Eine Methode zur approximativen Berechnung der Werte temporärer Leibrenten

Eine Methode zur approximativen Berechnung der Werte temporärer Leibrenten

Von *G. Ludwig*, Zürich

Einleitung

Wenn $\Phi(t)$ und $f(t)$ zwei positive, nicht zunehmende und $g(t)$ eine positive Funktion bedeuten, so gilt nach Steffensen [1]; [2] die Ungleichung:

$$\frac{\sum_{t=0}^{n-1} \Phi(t)\, f(t)\, g(t)}{\sum_{t=0}^{n-1} \Phi(t)\, g(t)} \geqslant \frac{\sum_{t=0}^{n-1} f(t)\, g(t)}{\sum_{t=0}^{n-1} g(t)} \tag{1}$$

wobei in erster Näherung beide Seiten gleich gross angenommen werden können.

Diese Gleichung lässt sich auch nach der Methode von Cantelli [3]; [4] ableiten. Bei dieser Beweisführung braucht man nicht einmal vorauszusetzen, dass $f(t)$ nicht zunehmend ist. Man kann dann aber nicht mehr zeigen, dass die linke Seite stets grösser als die rechte ist.

Diese Relation ist schon öfters zur Ableitung von Näherungsformeln verwendet worden (vgl. z. B. [1]; [6]; [7]; [8]; [9]).

Mit $\Phi(t) = {}_t p_x$; $f(t) = {}_t p_y$ und $g(t) = v^t$ folgt aus (1):

$$\frac{a_{x;y;\overline{n}|}}{a_{x;\overline{n}|}} \geqslant \frac{a_{y;\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}} \tag{2}$$

wie schon Steffensen [1] gezeigt hat.

Die Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf die Literaturangaben am Schluss der Arbeit.

Mit $\Phi(t) = {}_tp_x; f(t) = \left(\frac{v}{v_0}\right)^t$ und $g(t) = v_0^t$ erhält man die Näherung:

$$\frac{a_{x;\overline{n}|}}{a^0_{x;\overline{n}|}} \geqslant \frac{a_{\overline{n}|}}{a^0_{\overline{n}|}} \tag{3}$$

Sie ist von Jecklin angegeben und angewandt worden [7]. $a_{x;\overline{n}|}$ bzw. $a^0_{x;\overline{n}|}$ und $a_{\overline{n}|}$ bzw. $a^0_{\overline{n}|}$ bedeuten hier die Barwerte berechnet zum Zinsfuss i bzw. i_0. Diese beiden Formeln liefern bei nicht zu grossen Dauern und wenn das Endalter höchstens 70 Jahre beträgt, Näherungswerte, deren Genauigkeit für die Praxis oft ausreichend ist. Sie sind sehr einfach zu handhaben und können einem daher viel Rechenarbeit ersparen.

Muss man hingegen die Barwerte mit grösserer Genauigkeit kennen oder liegen die Werte ausserhalb des oben erwähnten Anwendungsbereiches, ist man darauf angewiesen, andere Approximationen zu verwenden. Obwohl diese Fälle weniger häufig eintreten, erscheint es uns dennoch besonders wichtig, auch dafür Näherungsmethoden zu kennen. Man könnte sonst gezwungen sein, die Kommutationszahlen für eine Absterbeordnung und einen bestimmten Zinsfuss berechnen zu müssen, selbst wenn man nur einen einzigen Wert der Leibrente kennen muss.

Formeln mit grösserer Genauigkeit fehlen für die Verbindungsrente. (Wir sehen hier von der Approximation von Lidstone für den reziproken Wert der Rente ab [10]; [7]; [9], auf die wir am Ende dieser Mitteilung eintreten werden.)

Näherungen, nach denen man aus den Barwerten zu einem Zinsfuss i_0 die Werte zu einem andern Zinsfuss i berechnen kann, gibt es zwar viele. Sie werden in der Literatur als Lösungen des sogenannten «Zinsfussproblemes» bezeichnet. (Vgl. [11]; [12]; [13], wo auch ausführliche Literaturhinweise zu finden sind.) Alle Approximationen aber, die wesentlich genauere Werte als Formel (3) ergeben, bedingen einen sehr grossen Rechenaufwand, der ihre vorteilhafte Verwendung sehr beeinträchtigt. (Vgl. hier insbesondere die Zusammenstellung von Leepin [13].)

Im folgenden werden wir ausgehend von der Steffensenschen Ungleichung (1) eine Methode besprechen, nach der man sowohl für das Zinsfussproblem als auch für die Verbindungsrenten Näherungsformeln ableiten kann. Diese gestatten, bis zum Schlussalter von 85 Jahren und beliebigen Dauern Werte mit einer für die Praxis ausreichenden Genauigkeit zu berechnen.

I. Das Zinsfussproblem

Unsere erste Aufgabe besteht darin, aus dem bekannten Wert der temporären Leibrente, berechnet zum Zinsfuss i_0 (Ausgangszinsfuss), den Barwert berechnet zum Zinsfuss i zu bestimmen. (Alle Werte, die sich auf den Ausgangszinsfuss i_0 beziehen, werden wir im folgenden mit einer kleinen Null kennzeichnen, z. B. $a^0_{x;\overline{n}|}$; $a^0_{\overline{n}|}$; v_0.)

Wenn man sich im Ausdruck:

$$\frac{a_{x;\overline{n}|}}{a^0_{x;\overline{n}|}} = \frac{\sum\limits_{t=0}^{n-1} v^t \, {}_tp_x}{\sum\limits_{t=0}^{n-1} v_0^t \, {}_tp_x} \qquad (3a)$$

${}_tp_x$ in eine Taylorsche Reihe entwickelt denkt

$${}_tp_x = 1 - \mu(x) \cdot t \ldots\ldots$$

und nur das erste Glied der Reihe berücksichtigt (man setzt somit 1 als ersten Näherungswert für ${}_tp_x$), so erhält man die Relation (3).

Um eine genauere Näherungsformel zu erhalten, werden wir auch noch das zweite Glied der Reihe für ${}_tp_x$ berücksichtigen.

Entwickelt man eine Funktion $f(x + h)$ in eine Taylorsche Reihe und bricht diese nach einigen Gliedern ab, so findet man ein Näherungspolynom, welches bekanntlich in der Umgebung von $h = 0$ die genauesten Werte für $f(x + h)$ liefert.

Es ist daher nicht zweckmässig ${}_tp_x$ nach Potenzen von t zu entwickeln. Das Näherungspolynom, das man auf diese Weise erhält, liefert an der Stelle $t = 0$ die genauesten Werte für ${}_tp_x$. Zur Approximation von $a_{x;\overline{n}|} = \sum\limits_{t=0}^{n-1} {}_tp_x \, v^t$ braucht man aber nur die Werte von ${}_tp_x$ für $t = 0$ bis $t = n - 1$. Wir folgern daraus, dass man für $a_{x;\overline{n}|}$ einen besseren Näherungswert erhält, wenn man ${}_tp_x$ nach Potenzen von $(t - \sigma n)$ entwickelt. σ soll darin eine Grösse darstellen, die nicht von t abhängt und für die gilt:

$$0 \leqslant \sigma \leqslant 1 .$$

Das Näherungspolynom, das man danach für ${}_tp_x$ verwendet, liefert für $t = \sigma \cdot n$, d. h. einer Stelle im Inneren unseres Summationsintervalls, die genauesten Werte.

Wir setzen daher:

$$ {}_tp_x = \frac{l_{(x+t)}}{l_{(x)}} = e^{-\int\limits_0^t \mu(x+\tau)\, d\tau} \cong {}_{\sigma n}p_x \left(1 - \mu(x+\sigma n) \cdot (t - \sigma n)\right) $$

in die linke Seite unserer Gleichung (3) ein und erhalten, wenn wir Glieder, die höhere als erste Potenzen der Sterbeintensität $\mu(x)$ enthalten, vernachlässigen:

$$ \frac{\mathrm{a}_{x;\overline{n|}}}{\mathrm{a}^0_{x;\overline{n|}}} = \frac{\sum\limits_{t=0}^{n-1} {}_tp_x v^t}{\sum\limits_{t=0}^{n-1} {}_tp_x v_0^t} \cong \frac{{}_{\sigma n}p_x \sum\limits_{t=0}^{n-1} \left(1 - \mu(x+\sigma n) \cdot (t - \sigma n)\right) v^t}{{}_{\sigma n}p_x \sum\limits_{t=0}^{n-1} \left(1 - \mu(x+\sigma n) \cdot (t - \sigma n)\right) v_0^t} $$

$$ = \frac{\mathrm{a}_{\overline{n|}} - \mu(x+\sigma n) \left(\sum\limits_{t=0}^{n-1} t v^t - \sigma n\, \mathrm{a}_{\overline{n|}}\right)}{\mathrm{a}^0_{\overline{n|}} - \mu(x+\sigma n) \left(\sum\limits_{t=0}^{n-1} t v_0^t - \sigma n\, \mathrm{a}^0_{\overline{n|}}\right)} \cong \frac{\mathrm{a}_{\overline{n|}}}{\mathrm{a}^0_{\overline{n|}}} \left[1 - \mu(x+\sigma n) \left(\frac{\sum\limits_{t=0}^{n-1} t v^t}{\mathrm{a}_{\overline{n|}}} - \frac{\sum\limits_{t=0}^{n-1} t v_0^t}{\mathrm{a}^0_{\overline{n|}}}\right)\right] $$

Die Summe $\sum\limits_{t=0}^{n-1} t v^t$ lässt sich leicht berechnen. (Vgl. [3], Seite 15—19.)

$$ \sum_{t=0}^{n-1} t v^t = \sum_{t=0}^{n-1} \left((t+1) v^t - v^t\right) = \frac{1}{i} \mathrm{a}_{\overline{n|}} - \frac{n}{d} v^n $$

$$ \frac{\sum\limits_{t=0}^{n-1} t v^t}{\mathrm{a}_{\overline{n|}}} = \frac{1}{i} - n \frac{v^n}{1 - v^n} = n - \frac{1}{i} \left(\frac{n}{a_{\overline{n|}}} - 1\right) $$

Für den Leibrentenbarwert folgt nun:

$$ \mathrm{a}_{x;\overline{n|}} \cong \mathrm{a}^0_{x;\overline{n|}} \frac{\mathrm{a}_{\overline{n|}}}{\mathrm{a}^0_{\overline{n|}}} \left\{1 - \mu(x+\sigma n) \left[\frac{1}{i_0} \left(\frac{n}{a^0_{\overline{n|}}} - 1\right) - \frac{1}{i} \left(\frac{n}{a_{\overline{n|}}} - 1\right)\right]\right\} \qquad (4) $$

In der Gleichung (4) haben wir bereits die gesuchte Näherungsformel gefunden. Wir müssen jetzt nur noch den geeigneten Wert für die

Grösse σ bestimmen. Zu diesem Zweck berechnen wir σ unter der Annahme, dass die Relation (4) genau gelten soll. Da aber bei vielen Absterbeordnungen die Werte für die Sterbeintensität $\mu(x)$ nicht berechnet sind und Sterbeintensitäten und Sterbewahrscheinlichkeiten bei allen Sterbetafeln einen sehr ähnlichen Verlauf zeigen, ersetzen wir in der Formel (4) zuerst noch die Sterbeintensität $\mu(x)$ durch die Sterbewahrscheinlichkeit q_x. Dann bestimmen wir aus:

$$q_{x+\sigma n} = \frac{1 - \dfrac{\mathrm{a}_{x;\overline{n}|}}{\mathrm{a}^0_{x;\overline{n}|}} \cdot \dfrac{\mathrm{a}^0_{\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}}{\dfrac{1}{i_0}\left(\dfrac{n}{a^0_{\overline{n}|}} - 1\right) - \dfrac{1}{i}\left(\dfrac{n}{a_{\overline{n}|}} - 1\right)}$$

σ als Funktion von x und n. Die entsprechenden Werte haben wir für:

SM 1921—1930 $i_0 = 4\,\%$, $i = 2{,}5\,\%$;

SM 1901—1910 $i_0 = 5\,\%$, $i = 3{,}5\,\%$;

AF $i_0 = 4{,}25\,\%$, $i = 3{,}5\,\%$

berechnet und in Tabelle 1, 2 und 3 (am Ende der Mitteilung) aufgenommen. Wie zu erwarten war, ändern sich die Beträge von σ nur wenig mit x und n und können bis ungefähr zum Schlussalter von 85 Jahren durch die lineare Funktion

$$\sigma = c + c_1 x + c_2 n$$

dargestellt werden. In einer für unsere Zwecke ausreichenden Genauigkeit fanden wir bei allen drei oben erwähnten Absterbeordnungen für die Koeffizienten c_1 und c_2 gleich grosse Beträge und für σ die Funktionen:

SM 1921—1930: $\sigma(x;n) = 0{,}68 - 0{,}002\,(2x + n)$

$\left.\begin{array}{l}\text{SM}\\ \text{AF}\end{array}\right\}$ 1901—1910: $\sigma(x;n) = 0{,}64 - 0{,}002\,(2x + n)$

Die drei hier betrachteten Tafeln sind aus Beobachtungen an ganz verschiedenartigen Personengesamtheiten abgeleitet worden. (SM 1921—1930 eine neuere, SM 1901—1910 eine ältere schweizerische Volkssterbetafel und AF die Tafel von vier französischen Gesellschaften, die noch aus dem letzten Jahrhundert stammt.) Da wir für die Koeffizienten c_1 und c_2 dieser drei Absterbeordnungen gleich grosse Beträge fanden, schliessen wir, dass sie auch für andere Sterbetafeln verwendet werden können.

Wie aus den Werten von c, die wir für SM 1921—1930, SM 1901—1910 und AF erhalten haben, ersichtlich ist, hängt c von den speziellen Eigenschaften der Absterbeordnung kaum ab. Es genügt daher, um c zu bestimmen, wenn man einige Werte der Leibrente zu zwei verschiedenen Zinsfüssen für eine andere Sterbetafel, die einen ähnlichen Verlauf der Sterblichkeit hat, kennt.

Danach folgt für das Zinsfussproblem:

$$\mathsf{a}_{x;\overline{n}|} \simeq \mathsf{a}^0_{x;\overline{n}|} \frac{\mathsf{a}_{\overline{n}|}}{\mathsf{a}^0_{\overline{n}|}} \left\{1 - q_{x+n\sigma(x;n)} \left[\frac{1}{i_0}\left(\frac{n}{a^0_{\overline{n}|}} - 1\right) - \frac{1}{i}\left(\frac{n}{a_{\overline{n}|}} - 1\right)\right]\right\} \qquad \text{(I)}$$

mit $$\sigma(x;n) \cong c - 0{,}002\,(2x + n)$$

Nach dieser Formel haben wir für die Sterbetafel SM 1921—1930 einige Beispiele berechnet. (Vgl. Tabelle 4 am Ende dieser Mitteilung.) Wie man daraus ersieht, kann man die Genauigkeit der Formel (I) als sehr zufriedenstellend bezeichnen. Selbst bei einer Dauer von 55 und einem Schlussalter von 85 Jahren bleibt die Differenz zwischen dem nach (I) gefundenen und dem genauen Betrag unter 2,5 $^0/_{00}$ des Ausgangswertes $\mathsf{a}^0_{x;\overline{n}|}$.

In Abschnitt III werden wir noch die Art besprechen, wie man Formel (I) am besten handhabt, um einen möglichst geringen Arbeitsaufwand zu erzielen.

II. Die temporären Verbindungsrenten

Entsprechend unserem Vorgehen beim Zinsfussproblem entwickeln wir wieder ${}_tp_x$ nach Potenzen von $(t - \sigma n)$

$${}_tp_x \cong {}_{\sigma n}p_x\left(1 - \mu(x + \sigma n)\,(t - \sigma n)\right)$$

und ersetzen in den Formeln für die temporären Leibrenten auf ein und zwei Leben ${}_tp_x$ durch diese Näherung.

$$\frac{\mathsf{a}_{x;\,y;\,\overline{n}|}}{\mathsf{a}_{x;\,\overline{n}|}} = \frac{\sum\limits_{t=0}^{n-1} {}_tp_x \cdot {}_tp_y \cdot v^t}{\sum\limits_{t=0}^{n-1} {}_tp_x \cdot v^t} \cong \frac{\sum\limits_{t=0}^{n-1} {}_tp_y v^t \left(1 - \mu(x+\sigma n)(t-\sigma n)\right)}{\sum\limits_{t=0}^{n-1} v^t \left(1 - \mu(x+\sigma n)(t-\sigma n)\right)}$$

$$\cong \frac{\mathsf{a}_{y;\,\overline{n}|}}{\mathsf{a}_{\overline{n}|}} \left\{1 - \mu(x+\sigma n)\left[\frac{\sum\limits_{t=0}^{n-1} t v^t\, {}_tp_y}{\mathsf{a}_{y;\,\overline{n}|}} - \frac{\sum\limits_{t=0}^{n-1} t v^t}{\mathsf{a}_{\overline{n}|}}\right]\right\}$$

Wir entwickeln nun auch noch ${}_tp_y$ nach Potenzen von $(t - \sigma n)$ und ersetzen im folgenden Quotienten ${}_tp_y$ dadurch. (Vgl. den zweiten Absatz der Einleitung. $f(t)$ ist hier gleich t und somit zunehmend.)

$$\frac{\sum\limits_{t=0}^{n-1} t \cdot {}_tp_y v^t}{\sum\limits_{t=0}^{n-1} {}_tp_y v^t} \cong \frac{\sum\limits_{t=0}^{n-1} t v^t \left(1 - \mu(y+\sigma n)(t-\sigma n)\right)}{\sum\limits_{t=0}^{n-1} v^t \left(1 - \mu(y+\sigma n)(t-\sigma n)\right)}$$

$$\cong \frac{\sum\limits_{t=0}^{n-1} t v^t}{\mathsf{a}_{\overline{n}|}} \left\{1 - \mu(y+\sigma n)\left[\frac{\sum\limits_{t=0}^{n-1} t^2 v^t}{\sum\limits_{t=0}^{n-1} t v^t} - \frac{\sum\limits_{t=0}^{n-1} t v^t}{\mathsf{a}_{\overline{n}|}}\right]\right\}$$

Damit folgt:

$$\frac{\mathsf{a}_{x;\,y;\,\overline{n}|}}{\mathsf{a}_{x;\,\overline{n}|}} \cong \frac{\mathsf{a}_{y;\,\overline{n}|}}{\mathsf{a}_{\overline{n}|}} \left\{1 - \mu(x+\sigma n)\left[\frac{\sum\limits_{t=0}^{n-1} t v^t}{\mathsf{a}_{\overline{n}|}} - \mu(y+\sigma n)\left(\frac{\sum\limits_{t=0}^{n-1} t^2 v^t}{\mathsf{a}_{\overline{n}|}} - \left(\frac{\sum\limits_{t=0}^{n-1} t v^t}{\mathsf{a}_{\overline{n}|}}\right)^2\right) - \frac{\sum\limits_{t=0}^{n-1} t v^t}{\mathsf{a}_{\overline{n}|}}\right]\right\}$$

$$= \frac{\mathsf{a}_{y;\,\overline{n}|}}{\mathsf{a}_{\overline{n}|}} \left\{1 + \mu(x+\sigma n)\,\mu(y+\sigma n)\left[\frac{\sum\limits_{t=0}^{n-1} t^2 v^t}{\mathsf{a}_{\overline{n}|}} - \left(\frac{\sum\limits_{t=0}^{n-1} t v^t}{\mathsf{a}_{\overline{n}|}}\right)^2\right]\right\}$$

Die Summe $\sum\limits_{t=0}^{n-1} t^2 v^t = v + 4v^2 + qv^3 + \ldots + (n-1)^2 v^{n-1}$

lässt sich genau nach dem gleichen Verfahren bilden, das man bei der geometrischen Reihe anwendet.

$$(1-v)\sum_{t=0}^{n-1} t^2 v^t = v + 3v^2 + 5v^3 + \ldots + (2n-3)\,v^{n-1} - (n-1)^2 v^n$$

$$= 2\sum_{t=0}^{n-1} t v^t - \mathrm{a}_{\overline{n}|} - (n-1)^2 v^n$$

$\sum_{t=0}^{n-1} t v^t$ haben wir bereits im Abschnitt I berechnet:

$$\sum_{t=0}^{n-1} t v^t = \frac{1}{i}\,\mathrm{a}_{\overline{n}|} - \frac{n}{d}\,v^n$$

Nach kurzer, einfacher Rechnung, die wir nicht im einzelnen ausführen, findet man:

$$\frac{\sum_{t=0}^{n-1} t^2 v^t}{\mathrm{a}_{\overline{n}|}} - \left(\frac{\sum_{t=0}^{n-1} t v^t}{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}\right)^2 = \frac{1}{i^2}\left[(1+i) - \frac{n^2}{a_{\overline{n}|}}\left(\frac{1}{a_{\overline{n}|}} - i\right)\right]$$

Wir ersetzen wie im Abschnitt I die Sterbeintensität $\mu(x)$ durch die Sterbewahrscheinlichkeit. Dann folgt für die Leibrente zweier verbundener Leben:

$$\mathrm{a}_{x;y;\overline{n}|} \cong \frac{\mathrm{a}_{x;\overline{n}|}\cdot \mathrm{a}_{y;\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}\left\{1 + q_{x+n\sigma(x;n)}\, q_{y+n\sigma(x;n)}\,\frac{1}{i^2}\left[(1+i) - \frac{n^2}{a_{\overline{n}|}}\left(\frac{1}{a_{\overline{n}|}} - i\right)\right]\right\} \qquad \text{(II)}$$

In unserer Ableitung haben wir nirgends vorausgesetzt, dass beide Personen der Gesamtheit der gleichen Absterbeordnung angehören sollen. Unsere Näherung gilt daher auch, wenn den Werten q_x und $\mathrm{a}_{x;\overline{n}|}$ eine andere Sterbetafel als den Werten q_y und $\mathrm{a}_{y;\overline{n}|}$ zugrunde gelegt wird.

Um den geeignetsten Betrag von σ zu bestimmen, nehmen wir an, dass beide Personen gleich alt sind ($x = y$), und für sie die gleichen Sterbenserwartungen gelten sollen. Dann können wir wie beim Zinsfussproblem aus dem genauen Wert von $\mathrm{a}_{x;x;\overline{n}|}$ den zugehörigen Betrag von $\sigma(x;n)$ berechnen. Wir haben diese Werte für die Tafel SM 1921—1930 3 % bestimmt. (Vgl. Tabelle 5) σ lässt sich auch hier durch eine lineare Funktion darstellen:

$$\sigma(x;n) \cong 0{,}70 - 0{,}002\,(2x + n)$$

Wie man sieht, ergaben sich die gleichen Beträge für die Koeffizienten c_1 und c_2, was als weitere Bestätigung ihrer universellen Verwendbarkeit angesehen werden darf.

Für c fanden wir einen Wert (0,70), der von dem beim Zinsfussproblem verwendeten Betrag (0,68) nur wenig abweicht.

Die für zwei gleichaltrige Personen geltenden Werte von $\sigma(x;n)$ wenden wir jetzt auch an, wenn die Versicherten verschieden alt sind. Wir haben mit dieser Annahme nach Formel (II) einige numerische Beispiele (vgl. Tabelle 6 und 7) berechnet. Die Beträge, die wir für die Barwerte der Verbindungsrenten erhalten haben, weichen nur wenig von den genauen Werten ab.

Das eben besprochene Verfahren lässt sich auch auf Leibrenten von mehr als zwei verbundene Leben anwenden. Da man dabei genau analog vorgehen kann, verzichten wir, hier näher darauf einzutreten.

III. Vergleich der Formeln (I) und (II) mit andern Näherungen, und deren rationelle Anwendung

Die numerischen Beispiele zeigen deutlich, dass die Genauigkeit der Formeln (I) und (II) für die Bedürfnisse der Praxis fast immer ausreicht.

Selbst wenn der nach (2) resp. (3) errechnete Betrag um 100 $^0/_{00}$ vom genauen Wert abweicht, ergeben sich nach (II) resp. (I) Fehler von nur wenigen $^0/_{00}$. Erst bei Dauern, für die der Barwert der temporären mit dem der lebenslänglichen Rente des gleichen Alters beinahe übereinstimmt, wächst der Fehler, der nach (I) und (II) bestimmten Werte auf einige $^0/_0$ an. Bei Kapitalversicherungen, der in der Privatversicherung weitaus wichtigsten Gruppe, wird man diese Fälle aber fast durchwegs umgehen können.

Wie Jecklin [9] gezeigt hat, ergeben sich nach der Näherung von Lidstone:

$$\frac{1}{a_{x;y;\overline{n}|}} \cong \frac{1}{a_{x;\overline{n}|}} + \frac{1}{a_{y;\overline{n}|}} - \frac{1}{a_{\overline{n}|}}$$

stets genauere Werte für die Verbindungsrente als nach (2). Eine zur Lidstoneschen analoge Approximation kann man nach Jecklin [7]; [8] auch für das Zinsfussproblem verwenden. Die Genauigkeit der nach diesen Näherungen berechneten Beträge ist bis zu Endaltern von 65 Jahren im allgemeinen ausreichend. Nach Formel (I) und (II) aber erhält man fast immer noch wesentlich genauere Werte, die auch bei Endalter über 65 Jahren bis zu ca. 85 Jahren noch gut verwendet werden können.

Um Formel (I) und (II) möglichst rationell auszunützen, ist es wichtig, folgendes zu beachten. Alle in ihnen vorkommenden Grössen (ausgenommen die Ausgangswerte $\mathsf{a}^0_{x;\overline{n}|}$ resp. $\mathsf{a}_{x;\overline{n}|}$ und $\mathsf{a}_{y;\overline{n}|}$) hängen nur vom Zinsfuss oder von der Sterblichkeit ab. Die Ausdrücke $\frac{1}{i}\left(\frac{n}{a_{\overline{n}|}}-1\right)$ und $\frac{1}{i^2}\left[(1+i)-\frac{n^2}{a_{\overline{n}|}}\left(\frac{1}{a_{\overline{n}|}}-i\right)\right]$ lassen sich für alle in Betracht kommenden Werte des Zinsfusses und der Versicherungsdauer tabellieren, ohne dass der dazu notwendige Arbeitsaufwand übermässig gross ist. Denn in der Versicherungstechnik verwendet man nur eine beschränkte Anzahl von Zinsfüssen, und für $\frac{1}{a_{\overline{n}|}}$ (dem reziproken Wert der nachschüssig zahlbaren Zeitrente) sind schon ausführliche Tabellenwerke (z. B. [14]) vorhanden. Die Grössen $q_{x+n\sigma(x;n)}$ kann man mit ausreichender Genauigkeit durch lineare Interpolation zwischen benachbarten Werten der Tafel bestimmen. Der Arbeitsaufwand, der dann noch erforderlich ist, um Barwerte nach (I) oder (II) zu berechnen, bleibt in Grenzen, die die praktische Verwendung der Formeln gestatten.

Mit (I) resp. (II) kann man auch die Differenz vom genauen Wert, die sich nach (3) resp. (2) ergibt, abschätzen. Zwischen der eben erwähnten Differenz und dem Fehler, den man nach der Approximation von Lidstone erhält, lässt sich ein allgemeiner Zusammenhang herleiten. Man kann daher mit (I) und (II) auch, die sich nach den Relationen von Lidstone ergebenden Abweichungen abschätzen. Leider können wir nicht mehr näher darauf eintreten und behalten uns vor, in einer späteren Mitteilung darauf zurückzukommen.

IV. Zusammenfassung

Nach der Ungleichung von Steffensen lassen sich bekanntlich Näherungsformeln für das Zinsfussproblem und die Verbindungsrente angeben (vgl. Einleitung: Formel (2) und (3)). Diese kann man sich auch so entstanden denken, dass man in dem Ausdruck:

$a_{x;\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tp_x v^t$ resp. $a_{x;y;\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tp_x\, {}_tp_y v^t$; ${}_tp_x$ in eine Taylorsche Reihe entwickelt und nur ihr erstes Glied berücksichtigt.

Um genauere Relationen zu erhalten, entwickeln wir ${}_tp_x$ nach Potenzen von $(t - \sigma n)$ und berücksichtigen die beiden ersten Glieder dieser Reihe $(0 \leqslant \sigma \leqslant 1)$. Wir approximieren somit ${}_tp_x$ durch ein Polynom, das bekanntlich in der Umgebung der Stelle $t = \sigma n$, d. h. einer Stelle im Inneren des Summationsintervalls, die genauesten Werte für ${}_tp_x$ liefert.

Die in den Formeln enthaltene Sterbeintensität $\mu(x)$ ersetzen wir durch die Sterbewahrscheinlichkeit, die bei allen Absterbeordnungen nicht wesentlich voneinander abweichende Werte haben. Den dadurch begangenen Fehler gleichen wir durch eine Korrektur der Beträge von $\sigma(x;n)$ wieder aus. σ kann mit einer für unsere Zwecke ausreichenden Genauigkeit durch eine lineare Funktion

$$\sigma(x;n) \simeq c + c_1\, x + c_2\, n$$

dargestellt werden. Für die Koeffizienten c_1 und c_2 kann man immer die gleichen Beträge verwenden. Auch der Koeffizient c hängt von den speziellen Eigenschaften der Absterbeordnung nur sehr wenig ab und kann durch Vergleich mit anderen Sterbetafeln leicht bestimmt werden.

Wie die numerischen Beispiele zeigen, ergeben diese Näherungen bis zu Endaltern von ca. 85 Jahren Werte, deren Genauigkeit in der Praxis fast immer ausreicht. Besonders bei Endalter von mehr als 65 Jahren können die Formeln (I) und (II) mit Vorteil angewandt werden.

Tabelle 1

SM 1921—1930; $i_0 = 4\,\%$; $i = 2{,}5\,\%$

$\sigma(x;n)$ (Zinsfussproblem)

$n \backslash x$	20	30	40	50	60	70	80
10	1,17	0,50	0,55	0,45	0,45	0,41	0,34
20	0,52	0,48	0,45	0,45	0,41	0,28	
30	0,63	0,49	0,46	0,43	0,33		
40	0,52	0,48	0,44	0,37			
50	0,50	0,46	0,40				
60	0,48	0,42					
70	0,45						

Tabelle 2

SM 1901—1910; $i_0 = 5\,\%$; $i = 3{,}5\,\%$

$\sigma(x;n)$ (Zinsfussproblem)

$n \backslash x$	20	30	40	50	60	70	80
10			0,43	0,38	0,39	0,40	0,29
20		0,44	0,44	0,42	0,38	0,25	
30	0,48	0,45	0,43	0,39	0,28		
40	0,47	0,45	0,41	0,32			
50	0,45	0,42	0,35				
60	0,44	0,37					
70	0,40						

Tabelle 3

AF; $i_0 = 4{,}25\,\%$; $i = 3{,}5\,\%$

$\sigma(x;n)$ (Zinsfussproblem)

$n \backslash x$	20	40	60	80
10		0,40	0,40	0,32
30	0,49	0,45	0,31	
50	0,48	0,38		
70	0,42			

Tabelle 4

Beispiele zu Formel (I): Zinsfussproblem

SM 1921—1930 $\quad (\sigma(x;n) = 0{,}68 - 0{,}002\,(2x+n))$

n	$a_{x;\overline{n}\rvert}$ nach (3)	nach (I)	genau	Fehler in ‰[1])
	$i_0 = 4\,\%;\ i = 3{,}5\,\%;\ x = 30$			
10	8,449	8,447	8,447	0,0
30	17,630	17,575	17,578	— 0,2
50	20,490	20,195	20,201	— 0,3
	$i_0 = 4\,\%;\ i = 3\,\%;\ x = 30$			
10	8,264	8,260	8,260	0,0
30	18,697	18,579	18,585	— 0,3
50	22,368	21,710	21,717	— 0,3
55	22,709	21,852	21,845	+ 0,3
	$i_0 = 4\,\%;\ i = 3\,\%;\ x = 60$			
10	7,603	7,579	7,579	0,0
20	10,815	10,629	10,626	— 0,3
25	11,402	11,045	11,062	— 1,5
	$i_0 = 3{,}5\,\%;\ i = 2{,}5\,\%;\ x = 30$			
10	8,803	8,800	8,800	0,0
30	19,811	19,683	19,687	— 0,2
50	24,190	23,449	23,431	+ 0,8
55	24,621	23,646	23,596	+ 2,1
	$i_0 = 3{,}5\,\%;\ i = 2{,}5\,\%;\ x = 60$			
10	7,751	7,726	7,726	0,0
20	11,180	10,985	10,981	+ 0,4
25	11,828	11,459	11,464	— 0,5

[1]) Nach (I) berechneter Wert — genauer Wert in ‰ des letzteren

Tabelle 5

SM 1921—1930; $i = 3\,\%$; $x = y$

(Verbindungsrente zweier Personen gleichen Alters)

$\sigma(x;n)$

$n \diagdown x$	20	30	40	50	60	70	80
10	0,15	0,34	0,44	0,36	0,41	0,40	0,35
20	0,55	0,49	0,47	0,45	0,42	0,29	
30	0,53	0,50	0,48	0,44	0,35		
40	0,58	0,50	0,46	0,39			
50	0,53	0,49	0,42				
60	0,51	0,45					
70	0,47						

Tabelle 6

Beispiele zu Formel (II): Verbindungsrente: $x - y = \Delta = 0$

SM 1921—1930 3 %; $(\sigma(x;n) = 0{,}70 - 0{,}002\,(2x + n))$

n	$a_{x;x;\overline{n}\rceil}$			Fehler in ‰ [1]
	nach (2)	nach (II)	genau	
		$x + n = 60$		
10	7,644	7,667	7,665	0,3
20	12,910	12,985	12,977	0,6
30	17,109	17,223	17,214	0,5
		$x + n = 70$		
10	6,538	6,626	6,622	0,6
20	10,755	11,007	11,005	0,2
30	14,683	15,052	15,047	0,3
40	18,204	18,613	18,610	0,2
		$x + n = 80$		
10	4,525	4,844	4,843	0,2
20	7,369	8,146	8,143	0,4
30	10,710	11,755	11,771	—1,4
40	14,351	15,488	15,522	—2,2
50	17,795	18,890	18,930	—2,1
60	20,514	21,470	21,529	—2,7

[1]) Nach (II) berechneter Wert — genauer Wert in ‰ des letzteren

Tabelle 7

Beispiele zu Formel (II): Verbindungsrente: $x - y = \Delta = 12$

SM 1921—1930 3 %; $(\sigma(z;n) = 0{,}70 - 0{,}002\,(2z + n))$

n	$a_{x;y;\overline{n}\rceil}$ nach (2)	$a_{x;y;\overline{n}\rceil}$ nach (II)	$a_{x;y;\overline{n}\rceil}$ genau	Fehler in ‰ [1]
		$x + n = 60$		
10	7,962	7,972	7,971	0,1
20	13,492	13,528	13,524	0,3
30	17,662	17,722	17,718	0,2
		$x + n = 70$		
10	7,137	7,177	7,174	0,4
20	11,917	12,039	12,031	0,7
30	15,987	16,168	16,159	0,6
40	19,312	19,519	19,516	0,2
		$x + n = 85$		
10	4,461	4,723	4,718	1,1
20	7,304	7,974	7,944	3,8
30	10,708	11,641	11,599	3,6
40	14,346	15,363	15,335	1,9
50	17,741	18,712	18,710	0,1

[1]) Nach (II) berechneter Wert — genauer Wert in ‰ des letzteren

Literaturverzeichnis

Abkürzungen:

MVSV = Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker.

SA = Skandinavisk Aktuarietidskrift.

[1] *Steffensen:* «On a Generalization of certain inequalities by Tchebychef and Jensen.» SA 1925, Nr. 3/4.

[2] *Berger, A.:* «Mathematik der Lebensversicherung.» S. 101.

[3] *Zwinggi, E.:* «Versicherungsmathematik.» Basel 1945.

[4] *Cantelli, F. P.:* «Genesi e costruzione delle tavole di mutualità.» Bollettino di Notizie sul Credito e sulla Previdenza. Roma 1914.

[5] *Margulies:* «Allgemeines über Sterblichkeitstafeln.» Die Versicherung 1935, Nr. 25.

[6] *Bjoraa, S. J.:* «Eine angenäherte Methode zur Berechnung von Verbindungsrenten.» SA 1929, 3.

[7] *Jecklin, H.:* «Eine Näherungsformel für Übersterblichkeitszuschläge.» MVSV Bd. 44, Heft 1.

[8] *Jecklin, H.:* «Über den Zusammenhang zwischen gewissen Zusatzversicherungen, Prämienzerlegungen und Approximationen in der Lebensversicherungstechnik.» MVSV Bd. 44, Heft 2.

[9] *Jecklin, H.:* «Näherungswerte für die gemischte Versicherung mehrerer verbundener Leben.» MVSV Bd. 46, Heft 1.

[10] *Lidstone:* «On a methode of approximately calculating Net premiums for Endowment Assurances of two Joint Lives.» Journal of the Institute of Actuaries Bd. 33.

[11] *Christen, H.:* «Das Zinsfussproblem bei der Leibrente.» MVSV Heft 25.

[12] *Fischer, E.:* «Das Zinsfussproblem der Lebensversicherung als Interpolationsaufgabe.» MVSV Bd. 42, Heft 2.

[13] *Leepin, P.:* «Das Zinsfussproblem bei der temporären Leibrente als praktische Aufgabe.» MVSV Bd. 45, Heft 2.

[14] *Spitzer, S.* (Förster): «Tabellen für die Zinseszins- und Rentenrechnung.» 6. Aufl. Wien 1922.