

# Das Maximum des Selbstbehaltes in der Lebensversicherung unter Berücksichtigung der Rückversicherungskosten

Autor(en): **Ammeter, Hans**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **46 (1946)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966879>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Das Maximum des Selbstbehaltes in der Lebensversicherung unter Berücksichtigung der Rückversicherungskosten

Von *Hans Ammeter*, Zürich

Als Hilfsmittel zur Bestimmung des Maximums des Selbstbehaltes gelangt in der Regel die individuelle Risikotheorie zur Anwendung, die als fundamentale Masszahl für die Stabilität des Risikogeschäftes das mittlere Risiko verwendet. Das mittlere Risiko ist definiert als Streuung des Verteilungsgesetzes der Gewinne und Verluste, d. h. der sogenannten Gewinn- oder Verlustfunktion. Es gestattet bei grossen Versicherungsbeständen und bei nicht allzu grosser Verschiedenheit der einzelnen Risikosummen einen Rückschluss auf die zugrunde liegende Gewinn- oder Verlustfunktion.

Für die praktische Anwendung und vor allem für das Problem des Maximums des Selbstbehaltes wird in der Regel nicht das mittlere Risiko selbst als Stabilitätskriterium verwendet. Es werden vielmehr gewisse aus diesem abgeleitete Masszahlen eingeführt, z. B. von einzelnen Autoren die als Differenz zwischen den vorhandenen Sicherheitsmitteln und dem  $k$ -fachen mittleren Risiko definierte Risikoreserve, von andern Autoren verschiedene Varianten des relativen Risikos. Als bekannteste Definition des relativen Risikos ist das zur Summe der Risikoprämien ins Verhältnis gesetzte mittlere Risiko zu erwähnen. Ergibt das gewählte Kriterium keine genügende Stabilität, so lässt sich diese unter Umständen durch eine geeignete Begrenzung der Risikosummen erreichen. Es besteht die Möglichkeit, das gewählte Kriterium zur Bestimmung des Maximums der Risikosumme (d. h. des Selbstbehaltes) zu verwenden.

Nach Berger [1]<sup>1)</sup> berechnet z. B. *Laurent* [1] dieses Maximum für eine neu abzuschliessende Versicherung aus der Bedingung, dass die

---

<sup>1)</sup> Die im Text angeführten Nummern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

Risikoreserve durch den Abschluss der neuen Versicherung nicht zunimmt. *Radke* [1] stellt dagegen die noch weitergehende Forderung auf, dass die Risikoreserve nach dem Abschluss der neuen Versicherung zu einem Minimum wird. *Landré* [1] bestimmt seinerseits das Maximum mit Hilfe des Postulats, dass durch den Abschluss einer neuen Versicherung das relative Risiko keine Erhöhung erfährt. Sind die Versicherungssummen des alten Bestandes alle annähernd gleich gross, so führt der Landrésche Ansatz zu einem Maximum in der Höhe des doppelten Betrages der mittleren Versicherungssumme. *Meidell* [11] erhält ferner nach dem Landréschen Postulat und unter der Annahme, dass die Versicherungssummen nach dem Gesetz von Pareto verteilt sind, für das Maximum  $M$  die Formel

$$M = \frac{2}{3} m \left( n^{\frac{1}{5}} + n^{-\frac{1}{5}} \right),$$

worin  $m$  die mittlere Versicherungssumme und  $n$  die Anzahl der Versicherten bedeuten.

Im allgemeinen lässt sich feststellen, dass in der Praxis diese Methoden kaum beachtet werden. Die Rückversicherungspolitik vieler Versicherungsunternehmungen richtet sich bewusst nicht nach technischen Gesichtspunkten. Ferner vermögen die erwähnten Lösungen den praktischen und risikotheorietischen Anforderungen nicht in jeder Hinsicht zu genügen. Vom praktischen Standpunkt aus ist darauf hinzuweisen, dass die nach diesen Methoden bestimmten Maxima in der Regel offensichtlich zu niedrig ausfallen. Ausserdem würde die Berechnung des mittleren Risikos für die meisten Unternehmungen eine unverhältnismässig grosse Arbeit erfordern. Es sei nur daran erinnert, dass einerseits die vom gleichen Versicherten abgeschlossenen Policen zusammengefasst werden müssten, und dass andererseits gleichartige Versicherungen mit verschiedener Versicherungssumme nicht, wie etwa bei der Gruppenrechnung des Deckungskapitals, vereinigt werden dürften.

Vom theoretischen Standpunkt aus lassen sich gegen die auf der individuellen Risikotheorie beruhenden Methoden zur Bestimmung des Maximums des Selbstbehaltes folgende Einwände erheben:

a) Das Maximum wird nur für den Fall einer einzigen neu abzuschliessenden Versicherung bestimmt; eine Lösung für mehrere Neu-

abschlüsse kann ohne Einführung einer willkürlichen Nebenbedingung nicht gegeben werden.

b) Die vorhandenen Sicherheitsmittel der Versicherungsunternehmung fallen bei diesen Methoden durchwegs aus der Rechnung; dadurch wird der Eindruck erweckt, dass das Maximum von den Sicherheitsmitteln unabhängig sei. Zudem fällt das Maximum um so höher aus, je unausgeglichener der Versicherungsbestand ist.

c) Das mittlere Risiko eignet sich lediglich dann als Masszahl für die Stabilität des Risikogeschäftes, wenn nur verhältnismässig niedrige Maxima zugelassen werden und demnach eine nicht allzu grosse Asymmetrie in der Verteilung der Risikosummen besteht. Die durch die Rückversicherung bewirkte strukturelle Veränderung des Bestandes lässt sich durch das mittlere Risiko allein nur ungenügend erfassen.

d) Die dem Erstversicherer aus der Rückversicherung erwachsenden Kosten werden nicht berücksichtigt.

Um diesem letztgenannten Einwand Rechnung zu tragen, hat *Haferl* [10] in seiner Kongressarbeit eine weitere Methode erläutert. Diese Methode postuliert vorerst ein Minimum des Selbstbehaltes, d. h. es wird eine Bedingung aufgestellt für eine zu weitgehende Rückversicherung. Das Maximum kann dann innerhalb des Bereichs, der durch den minimalen Selbstbehalt und die höchste im Bestand auftretende Versicherungssumme abgegrenzt wird, durch Schätzung gefunden werden. Der minimale Selbstbehalt bestimmt sich hierbei aus der Bedingung, dass die Rückversicherungskosten, als Sicherheitsmittel betrachtet, eine genügende Stabilität für den rückzuversichernden Bestand gewährleisten würden. Für die praktische Berechnung des minimalen Selbstbehaltes zieht *Haferl* das sogenannte Grenzportefeuille — d. h. von allen rückzuversichernden Exzedenten einen Betrag in der Höhe der Währungseinheit — in Betracht. Unter bestimmten Annahmen gelangt er zum Ergebnis, dass ein Grenzportefeuille von 400 Policen eine genügende Stabilität aufweisen würde. Das Maximum wäre dann so zu bestimmen, dass 200 Policen von der Rückversicherung erfasst würden.

Gegen die Methode von *Haferl*, der im übrigen das Verdienst zukommt, erstmals die Rückversicherungskosten mitberücksichtigt zu haben, lassen sich folgende zwei Einwände erheben:

a) Die Sicherheitsmittel der Versicherungsunternehmung und die Stabilität des Bestandes im Selbstbehalt bleiben gänzlich unberücksichtigt.

b) Der minimale Selbstbehalt hängt von der Struktur des rückzuversichernden Bestandes ab; daher darf er nicht aus dem Grenzportefeuille allein berechnet werden. Die Erfüllung des Postulates des minimalen Selbstbehaltes würde eine beträchtlich weitergehende Rückversicherung bedingen als Haferl angibt, weil die starke Verschiedenheit der Risikosummen bei den hohen Versicherungssummen berücksichtigt werden muss. Eine Abschätzung des Maximums wird unter diesen Umständen erschwert.

Es ergibt sich demnach, dass die üblichen Methoden zur Bestimmung des Maximums des Selbstbehaltes nicht zu befriedigen vermögen. Noch weniger können gefühlsmässige Schätzungen befriedigen. Dies gilt insbesondere für die Lebensversicherung. Es wird daher im folgenden versucht, das Maximum des Selbstbehaltes mit Hilfe der kollektiven Risikotheorie zu bestimmen. Diese Theorie lehrt, dass eine genügende Stabilität des Risikogeschäftes nur erreicht werden kann, wenn neben einer Sicherheitsreserve noch laufend ein Sicherheitszuschlag zur Verfügung steht, wobei dieser um so höher angesetzt werden muss, je grösser die maximale Versicherungssumme gewählt wird. Durch eine geeignete Rückversicherung lässt sich somit der erforderliche Sicherheitszuschlag verkleinern. Andererseits erwachsen dem Erstversicherer durch die Rückversicherung gewisse zusätzliche Kosten. Um eine möglichst wirtschaftliche Auswirkung der Rückversicherung zu erreichen, sei folgendes Postulat aufgestellt: das Maximum ist so zu wählen, dass die Gesamtaufwendungen für Sicherheitszuschläge und Rückversicherungskosten zu einem Minimum werden.

Zum besseren Verständnis dieser Untersuchungen sei jedoch vorerst eine Übersicht über die den Ableitungen zugrunde liegende kollektive Risikotheorie gegeben, soweit sie für das Problem des Maximums des Selbstbehaltes von Bedeutung ist.

## **I. Einige Ergebnisse der kollektiven Risikotheorie**

Im folgenden werden kurz einige grundlegende Gesichtspunkte der kollektiven Risikotheorie dargestellt. Für viel Raum beanspruchende Ableitungen sei auf die im Literaturverzeichnis angeführten Originalarbeiten verwiesen.

a) **Allgemeine Grundsätze**

Die individuelle Risikotheorie setzt die Kenntnis jeder einzelnen Versicherung eines Bestandes voraus. Dadurch wird ihre praktische Anwendung stark erschwert und bei grossen Beständen fast unmöglich. Die kollektive Risikotheorie hingegen stützt sich nur auf gewisse Eigenschaften des Bestandes; im Sinne der kollektiven Risikotheorie gleichartige Bestände brauchen keineswegs identisch zu sein.

Die kollektive Risikotheorie legt ihren Betrachtungen folgendes Modell zugrunde: die Versicherungsunternehmung verfüge über eine Sicherheitsreserve  $SR$ , der einerseits die kontinuierlich einlaufenden, mit einem proportionalen Sicherheitszuschlag erhöhten Risikoprämien  $(1 + \lambda) P$  gutgeschrieben, andererseits die fällig gewordenen Risikosummen  $z$  belastet werden. Die Wahrscheinlichkeit, mit der das Negativ-Werden der Reserve  $SR$  erwartet werden muss (Ruinwahrscheinlichkeit oder Ausgleichungsindex), stellt die von der kollektiven Theorie verwendete Masszahl für die Stabilität des Risikogeschäftes dar.

Eine Verzinsung der Reserve  $SR$  wird in der Regel aus praktischen Erwägungen nicht berücksichtigt. Dadurch wird eine vollständige Trennung des Risiko- und des Spargeschäftes erreicht.

Betrachtet man die Veränderung der Reserve  $SR$  während eines Zeitelementes  $dt$ , so ist zunächst mit einer Einnahme an Risikoprämien und Sicherheitszuschlägen von  $(1 + \lambda) dP$  zu rechnen. Tritt ein Versicherungsfall ein, so vermindert sich  $SR$  um die fälliggewordene Risikosumme  $z$ , wobei die Wahrscheinlichkeit, dass diese zwischen  $z$  und  $z + dz$  liegt,  $p(z) dz$  betragen möge. Diese Verteilungsfunktion  $p(z)$  kennzeichnet die Struktur des Versicherungsbestandes. Sie wird im folgenden als stetig und differenzierbar vorausgesetzt. Es gilt für sie — wenn nur positive Risikosummen auftreten — die Beziehung

$$\int_0^{\infty} p(z) dz = 1$$

und, wenn die mittlere Risikosumme als Masseinheit für  $z$  gewählt wird,

$$\int_0^{\infty} z p(z) dz = 1.$$

Das Elementarspiel in einem Zeitelement — es heisst nach *Lundberg* [4] «Risikoelement» — sieht einen Einsatz  $(1 + \lambda) dP$  vor, dem verschiedene mögliche Auszahlungen  $z$  ( $0 \leq z \leq \infty$ ) gegenüberstehen. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Einsatz ohne Gegenleistung verfällt, beträgt (bei der gewählten Masseinheit für  $z$ )  $1 - dP$ , während die Auszahlungen  $z$  mit den Wahrscheinlichkeiten  $p(z) dz dP$  zu erwarten sind.

Die kollektive Risikotheorie stützt sich ferner auf die fundamentale Annahme, dass aufeinanderfolgende Risikoelemente sich wie unabhängige Elementarspiele verhalten. Diese Annahme lässt sich dadurch rechtfertigen, dass in der Regel die Verteilung  $p(z)$  durch die auftretenden Versicherungsfälle nur unwesentlich verändert wird. Überdies lässt sich feststellen, dass bei Unternehmungen, die auf eine langjährige Geschäftstätigkeit zurückblicken können, sich die Verteilung  $p(z)$  nur so langsam verändert, dass  $p(z)$  mit befriedigender Näherung als fest angesehen werden darf. Im folgenden sei daher zunächst die vereinfachende Annahme getroffen, die Verteilung  $p(z)$  bleibe unverändert.

Betrachtet man eine Folge von Risikoelementen, so ist es vom Standpunkt der kollektiven Risikotheorie aus nicht von Bedeutung, innerhalb welcher Zeitstrecke diese abgewickelt werden. Massgebend für das Gesamtergebn dieser Risikoelemente ist nur die Gesamtmenge an Risikoprämien, welche der Reserve  $SR$  zugeführt werden. Die Zeitvariable wird somit in der kollektiven Risikotheorie durch die akkumulierte Risikoprämie  $P$  gemessen.

### b) Das Ruinproblem

Die Reserve  $SR$  betrage anfänglich  $u$  und der zugehörige Ausgleichungsindex  $\delta(u)$ . Zur Berechnung von  $\delta(u)$  empfiehlt es sich, gewisse Hilfsfunktionen einzuführen. Zunächst sei die Funktion  $v(y) dy$  eingeführt, welche die Wahrscheinlichkeit angibt, dass die anfänglich Null betragende Reserve  $SR$  jemals negativ wird und beim erstmaligen Eintreffen dieses Ereignisses ausserdem einen Stand zwischen  $-y$  und  $-(y + dy)$  erreicht. Dieses Ereignis wird im folgenden kurz Ereignis  $v(y)$  genannt. Es ist somit der Ausgleichungsindex für  $u = 0$

$$\delta(0) = \int_0^{\infty} v(y) dy. \quad (1)$$

Das Ereignis  $v(y)$  lässt sich in verschiedene einander ausschliessende Teilereignisse zerlegen; es tritt ein, wenn

a) im ersten Risikoelement eine Summe zwischen  $y$  und  $y + dy$  sofort fällig wird; die entsprechende Wahrscheinlichkeit beträgt  $dP p(y) dy$ ;

b) im ersten Risikoelement mit einer Wahrscheinlichkeit  $(1 - dP)$  keine Summe fällig wird. Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis  $v(y)$  später noch eintritt, ist zu beachten, dass die Reserve  $SR$  nunmehr einen Stand  $(1 + \lambda) dP$  erreicht hat, und nicht mehr — wie für  $v(y) dy$  vorausgesetzt wird — anfänglich Null ist. Um dennoch mit Hilfe der Funktion  $v(y) dy$  rechnen zu können, sei vorübergehend der Stand  $(1 + \lambda) dP$  als Nullpunkt der Sicherheitsreserve angenommen. Das Ereignis  $v(y)$  kann nunmehr auf zwei Arten auftreten, nämlich indem

$b\alpha$ ) die Reserve  $SR$  unter  $(1 + \lambda) dP$  sinkt und zugleich einen Stand zwischen  $-y$  und  $-(y + dy)$  erreicht, wofür eine Wahrscheinlichkeit  $v(y + (1 + \lambda) dP) dy$  besteht;

$b\beta$ ) die Reserve  $SR$  vorerst unter  $(1 + \lambda) dP$ , jedoch nicht unter Null fällt, so dass die Reserve  $SR$  den Anfangswert vor dem ersten Risikoelement wieder erreicht; in diesem Fall ist das Ereignis  $v(y)$  nach dem ersten Risikoelement mit einer Wahrscheinlichkeit

$$v(0) [(1 + \lambda) dP] v(y) dy \quad \text{zu erwarten.}$$

Fasst man diese drei Möglichkeiten zusammen, so erhält man

$$v(y) dy = dP p(y) dy + [1 - dP] [v(0) (1 + \lambda) dP v(y) dy + v(y + (1 + \lambda) dP) dy]. \quad (2)$$

Aus (2) findet man nach Division mit  $dP dy$  und durch den Grenzübergang  $dP \rightarrow 0$  die Differentialgleichung

$$v'(y) + v(y) \left[ v(0) - \frac{1}{1 + \lambda} \right] + \frac{1}{1 + \lambda} p(y) = 0. \quad (2a)$$

Integriert man diese Differentialgleichung über  $y$  von 0 bis  $\infty$ , so ergibt sich unter Berücksichtigung von (1)

$$\left( v(0) - \frac{1}{1 + \lambda} \right) (\delta(0) - 1) = 0. \quad (2b)$$



Es lässt sich zeigen, dass in diesem Produkt der zweite Faktor nicht verschwinden kann, eine Feststellung, die ohne weiteres plausibel ist, weil andernfalls der Ruin der Sicherheitsreserve gewiss wäre, wie hoch auch immer der laufende Sicherheitszuschlag  $\lambda$  bemessen würde. Somit muss in (2 b) der erste Faktor Null sein, so dass man aus (2 a)

$$v(y) dy = \frac{dy}{1 + \lambda} \int_y^\infty p(z) dz \quad (3)$$

erhält, woraus schliesslich noch

$$\delta(0) = \int_0^\infty v(y) dy = \int_0^\infty \frac{dy}{1 + \lambda} \int_y^\infty p(z) dz = \frac{1}{1 + \lambda} \quad (4)$$

gefunden wird. Bemerkenswert ist, dass der Ausgleichungsindex  $\delta(u)$  für  $u = 0$  unabhängig von  $p(z)$  ausfällt.

Für die Berechnung von  $\delta(u)$  für  $u > 0$  empfiehlt es sich, die Hilfsfunktion  $\chi(u, v) dv$  einzuführen.  $\chi(u, v) dv$  ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass die Reserve  $SR$  mit dem Anfangswert Null jemals unter  $-u$  sinkt und ausserdem beim erstmaligen Eintreffen dieses Ereignisses einen Stand zwischen  $-v$  und  $-(v + dv)$  erreicht. Der Ausgleichungsindex  $\delta(u)$  berechnet sich aus  $\chi(u, v) dv$  zu

$$\delta(u) = \int_u^\infty \chi(u, v) dv. \quad (5)$$

Das Ereignis  $\chi(u + du, v) dv$  lässt sich wiederum in unabhängige Teilereignisse zerlegen, wobei die bereits bestimmte Funktion  $v(y)$  benützt wird.

$$\chi(u + du, v) dv = \chi(u, v) dv + \chi(u, u) du v(v - u) dv \quad (6)$$

Aus (6) findet man die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \chi(u, v)}{\partial u} = \chi(u, u) v(v - u). \quad (6a)$$

Die Funktion  $\chi$  lässt sich in der Regel nicht explizite darstellen. Zu einer brauchbaren Schätzung gelangt man jedoch mit Hilfe des sogenannten Ausgleichungskoeffizienten  $R$ , der aus den Beziehungen

oder

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{Rz} p(z) dz &= 1 + (1 + \lambda) R \\ \int_0^{\infty} e^{Rz} v(z) dz &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

berechnet werden kann. Multipliziert man beide Seiten der Gleichung (6a) mit  $e^{Rv}$  und integriert nachher über  $v$  von  $u$  bis  $\infty$ , so ergibt sich

$$\int_u^{\infty} e^{Rv} \frac{\partial \chi(u, v)}{\partial u} dv = \chi(u, u) e^{Ru} \int_u^{\infty} e^{R(v-u)} v(v-u) dv$$

$$0 = \int_u^{\infty} e^{Rv} \frac{\partial \chi(u, v)}{\partial u} dv - e^{Ru} \chi(u, u) = \frac{d}{du} \int_u^{\infty} e^{Rv} \chi(u, v) dv.$$

Unter Berücksichtigung von (7) und von  $\chi(0, v) = v(v)$

erhält man ferner

$$\int_u^{\infty} e^{Rv} \chi(u, v) dv = 1$$

und daraus schliesslich

$$\int_u^{\infty} e^{R(v-u)} \chi(u, v) dv = e^{-Ru}. \quad (8)$$

Mit Rücksicht auf Gleichung (5), und weil  $R$  — wie aus (7) hervorgeht — eine positive Zahl ist, ergibt sich die wichtige Beziehung

$$\delta(u) < e^{-Ru}, \quad (9)$$

die auch

$$\delta(u) = \alpha_u e^{-Ru} \quad (9a)$$

geschrieben werden kann, mit  $0 < \alpha_u < 1$ .

Aus Formel (4) ergibt sich  $\alpha_0 = \frac{1}{1 + \lambda}$ .

Für grosse  $u$  lässt sich ferner die asymptotische Formel

$$\alpha_u \underset{u \rightarrow \infty}{=} \frac{\lambda}{\int_0^{\infty} z e^{Rz} p(z) dz - 1 - \lambda}$$

ableiten. Wie *Laurin* [6], dessen Darstellung bei den obigen Ableitungen im wesentlichen übernommen wurde, anhand einer Reihe von numerischen Beispielen zeigt, weicht  $\alpha_u$  in der Regel nur wenig von eins ab. Berücksichtigt man ferner, dass bei praktischen Anwendungen nur die Grössenordnung des Ausgleichungsindex von Bedeutung ist, so genügt es vereinfachend

$$\delta(u) = e^{-Ru} \tag{9 b}$$

anzunehmen.

### c) Einige Erweiterungen

1. In allen bisherigen Ableitungen ist der laufende Sicherheitszuschlag  $\lambda$  als fest angenommen worden. Ein allfälliger Risikogewinn könnte somit — soweit er durch den Zuschlag  $\lambda$  bedingt ist — nicht ausgeschüttet werden, obschon in der Regel mit einem Anwachsen der Reserve  $SR$  gerechnet werden darf. Der laufende Sicherheitszuschlag kann jedoch auch variabel, je nach dem Stand der Reserve  $SR$ , bemessen werden, und zwar zweckmässig in der Weise, dass der Sicherheitszuschlag  $\lambda(u)$  mit wachsender Reserve  $u$  fällt. Auf diese Weise kann der ausschüttungsfähige Teil der Risikogewinne nach und nach vergrössert werden, womit gleichzeitig ein übermässiges Anwachsen der Reserve  $SR$  verhindert wird. Die Funktion  $\lambda(u)$  heisst Liquidationsfunktion des Risikogeschäftes und wird aus der Gleichung

$$1 + \lambda(u) = \frac{1}{R'(u)} \left[ \int_0^{\infty} e^{-R(u-z) + Rz} p(z) dz - 1 \right] \tag{10}$$

bestimmt, worin  $R(u)$  eine geeignet zu wählende Funktion ist, deren Ableitung  $R'(u)$  an der Stelle  $u$  Ausgleichungskoeffizient heisst. Für den Ausgleichungsindex  $\delta^*(u_0)$  findet man die Formel

$$\delta^*(u_0) = e^{-R(u_0) + R(0)}, \tag{11}$$

wobei  $u_0$  den Anfangswert der Reserve  $SR$  bezeichnet.

2. *Lundberg* [5] hat in einer späteren Arbeit gezeigt, dass die Risikosummenverteilung  $p(z)$  nicht unbedingt als fest angenommen werden muss. Eine Veränderung von  $p(z)$  kann durch eine entsprechende Variation von  $\lambda$  oder  $\lambda(u)$  kompensiert werden, wobei jedoch die Gleichungen (7) oder (10) immer erfüllt sein müssen.

#### d) Bemerkungen

Es fällt auf, dass der Ausgleichungsindex  $\delta(u)$  berechnet werden kann, ohne dass eine Annahme über den Umfang des Versicherungsbestandes notwendig ist. Das bedeutet mit anderen Worten, dass unter sonst gleichen Voraussetzungen für einen grossen und für einen kleinen Versicherungsbestand die Reserve  $SR$  gleichen Umfang haben muss. Es ergibt sich so das fast paradox anmutende Resultat, dass die Stabilität des Risikogeschäftes nicht von der Bestandesgrösse, sondern nur von der Bestandesstruktur und von den verfügbaren Sicherheitsmitteln abhängt. Dieses Ergebnis erscheint jedoch plausibel, wenn man berücksichtigt, dass die Einnahme an Sicherheitszuschlägen  $\lambda$  der Bestandesgrösse proportional ist, und dass die in einem absoluten Betrag bemessene Reserve  $SR$  im allgemeinen um so leichter bereitgestellt werden kann, je grösser der Versicherungsbestand ist.

Die Leistungsfähigkeit der kollektiven Risikotheorie beruht vor allem darauf, dass sämtliche Probleme mit Hilfe der aus dem Bestand leicht abzuleitenden Funktion  $p(z)$  gelöst werden können. Numerische Untersuchungen können daher mit einem tragbaren Arbeitsaufwand bewältigt werden. Für das Problem des Maximums des Selbstbehaltes ist insbesondere darauf hinzuweisen, dass die durch die Rückversicherung eintretende Strukturveränderung mit Hilfe einer entsprechenden Variation der Verteilung  $p(z)$  ohne weiteres berücksichtigt werden kann und dass — im Gegensatz zur individuellen Risikotheorie — die Zulassung verhältnismässig hoher Maxima keine besonderen Schwierigkeiten bietet.

## II. Die Risikosummenverteilung eines Versicherungsbestandes

Vom theoretischen Standpunkt aus wäre es zweckmässig, alle Risikosummen in Rückdeckung zu geben, die ein noch festzusetzendes Maximum überschreiten. In der Praxis begnügt man sich jedoch

meistens damit, ein Maximum für die Versicherungssumme — und nicht für die Risikosumme — festzusetzen. Demzufolge ist die Risikosummenverteilung eines Versicherungsbestandes abhängig von der Festsetzung des Summenmaximums.

### a) Maximierungsregel

In Anlehnung an die übliche Exzedentenmethode wird im folgenden die nachstehende Maximierungsregel angewendet: Der das Maximum  $M$  übersteigende Teil der Versicherungssumme wird während der ganzen Laufzeit der Versicherung in Rückdeckung gegeben, wobei — wenn mehrere Policen auf ein Leben abgeschlossen sind — die Kürzung gleichmässig über alle Policen erfolge.

Es ist nicht notwendig, das Maximum für alle Versicherungskombinationen gleich hoch zu bemessen; in der vorliegenden Untersuchung wird beispielsweise das Maximum für Versicherungen auf einen bestimmten Zeitpunkt zu 150 % des für gemischte Versicherungen geltenden Maximums angesetzt.

### b) Das Untersuchungsmaterial

Die Verteilung  $p(z)$  wird am besten und einfachsten aus den im Versicherungsbestand aufgetretenen Versicherungsfällen bestimmt. Von der Schweizerischen Lebensversicherungs- und Rentenanstalt wurde in freundlicher Weise aus den im Bestande ihrer Einzelkapitalversicherungen aufgetretenen Todesfällen ein Material von 1216 Todesfällen mit einer Gesamtversicherungssumme von rund Fr. 13,229 Millionen für die Untersuchung zur Verfügung gestellt. Als Risikosumme wird immer die Differenz zwischen der Todesfallsumme und dem nach der Tafel RAH 1930/40  $2\frac{1}{2}$  % berechneten Nettodeckungskapital betrachtet.

Eine direkte Bestimmung der Verteilungen  $p(z)$  für verschiedene Maxima  $M$  würde ein verhältnismässig unsicheres Resultat ergeben, weil die Häufigkeit der grossen Risikosummen starke Unregelmässigkeiten aufweist. Es empfiehlt sich daher folgende indirekte Bestimmung vorzunehmen. Es sei

$w(C)$  die Wahrscheinlichkeit, dass eine fällige Todesfallsumme über einen Betrag  $C$  lautet, und

$\pi_C(\varphi) d\varphi$  die Wahrscheinlichkeit, dass eine fällige relative Risikosumme  $\varphi = \frac{z}{C}$  zwischen  $\varphi$  und  $\varphi + d\varphi$  liegt und überdies die Versicherungssumme auf den Betrag  $C$  lautet. Die gesuchte Verteilung der Nettorisikosummen für das Maximum  $M$  ergibt sich dann aus

$$p_M(z) dz = \sum_{C < M} w(C) \pi_C\left(\frac{z}{C}\right) \frac{dz}{C} + \sum_{C > M} w(C) \pi_C\left(\frac{z}{C}\right) \frac{dz}{M}. \quad (13)$$

Die Verteilungen  $w(C)$  und  $\pi_C(\varphi)$  müssen aus dem erwähnten Beobachtungsmaterial bestimmt werden. Für die Verteilung der Versicherungssummen  $w(C)$  ergeben sich folgende Werte:

$C$ in Fr.	$w(C)$ ‰
$\leq 10\ 000$	800
15 000	40
20 000	70
25 000	20
30 000	20
40 000	15
50 000	15
$> 50\ 000$	20

Für Versicherungssummen über Fr. 50 000 wurde die für Einkommensverteilungen oft verwendete Formel von Pareto zugrunde gelegt. Es ist

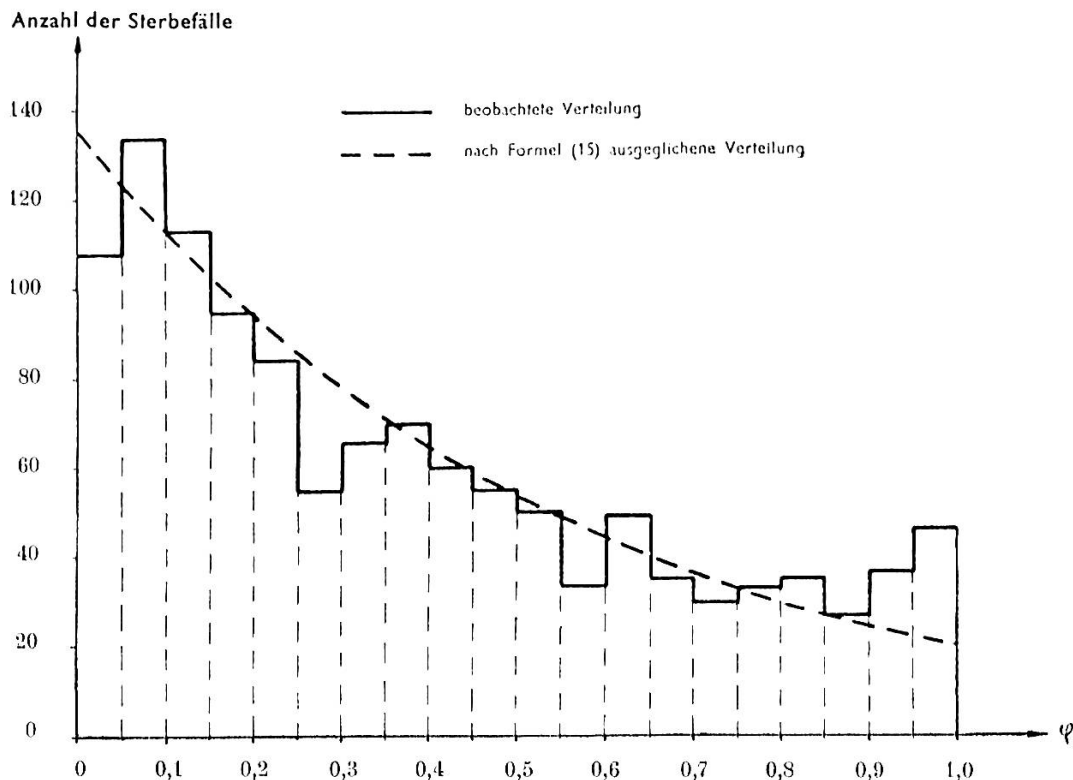
$$W(C) = 223610 C^{-1,5} \quad (14)$$

die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Todesfall eine Versicherungssumme fällig wird, die den Betrag  $C$  übersteigt.

Die aus dem erwähnten Untersuchungsmaterial abgeleiteten Verteilungen  $\pi_C(\varphi)$  der relativen Risikosummen zeigen nur eine geringfügige Abhängigkeit von der Versicherungssumme, so dass vereinfachend eine einheitliche Verteilung  $\pi(\varphi)$  angenommen werden darf. Dabei ist es zweckmässig, die Verteilung  $\pi(\varphi)$  durch die Funktion

$$\pi(\varphi) = \frac{\alpha e^{-\alpha\varphi}}{1 - e^{-\alpha}} \quad (15)$$

auszugleichen, wobei — wie die Rechnung ergeben hat —  $\alpha = 1,9$  zu setzen ist. Eine Gegenüberstellung der beobachteten und ausgeglichenen Verteilung von  $\pi(\varphi)$  ist aus der nachstehenden Figur ersichtlich:



Eine Überprüfung mit Hilfe der Methoden der mathematischen Statistik zeigt, dass die Übereinstimmung zwischen Ausgleichung und Beobachtung nicht besonders gut ist. Die hauptsächlichsten Abweichungen werden durch die Versicherungssummen mit  $C \leq 10\,000$  Fr. bewirkt. Um dieser Besonderheit Rechnung zu tragen, wurde daher für die Risikosummenverteilung in diesem Intervall eine empirische Verteilung  $p^*(z)$  angenommen, die durch Glättung der rohen Beobachtungszahlen bestimmt wird. Für Maxima  $M \geq 10\,000$  Fr. ergibt sich dann für die gesuchte Verteilung  $p_M(z)$  mit Hilfe von Gleichung (13):

$$p_M(z) dz = 0,8 p^*(z) d(z) + \sum_{10\,000 < C \leq M} w(C) \frac{\alpha e^{-\alpha \frac{z}{C}} dz}{1 - e^{-\alpha}} + \frac{\alpha e^{-\alpha \frac{z}{M}} dz}{1 - e^{-\alpha}} \sum_{C > M} w(C). \quad (16)$$

Über den Verlauf der Funktionen  $p_M(z)$  für einige Werte des Maximums  $M$  orientiert die nachstehende Tabelle 1. An Stelle der Funktion  $p_M(z)$  sind in der Tabelle die Integrale

$$P_M(z) = \int_{z_1}^{z_2} p_M(z) dz$$

angegeben. Diese Integrale stellen die Wahrscheinlichkeit dar, dass eine fällige Risikosumme  $z$  in den Bereich  $z_1 < z \leq z_2$  fällt.

Tabelle 1

Intervallgrenzen $z_1 < z \leq z_2$	$P_M(z)$ für $M =$			
	10 000 Fr.	20 000 Fr.	30 000 Fr.	50 000 Fr.
Fr.	‰	‰	‰	‰
0— 2 000	512,4	481,2	475,9	473,6
2 000— 4 000	239,2	223,4	219,8	217,8
4 000— 6 000	135,5	129,3	126,9	125,4
6 000— 8 000	66,4	65,9	64,4	63,2
8 000—10 000	46,5	49,4	48,5	47,6
10 000—12 000		15,5	15,2	14,5
12 000—14 000		12,7	12,8	12,3
14 000—16 000		9,6	9,8	9,6
16 000—18 000		7,1	7,6	7,5
18 000—20 000		5,9	6,5	6,4
20 000—25 000			8,1	8,0
25 000—30 000			4,5	5,4
30 000—35 000				3,2
35 000—40 000				2,6
40 000—45 000				1,6
45 000—50 000				1,3
0— $M$	1000,0	1000,0	1000,0	1000,0

### III. Die Abhängigkeit des Maximums des Selbstbehaltes von den Sicherheitsmitteln des Erstversicherers

#### a) Grundsätzliche Erwägungen

Durch die Einführung eines Maximums wird in erster Linie eine genügende Stabilität für den im Selbstbehalt verbleibenden Bestand angestrebt. Für die Umschreibung des Stabilitätsbegriffes bei einer Lebensversicherungsunternehmung muss dem subjektiven Ermessen notwendig ein gewisser Spielraum eingeräumt werden.

Nach der älteren Auffassung ist die Stabilität eines Versicherungsunternehmens nach der Wahrscheinlichkeit zu beurteilen, mit der ein



Ruin der Unternehmung als Folge von zufallsmässigen Risikoverlusten zu erwarten ist. Nun zieht aber ein Ruin des Risikogeschäftes nicht unbedingt den Ruin des ganzen Versicherungsbetriebes nach sich. Zur Deckung von Risikoverlusten können vorhandene Sicherheitsmittel (allgemeine Reserven und Sicherheitszuschläge) sowie die Unkosten und Zinsgewinne, nicht aber die für das Spargeschäft reservierten Mittel (Deckungskapital, Sparprämien) herangezogen werden. Mit Rücksicht auf die Publizität der Rechnungslegung und aus Konkurrenzrücksichten wird jedoch eine Unternehmung nur im äussersten Notfall von der Möglichkeit Gebrauch machen, Verluste des Risikogeschäftes aus Mitteln, die für andere Zwecke reserviert sind, zu decken. Die Stabilität des Risikogeschäftes sollte vielmehr autonom derart gewährleistet sein, dass eine gleichmässige Überschussentwicklung zu erwarten ist.

In diesem Sinne ist es zweckmässig, eine Sicherheitsreserve  $u$  bereitzustellen und diese durch laufende Sicherheitszuschläge weiter zu äufnen. Eine genügende Stabilität des Risikogeschäftes kann dann als gegeben betrachtet werden, wenn der im Kapitel I eingeführte Ausgleichungsindex  $\delta(u)$  eine kleine Zahl ist. In den folgenden Untersuchungen wird immer eine genügende Stabilität angenommen, wenn der Ausgleichungsindex kleiner ist als  $10^{-3}$ . Eine andere Festsetzung für  $\delta(u)$  würde sich gleich auswirken wie eine Erhöhung der Sicherheitsreserve  $u$  im Verhältnis der Logarithmen der Ausgleichungsindexe.

#### **b) Die Berechnung des laufenden Sicherheitszuschlages bei gegebener Sicherheitsreserve und gegebenem Maximum**

Bei den in Kapitel I dargestellten Formeln wird vorausgesetzt, dass die Risikosummen  $z$  und die Sicherheitsreserve  $SR$  mit der mittleren Risikosumme als Masseinheit gemessen werden. Für verschiedene Maxima  $M$  würden sich verschiedene Masseinheiten ergeben, weil die mittlere Nettorisikosumme

$$\bar{z}_M = \int_0^M z p_M(z) dz$$

vom Maximum abhängig ist. Für die Rechnung empfiehlt es sich daher, eine feste, vom Maximum unabhängige Masseinheit zu verwenden, z. B. die mittlere Brutto- risikosumme

$$\bar{z} = \int_0^{\infty} z p_{\infty}(z) dz.$$

Für die vorliegende Untersuchung wird die mittlere Risikosumme für das Maximum 1 000 000 Fr. als Masseinheit betrachtet. Die in Kapitel I dargestellten Formeln müssen dieser abgeänderten Festsetzung über die Masseinheit angepasst werden. Hierbei zeigt es sich, dass die Formeln für den Ausgleichungsindex unverändert bleiben, während Formel (7) folgende Gestalt annimmt:

$$\int_0^M e^{Rz} p_M(z) dz = 1 + (1 + \lambda) R\bar{z}_M. \quad (17)$$

Setzt man die Sicherheitsreserve  $u$  als bekannt voraus und wählt den Ausgleichungsindex entsprechend dem gewünschten Stabilitätsgrad, so ergibt sich aus Formel (9) für den Ausgleichungskoeffizienten

$$R = - \frac{\ln \delta(u)}{u} \quad (18)$$

und für den erforderlichen laufenden Sicherheitszuschlag bei einem Maximum  $M$ :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_M &= \frac{\int_0^M e^{Rz} p_M(z) dz - 1 - R\bar{z}_M}{R\bar{z}_M} \\ &= \frac{\int_0^M e^{Rz} p_M(z) dz - 1 - R \int_0^M z p_M(z) dz}{R \int_0^M z p_M(z) dz} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Zur Auswertung dieser Formel müssen die auftretenden Integrale bestimmt werden, wobei für  $p_M(z)dz$  der Wert aus Formel (16) eingesetzt werden muss. Das erste Glied in Formel (16) kann durch numerische Integration (Trapezregel) ermittelt werden. Für die weiteren Glieder werden mit Vorteil die Integralformeln verwendet:

und

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 \pi(\varphi) \varphi C d\varphi &= \frac{1 - e^{-\alpha}(1 + \alpha)}{\alpha(1 - e^{-\alpha})} C \\ \int_0^1 \pi(\varphi) e^{R\varphi C} d\varphi &= \frac{\alpha(e^{RC-\alpha} - 1)}{(1 - e^{-\alpha})(RC - \alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

In der nachstehenden Tabelle sind einige Beispiele über den Wert von  $\lambda_M$ , wie er sich aus Formel (19) ergibt, zusammengestellt.

Tabelle 2

$M$ in Fr.	$\underline{M}$	Laufender Sicherheitszuschlag in % der Netto-Risikoprämien für das Maximum $M$ bei einer Sicherheitsreserve von	
		$u = 250 \bar{z} = 1\,117\,500$ Fr.	$u = 1000 \bar{z} = 4\,470\,000$ Fr.
		%	%
10 000	2,24	3,64	0,35
25 000	5,59	4,12	0,59
50 000	11,19	5,12	0,86
100 000	22,37	6,42	1,16
200 000	44,75	8,95	1,67
300 000	67,12	11,91	2,13
400 000	89,49	14,88	2,49
500 000	111,87	18,22	2,83
1 000 000	223,73	56,57	4,18

Die Tabelle zeigt, dass der laufende Sicherheitszuschlag mit wachsendem Maximum stark ansteigt, andererseits aber um so kleiner ausfällt, je grösser die verfügbare Sicherheitsreserve ist. Durch eine geeignete Festsetzung des Maximums kann umgekehrt der laufende Sicherheitszuschlag auf einen tragbaren Satz reduziert werden. Schon mit Rücksicht auf die Konkurrenzfähigkeit des Unternehmens darf  $\lambda$  nicht allzu hoch angesetzt werden. Der laufende Sicherheitszuschlag steht nämlich für die Gewinnausschüttung grundsätzlich nicht zur Verfügung, sondern muss zur Deckung allfälliger künftiger Verluste reserviert werden. Andererseits dürfte es im Hinblick auf die Unsicherheit der Rechnungsgrundlagen für praktische Belange zweckmässig sein, den laufenden Sicherheitszuschlag  $\lambda$  nicht unter 5 % der Nettorisikoprämien zu senken.

## IV. Das Maximum des Selbstbehaltes unter Berücksichtigung der Rückversicherungskosten

### a) Die Rückversicherungskosten

Durch die Rückversicherung der grossen Versicherungssummen lässt sich, wie im vorigen Kapitel gezeigt wurde, eine beträchtliche Einsparung an gebundenen Sicherheitszuschlägen erzielen. Andererseits ist die Rückversicherung für den Erstversicherer mit gewissen Kosten verbunden. Diese bestehen einmal in der für die Bedürfnisse des Rückversicherers reservierten Unkosten- und Sicherheitsbelastung und ferner auch in den zusätzlichen Unkosten, die dem Erstversicherer aus den besonderen mit der Rückversicherung verbundenen Verwaltungsumtrieben entstehen.

Die Rückversicherungskosten werden in der Regel in ‰ der Versicherungssummen bemessen. Für die vorliegende Untersuchung empfiehlt es sich jedoch, diese Kosten wiederum in einem festen Prozentsatz der Nettorisikoprämien auszudrücken. Um eine Umrechnung zu ermöglichen, muss unter Umständen die jährliche Nettorisikoprämie des rückversicherten Bestandes in ‰ der rückversicherten Summe festgestellt werden. Für das vorliegende Material hat es sich gezeigt, dass die Nettorisikoprämien des rückversicherten Bestandes rund 7,5 ‰ der entsprechenden Versicherungssummen betragen (durch diese Prämie kommt das verhältnismässig hohe Durchschnittsalter der Versicherten mit grosser Versicherungssumme zum Ausdruck!). Einem Rückversicherungskostensatz von beispielsweise 5 ‰ der Versicherungssumme entspricht somit ungefähr ein Satz von  $66\frac{2}{3}$  ‰ der Risikoprämien.

### b) Das Maximum bei festem Sicherheitszuschlag

Im Kapitel III wurde gezeigt, dass der laufende Sicherheitszuschlag um so niedriger ausfällt, je tiefer das Maximum  $M$  angesetzt wird; umgekehrt steigen die Rückversicherungskosten mit fallendem Maximum. Die Sicherheitsbelastung  $\lambda_M$  und die Rückversicherungskosten  $\lambda_R$  können unter der Bezeichnung «Ausgleichungskosten» zusammengefasst werden. Für die Bestimmung des Maximums des Selbstbehaltes lässt sich dann folgendes Postulat formulieren: *Das Maximum des Selbstbehaltes ist so zu wählen, dass die Ausgleichungs-*

*kosten bei gegebener Stabilität und gegebener Sicherheitsreserve ein Minimum werden.*

Der minimale Ausgleichungskostensatz für das gesuchte Maximum  $M$  beträgt:

$$k_M = \bar{z}_M \lambda_M + (1 - \bar{z}_M) \lambda_R \quad (21)$$

oder unter Berücksichtigung von Gleichung (19)

$$k_M = \frac{\int_0^M e^{Rz} p_M(z) dz - 1 - R\bar{z}_M + (1 - \bar{z}_M) R \lambda_R}{R}. \quad (21 a)$$

Setzt man

$$\bar{z}_M = \int_0^M z p_M(z) dz,$$

so ergibt sich bei Zusammenfassung der Integrale

$$k_M = \frac{\int_0^M p_M(z) dz \{e^{Rz} - R(1 + \lambda_R)z\} - R\lambda_R - 1}{R}. \quad (21 b)$$

In dieser Formel hängt nur das Integral im Zähler vom Maximum  $M$  ab. Es genügt deshalb das Minimum der Funktion

$$F(M) = \int_0^M p_M(z) dz \{e^{Rz} - R(1 + \lambda_R)z\}$$

zu bestimmen, die den Mittelwert der Funktion

$$\psi(z) = e^{Rz} - R(1 + \lambda_R)z$$

bezüglich der Verteilung  $p_M(z)$  angibt. Im Hinblick darauf, dass die Funktion  $p_M(z)$  nicht explizite gegeben ist, empfiehlt sich dabei das folgende Vorgehen:

Die Funktion  $\psi(z)$  nimmt für  $z = 0$  den Wert 1 an und sinkt nachher bis auf einen minimalen Wert, der mit

$$z_{Min} = \frac{\ln(1 + \lambda_R)}{R}$$

erreicht wird, um nachher für noch grössere  $z$  unbegrenzt anzuwachsen. Aus dem Verlauf von  $\psi(z)$  lässt sich schliessen, dass das gesuchte Maximum der Ungleichung

$$M > \frac{\ln(1 + \lambda_R)}{R} = - \frac{\ln(1 + \lambda_R)}{\ln \delta(u)} u \quad (22)$$

genügen muss. Man gelangt so — ähnlich wie in der Arbeit von Haferl — zu einer unteren Grenze für das Maximum, die unabhängig von der Struktur des Bestandes ist, aber von der vorhandenen Sicherheitsreserve, dem Ausgleichungsindex und den Rückversicherungskosten abhängt. In der nachstehenden Tabelle sind einige Beispiele für diese untere Grenze zusammengestellt.

Tabelle 3

Rückversicherungskosten in %	Untere Grenze des Maximums bei einer Sicherheitsreserve von	
	$u = 250 \bar{z} = 1\,117\,500$ Fr.	$u = 1000 \bar{z} = 4\,470\,000$ Fr.
%	Fr.	Fr.
25	$8,1 \bar{z} = 36\,207$	$32,3 \bar{z} = 144\,381$
50	$14,7 \bar{z} = 65\,709$	$58,7 \bar{z} = 262\,389$
75	$20,3 \bar{z} = 90\,741$	$81,0 \bar{z} = 362\,070$
100	$25,1 \bar{z} = 112\,197$	$100,4 \bar{z} = 448\,788$

Die untere Grenze des Maximums fällt oft — besonders bei grosser Sicherheitsreserve  $u$  und bei hohen Rückversicherungskosten — so hoch aus, dass eine genauere Berechnung des Maximums nicht mehr erforderlich ist.

Eine genaue Berechnung des Maximums erreicht man mit Hilfe des bedingten Mittelwertes  $\bar{\psi}(C)$  der Funktion  $\psi(z)$  bezüglich der Verteilung  $\pi_C(\varphi)$  für eine feste Versicherungssumme  $C$

$$\bar{\psi}(C) = \int_0^1 \pi_C(\varphi) d\varphi \{e^{R\varphi C} - R(1 + \lambda_R) \varphi C\}, \quad (23)$$

aus dem der Gesamtmittelwert  $F(M)$ , dessen Minimum bestimmt werden soll, nach der Formel

$$F(M) = \sum_{C < M} w(C) \bar{\psi}(C) + \bar{\psi}(M) \sum_{C \geq M} w(C) \quad (23a)$$

zusammengesetzt werden kann. Die Funktion  $\bar{\psi}(C)$  nimmt einen ähnlichen Verlauf wie die Funktion  $\psi(z)$ . Sie erreicht für einen Wert  $C = M$  ein Minimum, der zugleich — wie aus (23 a) hervorgeht — das gesuchte Maximum des Selbstbehaltes darstellt.

Das zugrunde gelegte Postulat führt somit zu einem Maximum des Selbstbehaltes, das nur von der im wesentlichen durch die Altersstruktur bestimmten Verteilung der relativen Risikosummen  $\pi(\varphi)$  abhängt. Dagegen ist dieses Maximum unabhängig von der Verteilung der Versicherungssummen  $w(C)$ . Diese Eigenschaft des Maximums ist insofern wertvoll, als die Verteilung  $w(C)$  für grosse  $C$  nur mit grosser Unsicherheit durch Beobachtung bestimmt werden kann. Für die Verteilung  $\pi(\varphi)$  dürfte dagegen ein genügend grosses Beobachtungsmaterial leichter zu beschaffen sein.

Setzt man in Anlehnung an das dieser Untersuchung zugrunde liegende Beobachtungsmaterial

$$\pi(\varphi) = \frac{\alpha e^{-\alpha\varphi}}{1 - e^{-\alpha}},$$

so erhält man unter Benützung der Integralausdrücke (20)

$$\bar{\psi}(C) = \frac{\alpha(e^{RC-\alpha} - 1)}{(1 - e^{-\alpha})(RC - \alpha)} - C(1 + \lambda_R)R \frac{[1 - e^{-\alpha}(1 + \alpha)]}{(1 - e^{-\alpha})\alpha}. \quad (24)$$

Durch Differentiation nach  $C$  ergibt sich für das gesuchte Maximum  $M$  die Beziehung

$$\frac{e^{RM-\alpha}(RM - \alpha - 1) + 1}{(RM - \alpha)^2} = \frac{(1 + \lambda_R)[1 - e^{-\alpha}(1 + \alpha)]}{\alpha^2}. \quad (25)$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$RM - \alpha = x$$

und

$$\frac{(1 + \lambda_R)[1 - e^{-\alpha}(1 + \alpha)]}{\alpha^2} = A, \quad (25 a)$$

so ergibt sich die transzendente Gleichung

$$\frac{e^x(x - 1) + 1}{x^2} = A, \quad (25 b)$$

aus der  $x$ , und schliesslich  $M$  durch Interpolation berechnet werden können. Einige numerische Werte für  $M$  können aus der nachstehenden Tabelle entnommen werden.

Tabelle 4

Rückversicherungskosten in %	$M$ bei einer Sicherheitsreserve von $u =$			
	$250 \bar{z} = 1\,117\,500$ Fr.	$500 \bar{z} = 2\,235\,000$ Fr.	$750 \bar{z} = 3\,352\,500$ Fr.	$1000 \bar{z} = 4\,470\,000$ Fr.
%	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.
25	$14,3 \bar{z} = 63\,921$	$28,7 \bar{z} = 128\,289$	$43,0 \bar{z} = 192\,210$	$57,3 \bar{z} = 256\,131$
50	$25,6 \bar{z} = 114\,432$	$51,3 \bar{z} = 229\,311$	$76,9 \bar{z} = 343\,743$	$102,5 \bar{z} = 458\,175$
75	$34,8 \bar{z} = 155\,556$	$69,6 \bar{z} = 311\,112$	$104,4 \bar{z} = 466\,668$	$139,2 \bar{z} = 622\,224$
100	$42,6 \bar{z} = 190\,422$	$85,3 \bar{z} = 381\,291$	$127,9 \bar{z} = 571\,713$	$170,5 \bar{z} = 762\,135$

Vergleicht man diese genauen Maxima mit den aus Formel (22) abgeleiteten Werten für die untere Grenze von  $M$ , so erkennt man, dass bei der zugrunde gelegten Risikosummenverteilung das genaue Maximum rund 75 % höher ausfällt als seine untere Grenze.

**c) Das Maximum bei variablem Sicherheitszuschlag**

Das im Abschnitt *b)* abgeleitete Maximum dürfte in der Praxis immer dann brauchbar sein, wenn die erforderlichen Ausgleichungskosten genügend klein sind. Diese Kosten erreichen beispielsweise folgende Beträge, wobei die zugehörigen Maxima aus der Tabelle 4 entnommen werden können.

Tabelle 5

Rückversicherungskosten	Ausgleichungskosten in % für	
	$u = 250 \bar{z}$	$u = 1000 \bar{z}$
%	%	%
25	7,91	3,22
50	10,39	3,57
75	12,32	3,86
100	13,73	4,19

Bei kleiner Sicherheitsreserve können die Ausgleichungskosten so hoch ausfallen, dass mit einem Anwachsen der Sicherheitsreserve im



Verlaufe der Zeit gerechnet werden darf. Mit wachsender Reserve entsteht dann das Bedürfnis, die Ausgleichungskosten nach und nach zu senken, damit die eingesparten Beträge einer vermehrten Gewinnausschüttung dienstbar gemacht werden können. Unter diesen Umständen empfiehlt es sich, den laufenden Sicherheitszuschlag nicht mehr als fest, sondern als variabel anzunehmen.

In Anlehnung an *Laurin* [6] sei im folgenden an Stelle des festen Ausgleichungskoeffizienten  $R$  die Funktion

$$R'(u) = R e^{-\beta u} \quad (26)$$

angenommen.

Mit Hilfe der Funktion

$$R(u) = R \frac{1 - e^{-\beta u}}{\beta} \quad (27)$$

gelangt man unter Benützung von Gleichung (10) zur Liquidationsfunktion

$$1 + \lambda(u) = \frac{1}{R e^{-\beta u}} \left[ \int_0^M e^{R e^{-\beta u} \left( \frac{e^{\beta z} - 1}{\beta} \right)} p_M(z) dz - 1 \right], \quad (28)$$

welcher der Ausgleichungsindex

$$\delta^*(u_0) = e^{-\frac{R}{\beta}(1 - e^{-\beta u_0})} \quad (29)$$

zugeordnet ist, worin  $u_0$  die anfängliche Sicherheitsreserve bedeutet. Mit Rücksicht auf

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{e^{\beta z} - 1}{\beta} = z$$

kann die Liquidationsfunktion (28) für kleine  $\beta$  mit genügender Annäherung ersetzt werden durch

$$1 + \lambda(u) = \frac{1}{R e^{-\beta u}} \left[ \int_0^M e^{R z e^{-\beta u}} p_M(z) dz - 1 \right]. \quad (30)$$

Die weitere Rechnung gestaltet sich vollständig analog wie bei festem Sicherheitszuschlag; ein Unterschied liegt nur darin, dass an

Stelle des festen Ausgleichungskoeffizienten  $R$  der von der erreichten Sicherheitsreserve  $u$  abhängige Ausgleichungskoeffizient  $Re^{-\beta u}$  tritt. Insbesondere ist für die Berechnung des Maximums wiederum  $x$  aus der transzendenten Gleichung (25 b) zu bestimmen; aus  $x$  ergibt sich dann das gesuchte Maximum für die Sicherheitsreserve  $u$

$$M(u) = \frac{x + \alpha}{Re^{-\beta u}} .$$

Im nachfolgenden Beispiel ist vorausgesetzt, die anfängliche Sicherheitsreserve betrage  $u_0 = 100 \bar{z}$  und die Konstante  $\beta = 10^{-3}$ ; ferner ist angenommen, die Rückversicherungskosten belaufen sich auf 50 % der Nettorisikoprämien. Für diesen Fall ergibt sich folgender Verlauf des Maximums und der Ausgleichungskosten.

Tabelle 6

$u$	$M(u)$	$\lambda_{M(u)}$ in %	Ausgleichungskosten in %
	Fr.		
$100 \bar{z} = u_0$	$10,784 \bar{z} = 48\ 204$	9,75	15,75
$250 \bar{z}$	$12,529 \bar{z} = 56\ 005$	9,25	14,71
$400 \bar{z}$	$14,556 \bar{z} = 65\ 065$	8,75	13,78
$550 \bar{z}$	$16,912 \bar{z} = 75\ 597$	8,25	12,88
$700 \bar{z}$	$19,649 \bar{z} = 87\ 831$	7,75	12,02
$850 \bar{z}$	$22,829 \bar{z} = 102\ 046$	7,25	11,14
$1000 \bar{z}$	$26,253 \bar{z} = 118\ 558$	6,75	10,25
$2000 \bar{z}$	$72,099 \bar{z} = 322\ 253$	3,40	4,84

Es ist noch darauf hinzuweisen, dass, infolge eines ungünstigen Ablaufes der Versicherungsereignisse, die Sicherheitsreserve auch abnehmen kann. In diesem Fall würden die Ausgleichungskosten ansteigen, und das Maximum müsste herabgesetzt werden.

Das gewählte Beispiel veranschaulicht den Entwicklungsprozess einer Versicherungsunternehmung. Anfänglich muss das Maximum verhältnismässig tief angesetzt werden, und es sind grosse Aufwendungen für den Risikoausgleich erforderlich, welche notgedrungen zu einer Schmälerung der Überschüsse führen. Nach und nach kann das Maximum erhöht werden, und gleichzeitig ist es möglich, die

Ausgleichungskosten zu senken. Dies erlaubt dann, einen wachsenden Anteil des Gewinnes zur Ausschüttung zu bringen.

*Schlussbemerkungen:* Die vorliegenden Untersuchungen behandeln das Problem des Maximums des Selbstbehaltes ausschliesslich vom Standpunkt des Erstversicherers aus. Für diesen ist vor allem wichtig, dass sein Risikogeschäft eine genügende Stabilität aufweist, dass die Rückversicherung sich möglichst wirtschaftlich auswirkt und nicht zuletzt, dass die erforderlichen rechnerischen Untersuchungen einfach sind und wenig Zeit beanspruchen. Die erörterte Methode nimmt auf diese Forderungen in weitgehendem Masse Rücksicht.

Betrachtet man anderseits das Problem des Maximums vom Standpunkt des Rückversicherers aus, so wären weitere Gesichtspunkte zu berücksichtigen. Durch eine Ermässigung der Rückversicherungskosten könnte der Rückversicherer erreichen, dass der Erstversicherer sein Maximum tiefer ansetzen und somit einen grösseren Teil des Bestandes rückversichern kann.

Die Frage, wo die Grenze des Selbstbehaltes des Erstversicherers liegt, damit bei möglichst niedrigem Kostensatz für den Rückversicherer das Total seiner Gewinne ein Maximum wird, wäre noch zu untersuchen.

## Literaturverzeichnis

- [1] *A. Berger*: Die Prinzipien der Lebensversicherungstechnik II, Berlin 1925.
- [2] *H. Broggi*: Versicherungsmathematik, Leipzig 1911.
- [3] *C. Böhm*: Versuch einer systematischen Darstellung der modernen Risikotheorie. Blätter für Versicherungsmathematik 1935/36.
- [4] *F. Lundberg*: Über die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Risikemasse, Skandinavisk Aktuarietidskrift 1930.
- [5] *F. Lundberg*: Some supplementary researches on the collective risk theory, Skandinavisk Aktuarietidskrift 1932.
- [6] *I. Laurin*: An Introduction into Lundberg's Theory of Risk, Skandinavisk Aktuarietidskrift 1930.
- [7] *F. Esscher*: On the Probability Function in the Collective Theory of Risk, Skandinavisk Aktuarietidskrift 1932.
- [8] *C. O. Segerdahl*: Über einige risikothoretische Fragestellungen, Skandinavisk Aktuarietidskrift 1942.
- [9] *K. Hultmann*: Einige numerische Untersuchungen auf Grund der kollektiven Risikotheorie, Skandinavisk Aktuarietidskrift 1942.
- [10] *F. Hafert*: Die Bestimmung der Selbstbehalte in der Lebensversicherung, Berichte des XII. Internationalen Kongresses der Versicherungsmathematiker, Luzern 1940.
- [11] *B. Meidell*: Zur Theorie und Praxis des Maximums in der Lebensversicherung, XI<sup>e</sup> Congrès International d'Actuaires, Paris 1937.

