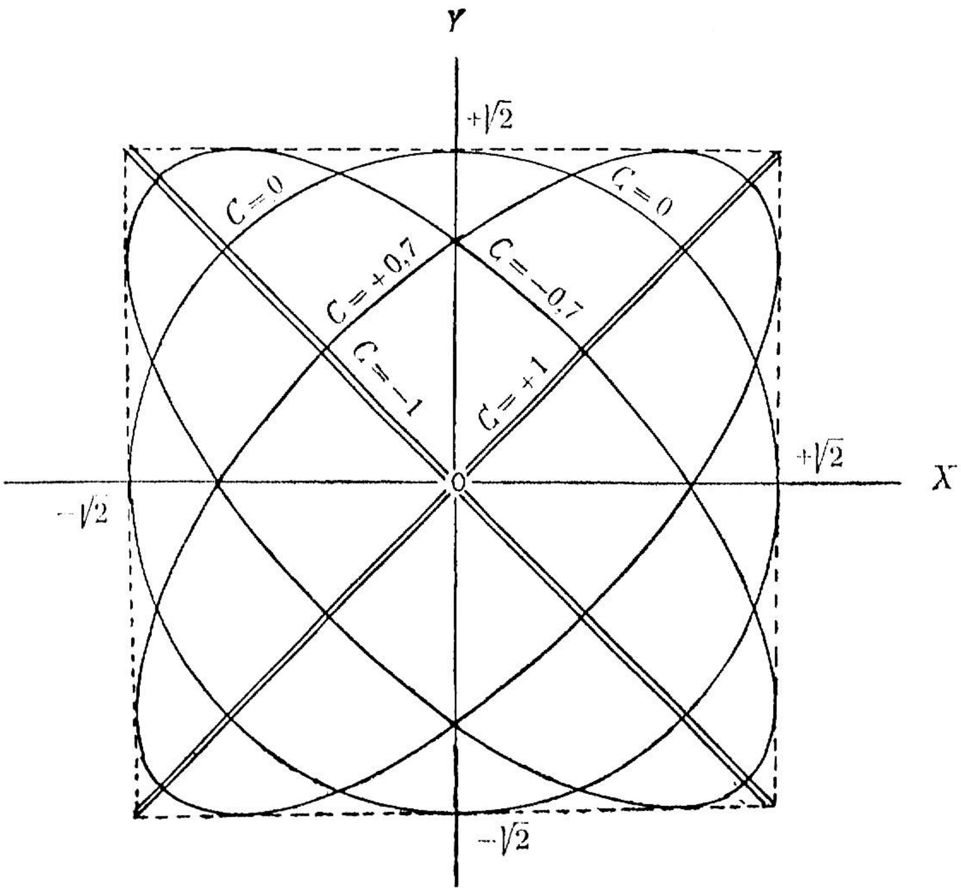
Diese Gerade g_y geht durch den Schwerpunkt 0; sie ist unabhängig vom angenommenen äquivalenten Dreieck. Nimmt man z. B. das spezielle äquivalente Dreieck $G_y G'_y G''_y$ mit der zur Y-Achse parallelen Seite $G'_y G''_y$ zu Hilfe, so verbindet g_y die Mitte dieser Seite mit dem extremen Grenzpunkt G_y rechts. Die Gerade (14) ist demnach identisch mit dem Durchmesser $G_y G^*_y$ der Äquivalenzellipse. Auf ähnliche Art können wir die Eckpunkte $E_1 E_2 E_3$ auf eine zweite Gerade $x = py + q$ parallel zur X-Achse projizieren. Die Summe

$$S = (pb_1 + q - a_1)^2 + (pb_2 + q - a_2)^2 + (pb_3 + q - a_3)^2$$

wird am kleinsten, wenn $q = 0$ und $p = C$ gewählt werden, so dass die Gleichung der zweiten Geraden lautet

$$g_x : x = Cy \,. \tag{15}$$

Diese Gerade g_x ist ebenfalls unabhängig vom gewählten Dreieck. Wählt man insbesondere das ausgezeichnete Dreieck $G_x G'_x G''_x$, so verbindet die Gerade g_x die Mitte der zur X-Achse parallelen Dreieckseite $G'_x G''_x$ mit dem höchsten Grenzpunkt G_x. Die Gerade g_x ist somit identisch mit dem Durchmesser $G_x G^*_x$ der Äquivalenzellipse.



Die zusammengehörigen x- und y-Werte sind dann und nur dann voneinander *linear abhängig*, wenn die beiden Regressionsgeraden g_x und g_y zusammenfallen, d. h. wenn die Gleichungen $x = Cy$ und $y = Cx$ identisch sind. Die Bedingung dafür lautet:

$$C^2 = 1 \,. \tag{16}$$

Den Werten $C = \pm 1$ entsprechend liefert Gleichung (10) die Ellipsengleichungen

$$(x \pm y)^2 = 0 \,.$$

Diesen beiden Gleichungen entsprechen als Bilder die doppelt gedachten Diagonalen des Quadrates, dem sämtliche Äquivalenzellipsen (10) einbeschrieben sind.

Dem anderen Grenzwert 0 von C entspricht die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 2$$

des Inkreises des nämlichen Quadrates.

Für den von den Regressionsgeraden eingeschlossenen Winkel $G_y O G_x = \gamma$ ist allgemein

$$tg\gamma = \frac{\frac{1}{C} - C}{1 + \frac{1}{C} - C} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C} - C\right).$$

Für $C = \pm 1$ ist der Winkel $\gamma = 0^0$ und der Ausdruck $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{C} - C\right) = 0$;

für $C = 0$ ist der Winkel $\gamma = 90^0$ und der Ausdruck $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{C} - C\right) = \infty$.

Je kleiner also der absolute Wert des Ausdruckes $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{C} - C\right)$ ist, desto schwächer streuen die äquivalenten Punkte um die Regressionsgeraden.

Nach Voraussetzung (1) haben wir für die Streuungen den Wert 1 angenommen, sind aber σ_{xx} und σ_{yy} nicht gleich der Einheit, so hat man in den erhaltenen Gleichungen (10), (11) und (12) $x : \sigma_{xx}$ an Stelle von x und $y : \sigma_{yy}$ an Stelle von y zu setzen, so dass die Gleichungen der Äquivalenzellipse und der Regressionsgeraden allgemeiner lauten

$$\frac{x^2}{\sigma_{xx}^2} + \frac{y^2}{\sigma_{yy}^2} - \frac{2C}{\sigma_{xx}\sigma_{yy}} xy = 2 - 2C^2, \qquad (10')$$

$$OG_y : \frac{y}{\sigma_{yy}} - \frac{Cx}{\sigma_{xx}} = 0, \qquad (11')$$

$$OG_x : \frac{x}{\sigma_{xx}} - \frac{Cy}{\sigma_{yy}} = 0. \qquad (12')$$

Analog findet man als Koordination der Eckpunkte des äquivalenten Dreieckes $G_y G'_y G''_y$ allgemeiner

$$G_y : \frac{x}{\sigma_{xx}} = \sqrt{2}\,; \frac{y}{\sigma_{yy}} = C\sqrt{2} \tag{13'}$$

$$G'_y : \frac{x}{\sigma_{xx}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,; \frac{y}{\sigma_{yy}} = -\frac{C\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{3-3C^2}{2}}$$

$$G''_y : \frac{y}{\sigma_{yy}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,; \frac{y}{\sigma_{yy}} = -\frac{C\sqrt{2}}{2} - \sqrt{\frac{3-3C^2}{2}}\,.$$

II. Äquivalenz im Raume

Gegeben sei irgendein dreidimensionales, *normiertes* System von n Punkten $P_k(x_k, y_k, z_k)$, $(k = 1, 2 \ldots\ldots n)$, so dass

$$\sum x_k = 0\,,\ \sum y_k = 0\,,\ \sum z_k = 0\,,$$

$$\sigma^2_{xx} = \frac{1}{n}\sum x^2_k = 1\,,\ \sigma^2_{yy} = \frac{1}{n}\sum y^2_k = 1\,,\ \sigma^2_{zz} = \frac{1}{n}\sum z^2_k = 1\,.$$

angenommen wird. Setzt man ferner

$$\sigma^2_{xy} = \frac{1}{n}\sum xy\,,\ \sigma^2_{yz} = \frac{1}{n}\sum yz\,,\ \sigma^2_{zx} = \frac{1}{n}\sum zx\,,$$

so lassen sich folgende Korrelationskoeffizienten

$$C_{12} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}\,\sigma_{yy}}\,,\ C_{23} = \frac{\sigma_{yz}}{\sigma_{yy}\,\sigma_{zz}}\,,\ C_{31} = \frac{\sigma_{zx}}{\sigma_{zz}\,\sigma_{xx}}$$

allgemein definieren. In einem normierten System stimmen die Werte dieser Koeffizienten C_{12}, C_{23} und C_{31} mit den Werten von σ^2_{xx}, σ^2_{yy} und σ^2_{zz} überein.

Zwei Punktsysteme im Raume heissen *äquivalent*, wenn

1. beide Systeme den gleichen Schwerpunkt haben;
2. die Streuungen in beiden Systemen gleich sind:

$$\sigma_{xx} = \sigma'_{xx}\,,\ \sigma_{yy} = \sigma'_{yy}\,,\ \sigma_{zz} = \sigma'_{zz}\,,$$

3. die Korrelationskoeffizienten beider Systeme gleich sind:

$$C_{12} = C'_{12}, \, C_{23} = C'_{23}, \, C_{31} = C'_{31}.$$

Soll demnach das Punktquadrupel $E_k(a_k, b_k, c_k)$, $(k = 1, 2, 3, 4)$ mit dem vorliegenden System von n Punkten äquivalent sein, so müssen definitionsgemäss folgende Bedingungen erfüllt werden:

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 0, \\
b_1 + b_2 + b_3 + b_4 &= 0, \\
c_1 + c_2 + c_3 + c_4 &= 0, \\
a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 &= 4, \\
b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 &= 4, \\
c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 &= 4, \\
a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 &= 4 C_{12}, \\
b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 + b_4 c_4 &= 4 C_{23}, \\
c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 + c_4 a_4 &= 4 C_{31}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Aus diesen zu erfüllenden Bedingungen (17) geht unmittelbar hervor, dass zwei äquivalente Quadrupel gleiche Trägheitsmomente in bezug auf jede beliebige Ebene haben. Es seien in der Tat $E_1 E_2 E_3 E_4$ und $E'_1 E'_2 E'_3 E'_4$ zwei äquivalente Quadrupel und

$$\pi : x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

irgendeine Ebene. Für das erste Quadrupel ist das Trägheitsmoment I in bezug auf π

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \sum (a_k \cos \alpha + b_k \cos \beta + c_k \cos \gamma - p)^2 \qquad (18) \\
&= 4 \cos^2 \alpha + 4 \cos^2 \beta + 4 \cos^2 \gamma + 4 p^2 + 8 C_{12} \cos \alpha \cos \beta + 8 C_{23} \cos \beta \cos \gamma + 8 C_{31} \cos \gamma \cos \alpha
\end{aligned}$$

Für das Trägheitsmoment I′ des zweiten Quadrupels wird man den gleichen Ausdruck wie für I erhalten, so dass $\mathrm{I} = \mathrm{I}'$ ist.

Wenn ferner zwei äquivalente Punktquadrupel $E_1 E_2 E_3 E_4$ und $E'_1 E'_2 E'_3 E_4$ in einem Element E_4 übereinstimmen, so liegen die anderen sechs Elemente in einer Ebene. Dies geht aus dem soeben bewiesenen Lehrsatz hervor, indem wir die Trägheitsmomente beider Quadrupel in bezug auf die Ebene $E_1 E_2 E_3$ berechnen und einander gleichsetzen:

$$\sum (a_k \cos\alpha + b_k \cos\beta + c_k \cos\gamma + p)^2 = \sum (a_k' \cos\alpha + b_k' \cos\beta + c_k' \cos\gamma - p)^2.$$

Nach Voraussetzung ist aber $a_4 = a_4'$, $b_4 = b_4'$, $c_4 = c_4'$, so dass die beiden entsprechenden Glieder auf beiden Seiten der Gleichung sich aufheben. Ausserdem verschwinden auf der linken Seite die drei ersten Quadrate; es müssen rechts auch sämtliche Quadrate verschwinden, d. h. die Abstände der Eckpunkte $E_1' E_2' E_3'$ von der Ebene $E_1 E_2 E_3$ verschwinden: beide Dreiecke $E_1 E_2 E_3$ und $E_1' E_2' E_3'$ liegen in derselben Ebene.

Sämtliche Dreiecke, die mit einem festen Punkte E_4 äquivalente Tetraeder bestimmen, können als äquivalente Dreiecke in einer Ebene π aufgefasst werden. Wenn nämlich die Ebene

$$\nu : x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0$$

normal zu der gemeinsamen Ebene π dieser Dreiecke ist, so bedeutet die Beziehung $I = I'$ nichts anderes, als dass die Dreiecke $E_1 E_2 E_3$ und $E_1' E_2' E_3'$ gleiche Trägheitsmomente in bezug auf die Schnittlinie der Ebenen π und ν, somit in bezug auf sämtliche Gerade der Ebene π haben. Die Dreiecke $E_1 E_2 E_2$, $E_1' E_2' E_3'$, ... sind demnach äquivalente Dreiecke in einer Ebene. Nach dem Äquivalenzsatz der Ebene haben diese Dreiecke denselben Schwerpunkt und sind einer bestimmten Ellipse eingeschrieben. In jeder Seitenfläche eines äquivalenten Tetraeders $E_1 E_2 E_2 E_4$ liegt eine solche Ellpise, die durch die drei Eckpunkte des Tetraeders eindeutig bestimmt ist. Das Tetraeder $E_1 E_2 E_3 E_4$ selbst bestimmt ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt in dem Schwerpunkt des Tetraeders liegt und auf welchem die vier erwähnten Ellipsen liegen. Die Transversalen von den Eckpunkten nach den Schwerpunkten der gegenüberliegenden Dreiecksflächen sind den Dreiecksebenen konjugiert. Die Tangentialebenen dieses Ellipsoids in den Eckpunkten $E_1 E_2 E_3 E_4$ sind infolgedessen den gegenüberliegenden Dreiecksflächen parallel.

Alle diese äquivalenten Tetraeder sind inhaltsgleich und die Tetraeder von grösstem Volumen, die sich dem Ellipsoid einschreiben lassen [6]. Ausserhalb und innerhalb dieses Ellipsoids, das wir als *Äquivalenz-*

ellipsoid des Punktsystems bezeichnen wollen, gibt es kein weiteres *äquivalentes* Tetraeder mehr. Denn gäbe es ein solches $E_1' E_2' E_3' E_4'$, so könnte man dem Ellipsoid ein äquivalentes Tetraeder $E_1 E_2 E_3 E_4$ so einzeichnen, dass beispielsweise die Ebenen $E_1 E_2 E_3$ und $E_1' E_1' E_3'$ parallel wären. Die Abstände der vierten Eckpunkte und des gemeinsamen Schwerpunktes von diesen parallelen Grundflächen wären aber für das eine Tetraeder grösser als für das andere. Die Trägheitsmomente I und I′ der beiden äquivalenten Tetraeder in bezug auf eine der beiden Grundebenen wären also verschieden gross, was der Voraussetzung widerspricht.

Die Gleichung des Äquivalenzellipsoids ist von der Form

$$A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 + 2 B_{12} xy + 2 B_{23} yz + 2 B_{13} xz = A. \qquad (19)$$

Um die Koeffizienten zu bestimmen, suchen wir die Berührungspunkte G_x, G_y, G_z des Ellipsoids mit den zu den *YZ*-, *XZ*- und *XY*-Ebenen parallelen Tangentialebenen.

$G_x(a_1, b_2, c_3)$ z. B. ist die Spitze eines äquivalenten Tetraeders, dessen Grundfläche $G_x' G_x'' G_x'''$ in der Ebene $x = -\frac{a_1}{3}$ liegt. Gleichung (17) ergibt

$$a_1^2 + 3 \cdot \left(-\frac{a_1}{3}\right)^2 = 4,$$

also

$$a_1 = \sqrt{3}\,;\; a_2 = a_3 = a_4 = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Setzt man diese Werte in Gleichung (17) ein, so resultiert

$$b_1 = C_{12} \cdot \sqrt{3}\,;\; c_1 = C_{13} \cdot \sqrt{3}\,.$$

Die Grenzpunkte G_x, G_y, G_z haben folgende Koordinaten:

$$\begin{aligned} &G_x(\sqrt{3}\,;\, C_{12}\sqrt{3}\,;\, C_{13}\sqrt{3}), \\ &G_y(C_{12}\sqrt{3}\,;\, \sqrt{3}\,;\, C_{23}\sqrt{3}), \qquad (20) \\ &G_z(C_{13}\sqrt{3}\,;\, C_{23}\sqrt{3}\,;\, \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Wird berücksichtigt, dass in diesen Punkten die Tangentialebenen zu den Koordinatenebenen parallel laufen, so ergeben sich hieraus leicht die Koeffizienten von Gleichung (19). Die Gleichung des Äquivalenzellipsoids erscheint dementsprechend in der Gestalt:

$$(1 - C_{23}^2)\,x^2 + (1 - C_{13}^2)\,y^2 + (1 - C_{12}^2)\,z^2 + 2\,(C_{13}C_{32} - C_{12})\,x\,y + \qquad (21)$$
$$+ 2\,(C_{21}C_{13} - C_{23})\,yz + 2\,(C_{32}C_{21} - C_{31})\,zx = 3\,(1 - C_{12}^2 - C_{23}^2 - C_{13}^2 + 2\,C_{12}C_{23}C_{31}).$$

Ähnlich wie es in der Ebene geschah, lassen sich die Eckpunkte irgendeines äquivalenten Tetraeders auf eine beliebige Ebene parallel zur X- oder Y- oder Z-Achse projizieren.

Es seien $E_k(a_k, b_k, c_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$, die Eckpunkte, die wir parallel zur X-Achse auf die Ebene

$$x = py + qz + r \qquad (22)$$

zu projizieren haben. Die Ebenenkonstanten p, q, r sollen derart bestimmt werden, dass die Summe der Quadrate

$$S = \sum (x_k - a_k)^2 = \sum (p\,b_k + q c_k + r - a_k)^2$$

ein Minimum wird. Mit Rücksicht auf die Gleichung (17) ergibt sich sofort

$$S = 4\,p^2 + 4\,q^2 + 4\,r^2 + 4 + 8\,C_{23}\,pq - 8\,C_{12}\,p - 8\,C_{13}\,q. \qquad (23)$$

Bei minaler Summe S muss $r = 0$ sein. Die gesuchte Projektionsebene (22) muss deshalb durch den Schwerpunkt des Tetraeders $E_1\,E_2\,E_3\,E_4$ gehen. Der Ausdruck

$$S = 4\,p^2 + 4\,q^2 + 4 + 8\,C_{23}\,pq - 8\,C_{12}\,p - 8\,C_{13}\,q$$

ist am kleinsten, wenn die Gleichungen

$$\frac{\delta S}{\delta p} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\delta S}{\delta q} = 0$$

erfüllt sind, d. h.

$$p + C_{23}\,q = C_{12},$$

$$C_{23}\,p + q = C_{13}.$$

Hieraus folgt

$$(1 - C_{23}^2)\,p = C_{12} - C_{13}\,C_{32},$$

$$(1 - C_{23}^2)\,q = C_{13} - C_{12}\,C_{23}.$$

Die Gleichung der Projektionsebene φ_x mit minimaler Streuung der Eckpunkte in der X-Richtung lautet

$$\varphi_x : (1 - C_{23}^2)\, x = (C_{12} - C_{13}\, C_{32})\, y + (C_{13} - C_{12}\, C_{23})\, z\,. \qquad (24)$$

Bildet man aus der Gleichung des Ellipsoids (21) die Gleichung der Polarebene des unendlich fernen Punktes U_x der X-Achse

$$U_x : x_0 = \infty\,;\ y_0 = 0\,;\ z_0 = 0\,,$$

so ergibt sich die nämliche Gleichung (24). Diese Ebene (24) enthält infolgedessen die Berührungskurve des um das Äquivalenzellipsoid gelegten Tangentialzylinders, dessen Mantellinien parallel zur X-Achse laufen.

Analog gibt es bezüglich der Y- und Z-Richtung zwei Ebenen

$$\begin{aligned} \varphi_y &: (1 - C_{13}^2)\, y = (C_{23} - C_{21}\, C_{13})\, z + (C_{21} - C_{23}\, C_{31})\, z\,, \\ \varphi_z &: (1 - C_{21}^2)\, z = (C_{31} - C_{32}\, C_{21})\, x + (C_{32} - C_{31}\, C_{12})\, y\,, \end{aligned} \qquad (25)$$

für welche die Punkte des Systems in der Y-, bzw. Z-Richtung die kleinste Streuung aufweisen. In diesen Ebenen φ_y und φ_z liegen die Berührungskurven der beiden Tangentialzylinder des Äquivalenzellipsoids, deren Mantellinien parallel zur Y-, bzw. Z-Achse sind.

Falls nun das ursprüngliche System von n-Punkten $P_k(x_k, y_k, z_k)$ *linear abhängig* ist, müssen die drei Regressionsebenen φ_x, φ_y und φ_z in eine zusammenfallen. Die Bedingung dafür ist das Verschwinden der symmetrischen Determinante der Ebenengleichungen (24) und (25):

$$\begin{vmatrix} 1 - C_{23}^2 & C_{13}\, C_{32} - C_{12} & C_{12}\, C_{23} - C_{13} \\ C_{13}\, C_{23} - C_{12} & 1 - C_{13}^2 & C_{21}\, C_{13} - C_{23} \\ C_{12}\, C_{23} - C_{13} & C_{21}\, C_{13} - C_{23} & 1 - C_{12}^2 \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (26)$$

Gleichung (26) ist zugleich die Bedingung dafür, dass das Äquivalenzellipsoid (21) zerfällt.

Beim speziellen Fall eines ebenen Punktsystems hat man $C_{12} = 0$, $C_{13} = 0$ und $C_{23} = 0$ zu setzen. Gleichung (26) geht dann in

$$\begin{vmatrix} 1 & -C & 0 \\ -C & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

über, oder $C^2 = 1$: ein Resultat, das Gleichung (16) bestätigt.

Wenn die Streuungen σ_{xx}, σ_{yy} und σ_{zz} nicht auf den Wert «1» normiert sind, so hat man in den obigen Gleichungen des Ellipsoids (21) und der Regressionsebenen (24) und (25)

$$\begin{aligned} & x \text{ durch } x : \sigma_{xx}, \\ & y \text{ durch } y : \sigma_{yy} \\ \text{und } & z \text{ durch } z : \sigma_{zz} \end{aligned}$$

zu ersetzen.

Wenn ein System von $n > 2$ Paaren bzw. $n > 3$ Tripeln von zusammengehörigen Werten auf den Grad ihrer *linearen Abhängigkeit* untersucht werden soll, so gestatten die beiden Äquivalenzlehrsätze eine wesentliche Veranschaulichung der Aufgabe. Geometrisch ausgedrückt, tritt im ersten Falle ein Dreieck, im zweiten Falle ein Tetraeder an Stelle eines mehr oder weniger umfangreichen Wertesystems. Die obigen Ausführungen zeigen aber auch, dass durch den einzigen Korrelationskoeffizienten C bei einem System von zwei Variabeln bzw. durch die drei Korrelationskoeffizienten C_{12}, C_{23} und C_{31} bei einem System von drei Variabeln keine allgemeinen, weitreichenden Aussagen über das Abhängigkeitsverhältnis dieser Variabeln zu erwarten sind. Die Korrelationsmethode setzt vielmehr leistungsfähigere Prüfungsverfahren voraus.

Literaturnachweis

[1] *O. Anderson:* Einführung in die mathematische Statistik. Wien 1935.

[2] *E. Czuber:* Die statistischen Forschungsmethoden. Wien 1921.

[3] *G. Jung:* Encyklopedie der mathematischen Wissenschaften, vierter Band: Mechanik, erster Band: Geometrie der Massen.

[4] *W. Lietzmann:* Über die Beurteilung der Leistungen in der Schule, Mathematisches/Psychologisches/Pädagogisches. Leipzig 1927.

[5] *A. Linder:* Statistische Methoden. Basel 1945.

[6] *J. Steiner:* J. für Math. 30 (1846) = Gesam. Werke 2, S. 347.