Sur les formules de l'assurance invalidité

Par *Lucien Féraud*, Genève

1° Loi simple

Lorsque la mortalité intervient seule, on sait calculer toutes les valeurs actuelles nécessaires en actuariat, à partir d'une fonction $l(x)$ (définie soit pour x continu, soit seulement pour les valeurs entières de x) dite «loi de survie». On en tire immédiatement les taux annuels p_x, q_x, les probabilités $p(x,t), q(x,t)$ et, si elle est dérivable, le taux instantané de mortalité $\mu(x)$ et la densité de probabilité

$$f(x,t) = -\frac{l'(x+t)}{l(x)} = \mu(x+t)\, p(x,t)$$

telle que

$$q(x,t) = \int_0^t f(x,\tau)\, d\tau .$$

Le calcul des valeurs actuelles qui interviennent dans l'assurance vie peut se faire à partir de n'importe laquelle des fonctions ci-dessus rappelées. Nous le considérons comme un processus, bien connu, dépendant d'une *loi simple.*

2° Loi composée

Ce processus ne suffit plus lorsque interviennent deux causes d'élimination, par exemple la mortalité et l'invalidité. Toutefois dans la théorie de l'invalidité se présentent, d'eux-mêmes, deux processus du type de celui que l'on rencontre dans le cas de la mortalité seule, chacun d'eux dépendant d'une loi simple. Afin de les mettre en évidence, modifions un peu les notations usuelles en désignant

1º par $l^a(x)$ la loi de survie des valides et en conséquence par l'indice supérieur a toutes les fonctions et valeurs actuelles qui se rattachent à $l^a(x)$ selon le processus d'une loi simple, en particulier

$$p_x^a, q_x^a, p^a(x,t), q^a(x,t), \mu^a(x), f^a(x,\tau).$$

2º par $l^i(x)$ la loi de survie des invalides et en conséquence par l'indice supérieur i toutes les fonctions et valeurs actuelles qui se rattachent à $l^i(x)$ selon le processus d'une loi simple et en particulier

$$p_x^i, q_x^i, p^i(x,t), q^i(x,t), \mu^i(x), f^i(x,\tau).$$

Avec cette notation, chacun des deux processus pourra être développé selon les formules usuelles dans la théorie de l'assurance vie et en particulier on aura toujours

$$p + q = 1$$

p et q étant affectées des mêmes indices.

L'ensemble des fonctions qui interviennent dans la théorie de l'invalidité constitue une *loi composée*. Ainsi, à l'intérieur d'une loi composée, il est opportun de distinguer deux lois simples — c'est le but de la notation ci-dessus définie et que nous allons employer.

3º Relation entre quatre taux

Il nous suffira de considérer le sexe masculin, les taux annuels, le cas où les taux ne sont pas sélectionnés. Pour commencer nous n'introduirons que les taux dits dépendants (que nous désignerons «taux» sans qualificatif), mais au dernier paragraphe nous montrerons que l'on pourrait, sans que rien ne soit changé à nos remarques, raisonner sur les taux dits indépendants (que nous appellerons «taux purs»).

Soit:

w_x le taux annuel d'entrée en invalidité: il définit le passage de la classe des valides à la classe des invalides,

q_x^{aa} le taux annuel de mortalité des valides: il définit le passage de la classe des valides à la classe des décédés,

q_x^i le taux annuel de mortalité des invalides: il définit le passage de la classe des invalides à la classe des décédés.

Il est à peu près évident que de ces trois passages résulte le passage de la classe «valides + invalides» à la classe des décédés, c'est-à-dire que des trois taux ci-dessus résulte le taux de mortalité générale q_x; en d'autres termes, les quatre taux

$$w_x\,, q_x^{aa}\,, q_x^i\,, q_x$$

sont liés par une relation.

Pour établir cette relation, examinons de plus près le processus de la loi composée.

Soit à un âge initial arbitraire x_0 un effectif de $l_{x_0}^a$ valides. Si nous considérons la mortalité seule, cet effectif évolue en moyenne selon la loi simple l_x définie par q_x avec $l_{x_0} = l_{x_0}^a$. Si nous distinguons les invalides des valides, l'effectif des valides évoluera en moyenne selon la loi simple l_x^a définie par q_x^a, les invalides provenant des $l_{x_0}^a$ valides initiaux formeront à l'âge x un effectif que nous désignons par l_x^{ii} et $l_{x_0}^{ii} = 0$. Il est évident qu'à tout âge

$$l_x = l_x^a + l_x^{ii}\,. \tag{1}$$

L'effectif $l_{x_0+\nu+1}^{ii}$ des invalides à l'âge $x_0 + \nu + 1$ provient

1° des $l_{x_0+\nu}^{ii}$ invalides à l'âge $x_0 + \nu$ qui ne sont pas décédés soit

$$l_{x_0+\nu}^{ii}\; p_{x_0+\nu}^{i}\,,$$

2° des entrées en invalidité se produisant parmi les $l_{x_0+\nu}^a$ valides à l'âge $x_0 + \nu$ dont le nombre est

$$l_{x_0+\nu}^a\; w_{x_0+\nu}\,.$$

A la fin de l'année il n'en subsistera que

$$l_{x_0+\nu}^a\; w_{x_0+\nu}\left(1 - \frac{q_{x_0+\nu}^i}{2}\right)$$

si l'on admet, conformément à ce que l'on fait pour le calcul de la valeur actuelle a_x^{ai} d'une rente d'invalidité en cours d'acquisition, que toutes les entrées en invalidité se produisent au milieu de l'année et encore que le taux de mortalité des invalides pour le second semestre est la moitié du taux annuel c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\, q_{x_0+\nu}^i\,.$$

On obtient ainsi la formule de récurrence classique:

$$l^{ii}_{x_0+\nu+1} = l^{ii}_{x_0+\nu}\, p^{i}_{x_0+\nu} + l^{a}_{x_0+\nu}\, w_{x_0+\nu}\left(1 - \frac{q^{i}_{x_0+\nu}}{2}\right). \tag{2}$$

Eliminons les l^{ii} entre (1) et (2)

$$l^{a}_{x_0+\nu}\left[w_{x_0+\nu}\left(1 - \frac{q^{i}_{x_0+\nu}}{2}\right) - p^{i}_{x_0+\nu}\right] = l_{x_0+\nu+1} - l_{x_0+\nu}\, p^{i}_{x_0+\nu} - l^{a}_{x_0+\nu+1}$$

en divisant par $l^{a}_{x_0} = l_{x_0}$

$${}_{\nu}p^{a}_{x_0}\left[w_{x_0+\nu}\left(1 - \frac{q^{i}_{x_0+\nu}}{2}\right) - p^{i}_{x_0+\nu}\right] = {}_{\nu+1}p_{x_0} - {}_{\nu}p_{x_0}\, p^{i}_{x_0+\nu} - {}_{\nu+1}p^{a}_{x_0}$$

en vertu de $\ {}_{\nu+1}p_{x_0} = {}_{\nu}p_{x_0}\, p_{x_0+\nu}$ et de $\ {}_{\nu+1}p^{a}_{x_0} = {}_{\nu}p^{a}_{x_0}\, p^{a}_{x_0+\nu}$

$${}_{\nu}p^{a}_{x_0}\left[w_{x_0+\nu}\left(1 - \frac{q^{i}_{x_0+\nu}}{2}\right) + p^{a}_{x_0+\nu} - p^{i}_{x_0+\nu}\right] = {}_{\nu}p_{x_0}\left(p_{x_0+\nu} - p^{i}_{x_0+\nu}\right).$$

Or p^{a}_{x} est associé à la loi simple l^{a}_{x} et par conséquent est la probabilité pour qu'un valide d'âge x soit encore vivant et valide à l'âge $x+1$ et en vertu du théorème des probabilités totales

$$w_x + q^{aa}_{x} + p^{a}_{x} = 1. \tag{3}$$

En portant dans la relation qui précède, on obtient

$${}_{\nu}p^{a}_{x_0}\left[q^{i}_{x_0+\nu}\left(1 - \frac{w_{x_0+\nu}}{2}\right) - q^{aa}_{x_0+\nu}\right] = {}_{\nu}p_{x_0}\left(q^{i}_{x_0+\nu} - q_{x_0+\nu}\right). \tag{4}$$

Ce qui, compte tenu de (3), est bien la relation annoncée entre les taux

$$w_x,\ q^{aa}_{x},\ q^{i}_{x},\ q_x.$$

4° Remarque

Dans les «Bases Techniques pour l'assurance de groupes», Berne 1931, le calcul des valeurs actuelles relatives à l'invalidité est fondé sur les formules suivantes [1]):

---

[1]) Aux notations près, les mêmes formules ont été employées pour les «Technische Grundlagen und Bruttotarife für Gruppenversicherungen. 1939.» Nous nous reportons aux Bases Techniques 1931 parce que seules celles-ci donnent certains chiffres préliminaires, ce qui nous évite de les calculer, mais la présente remarque s'applique également aux bases établies en 1939.

$$w_x = 0{,}000\,125 \cdot 2^{\frac{x-15}{5}} \cdot \left(1 - \frac{q_x}{2}\right) \tag{5}$$

(w_x étant désigné par i_x^e) [1])

$$q_x^{aa} = q_x \left(1 - \frac{1}{2} \frac{w_x}{1 - \dfrac{q_x}{2}}\right) \tag{6}$$

$$q_x^i = q_x\,. \tag{7}$$

L'ensemble de ces trois formules est incompatible avec la relation (4). On voit en effet immédiatement que pour $q_x^i = q_x$ la relation (4) donne

$$q_x^{aa} = q_x \left(1 - \frac{w_x}{2}\right)$$

qui diffère de (6)

Si l'on se place à un point de vue purement théorique, il faut donc renoncer soit à ce que q_x représente la mortalité générale de l'effectif considéré, soit à la formule (6), soit à prendre $q_x^i = q_x$.

5° Calculs numériques

Quelles sont les corrections auxquelles on serait conduit, pour la pratique, dans chacun des derniers cas envisagés ?

1° On prend q_x pour taux de mortalité générale de l'effectif considéré et aussi pour taux de mortalité des invalides et w_x selon (5): il en résulte

$$q_x^{\overline{aa}} = q_x \left(1 - \frac{w_x}{2}\right)$$

soit une différence

$$\Delta\, q_x^{aa} = q_x^{\overline{aa}} - q_x^{aa} = \frac{q_x^2\, w_x}{4\left(1 - \dfrac{q_x}{2}\right)} \tag{8}$$

ou encore, avec les notations des «Bases Techniques 1931», afin de pouvoir employer les chiffres qui figurent dans ce document,

---

[1]) Dans ce paragraphe nous éliminons les taux «corrigés» des formules qui figurent dans les «Bases Techniques 1931». Voir plus loin § 6.

$$\Delta\, q_x^{aa} = q_x \cdot \frac{i_x^c - i_x^e}{2}. \tag{9}$$

La différence $\Delta\, q_x^{aa}$ n'atteint la dernière décimale du taux q_x^{aa} qu'à partir de l'âge 58 et reste toujours relativement faible. Voir tableau numérique, in fine.

2° On prend encore q_x pour taux de mortalité générale de l'effectif considéré, w_x selon la formule (5), mais on prend q_x^{aa} selon la formule (6). Il résulte de la relation (4) un taux de mortalité des invalides q_x^i que nous allons comparer à q_x.

Posons

$$\Delta\, q_x^i = q_x^i - q_x. \tag{10}$$

A l'aide de (6), (8) et (10), la relation (4) s'écrit

$${}_\nu p_{x_0}^a \left[\Delta\, q_{x_0+\nu}^i \left(1 - \frac{w_{x_0+\nu}}{2}\right) + \Delta\, q_{x_0+\nu}^{aa} \right] = {}_\nu p_{x_0}\, \Delta\, q_{x_0+\nu}^i$$

d'où

$$\Delta\, q_{x_0+\nu}^i = - \frac{\Delta\, q_{x_0+\nu}^{aa}}{1 - \dfrac{w_{x_0+\nu}}{2} - \dfrac{{}_\nu p_{x_0}}{{}_\nu p_{x_0}^a}}$$

soit

$$\Delta\, q_{x_0+\nu}^i = \Delta\, q_{x_0+\nu}^{aa} \frac{l_{x_0+\nu}^a}{l_{x_0+\nu}^{ii} + \dfrac{1}{2}\, l_{x_0+\nu}^a\, w_{x_0+\nu}} \tag{11}$$

et, en empruntant les notations des «Bases Techniques 1931»

$$\Delta\, q_x^i = \Delta\, q_x^{aa} \frac{l_x^{aa}}{l_x^{ii} + \dfrac{1}{2}\, \mathrm{I}_x}. \tag{12}$$

La différence $\Delta\, q_x^i$ n'atteint la dernière décimale du taux q_x^i qu'entre les âges 50 et 76; elle reste toujours excessivement faible. Voir tableau numérique, in fine.

En conclusion, les corrections qu'il faudrait apporter soit aux taux q_x^{aa}, c'est-à-dire aux taux p_x^a, soit aux taux q_x^i — ce sont ceux qui interviennent dans le calcul des valeurs actuelles — sont très faibles et l'on comprend très bien que l'on puisse les négliger. On pourrait se demander, il est vrai, si des différences minimes sur les taux ne pourraient, en s'accumulant, arriver à donner des différences sensibles sur les valeurs actuelles. La réponse à cette question se trouve implicitement dans les comparaisons étendues établies par M. A. Urech [1]) qui mettent en évidence les répercussions des variations des taux sur les primes et même sur les réserves. De ces comparaisons, il résulte que l'on ne peut attacher aux taux adoptés en assurance invalidité une précision telle que des corrections de l'ordre de celles que nous signalons aient une importance pratique.

La remarque qui précède a donc trait à la théorie sur laquelle repose le choix des bases techniques de l'assurance invalidité. En outre, au point de vue pédagogique, il faut bien commencer par dire que si l'on adopte les formules (5) et (6) il en résulte un taux de mortalité des invalides $q_x^i \neq q_x$ et ajouter ensuite, par exemple, que les différences entre les taux q_x^i et q_x sont si faibles (aisées à calculer, par exemple, comme exercice) que l'on peut les négliger sans inconvénient.

6° Taux purs

A peine est-il besoin d'ajouter que la remarque qui précède pourrait tout aussi bien être présentée en se servant des taux purs.

Il suffirait de poser

$$w_x = {}^*w_x\left(1 - \frac{{}^*q_x^{aa}}{2}\right)$$

$$q_x^{aa} = {}^*q_x^{aa}\left(1 - \frac{{}^*w_x}{2}\right)$$

et de substituer partout les taux purs ${}^*w_x$, ${}^*q_x^{aa}$ aux taux (dépendants) w_x, q_x^{aa}.

A l'égard de ce qui précède on pourrait considérer cette substitution comme un simple changement de notations sans qu'il soit nécessaire de se préoccuper de la signification intuitive ni de la détermination statistique des taux purs. Aucune conclusion n'aurait donc à être modifiée.

[1]) Bulletin de l'Association des Actuaires Suisses, 25. Heft. Oktober 1930, p. 31—106.

Corrections résultant de la formule (4)

(en dix-millièmes)

Age	Différence $10^5 \Delta q_x^{aa}$	Différence $10^5 \Delta q_x^{i}$
33	0,00	0,36
34	0,00	0,32
35	0,00	0,29
36	0,00	0,26
37	0,00	0,23
38	0,00	0,21
39	0,01	0,38
40	0,01	0,35
41	0,01	0,32
42	0,02	0,44
43	0,02	0,53
44	0,02	0,49
45	0,03	0,56
46	0,04	0,61
47	0,06	0,75
48	0,07	0,77
49	0,09	0,87
50	0,12	1,01
51	0,16	1,13
52	0,21	1,28
53	0,27	1,45
54	0,35	1,58
55	0,46	1,78
56	0,60	2,01
57	0,79	2,26
58	1,04	2,51
59	1,36	2,79
60	1,79	3,10
61	2,36	3,43
62	3,11	3,77
63	4,09	4,10
64	5,39	4,45
65	7,12	4,78
66	9,40	5,07
67	12,41	5,29
68	16,39	5,42
69	21,66	5,44
70	28,61	5,30
71	37,83	5,00
72	49,96	4,50
73	66,05	3,84
74	87,32	3,04
75	115,35	2,20
76	152,49	1,41
77	201,42	0,76
78	266,03	0,33
79	351,23	0,11
80	452,53	