Die elementaren Mittelwerte

Autor(en): **Jecklin, H. / Eisenring, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **47 (1947)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966845

Die elementaren Mittelwerte

Von *H. Jecklin* und *M. Eisenring*, Zürich

1.

Wenn wir, um mit einem einfachen Beispiel zu beginnen, zwei positive Grössen $a_1 < a_2$ haben, so sind bekanntlich $M = \frac{1}{2} \cdot (a_1 + a_2)$ und der positive Wurzelwert $M = (a_1 \cdot a_2)^{\frac{1}{2}}$ stets Mittelwerte, d. h. zwischen a_1 und a_2 gelegene Grössen; ebenso liefert:

$$M = \frac{1}{3} \cdot \left[a_1 + a_2 + (a_1 \cdot a_2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

stets einen Mittelwert, denn es gilt ja:

$$3a_1 < a_1 + a_2 + a_1 < a_1 + a_2 + (a_1 a_2)^{\frac{1}{2}} < a_1 + a_2 + a_2 < 3a_2$$

Dagegen liegt z. B. $M' = \frac{1}{3} \cdot (a_1 + a_2 + a_1 a_2)$ nur zwischen a_1 und a_2, wenn gleichzeitig gilt:

$$a_1 < \frac{2a_2}{1 + a_2} \quad \text{und} \quad a_2 > \frac{2a_1}{1 + a_1}$$

Man kann sich nun die Aufgabe stellen, möglichst umfassende Klassen von Mittelwertformeln aufzustellen bzw. abzugrenzen, die bezüglich der vorgegebenen — als positiv vorauszusetzenden — Grössen Mittelwerte liefern. Die vorliegende Arbeit ist ein Versuch in dieser Richtung, soweit es sich um elementare Mittelwerte handelt. Die Darlegungen erheben übrigens in den ersten drei Abschnitten nicht durchwegs Anspruch auf Originalität, indem gewisse Teilbereiche schon andernorts Behandlung gefunden haben. Wir nennen insbesondere an älteren Arbeiten jene von *Schlömilch* («Über Mittelgrössen verschiedener Ordnungen», Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1858) und von *Lipps* («Die Theorie der Kollektivgegenstände», Leipzig 1902) und als neuere einschlägige Veröffentlichung das erste Kapitel im Buche «Inequalities» von *Hardy, Littlewood* und *Pólya* (Cambridge 1934). Dagegen mangelt unseres Wissens bisher eine umfassende und systematische Theorie der elementaren Mittelwerte.

Es sei gegeben eine Reihe von n positiven Grössen:

$$0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n$$

Soll für diese n Grössen ein Mittelwert $M = f(a_1, a_2, \ldots a_n)$ formelmässig bestimmt werden — im Gegensatz zu den der mathematischen Statistik eigenen lagebedingten Mitteln —, so hat M auf jeden Fall folgenden Bedingungen zu genügen:

a) es muss eine reelle, stetige und eindeutige Funktion der a_i sein;
b) es muss ausserdem eine symmetrische Funktion der a_i sein;
c) es muss stets $a_1 \leqslant M \leqslant a_n$ (wobei das eine oder das andere Gleichheitszeichen — wie wir zeigen werden — in gewissen Grenzfällen gilt, während beide offenbar für den Fall $a_1 = a_i = a_n$ gelten müssen).

Soll nun weiter die Rechenvorschrift $f(a_i)$ durch eine algebraische Formel gegeben sein — im Gegensatz z. B. zu den transzendenten Mitteln —, so erscheint es im Hinblick auf den vorgenannten Punkt *b)* gegeben, die sogenannten elementarsymmetrischen Funktionen der a_i als Ausgangspunkt zu wählen. Die elementarsymmetrischen Funktionen spielen bekanntlich eine grundlegende Rolle in der Theorie der Gleichungen n-ten Grades mit n positiven Wurzeln. Bezeichnen wir diese mit $a_1 \ldots a_n$, so geht man aus von der Darstellung:

$$(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) = 0 \tag{I}$$

Ausmultipliziert und geordnet nach Potenzen von x erhält man:

$$x^n - s_1 x^{n-1} + s_2 x^{n-2} - \ldots \pm s_n = 0$$

Hierin sind:

$$s_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum a_i$$
$$s_2 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + \ldots + a_{n-1} a_n = \sum a_i a_k, \quad i \neq k$$
$$s_3 = a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + \ldots + a_{n-2} a_{n-1} a_n = \sum a_i a_k a_l, \, i \neq k \neq l$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_n = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n = \prod a_i$$

die elementarsymmetrischen Funktionen der a_i. Es besteht also allgemein s_t aus $\binom{n}{t}$ Summanden, die je ein Produkt aus t verschiedenen a_i sind; d. h. s_t ist ein spezielles $\binom{n}{t}$-gliedriges isobares Polynom vom Gewicht t in den a_i. Somit können wir die folgenden n grundlegenden Mittelwerte $M(s_k)$ für die Grössen $a_1 \ldots a_n$ definieren:

$$M(s_1) = \frac{s_1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum a_i$$

$$M(s_2) = \left(\frac{s_2}{\binom{n}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ldots = \ldots\ldots$$

$$M(s_k) = \left(\frac{s_k}{\binom{n}{k}}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\ldots = \ldots\ldots$$

$$M(s_n) = (s_n)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod a_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

Von den grundlegenden Mittelwerten $M(s_k)$ ist also $M(s_1)$ das arithmetische und $M(s_n)$ das geometrische Mittel.

Um der unter Punkt *a)* niedergelegten Forderung nach Eindeutigkeit Genüge zu leisten, ist die wichtige Festsetzung zu treffen, dass bei Wurzeln stets nur der positive Wert in Betracht zu ziehen ist. Der Wurzelexponent ist bezeichnend für die *Ordnung* des Mittelwertes.

Die *Zahl* der grundlegenden Mittelwerte ist stets gleich der Anzahl n der zu mittelnden Grössen a_i.

Sind zunächst alle a_i einander gleich und $= a$, so wird auch $M(s_k) = a$, womit die Bedingung *c)* erfüllt ist. Sind nun nicht alle a_i einander gleich, so ist $M(s_k)$ sicher ein Mittelwert, d. h. zwischen a_1 und a_n gelegen, denn es ist, wie leicht einzusehen:

$$\binom{n}{k} \cdot a_1^k < s_k < \binom{n}{k} \cdot a_n^k, \qquad \text{und damit}$$

$$a_1 < \left(\frac{s_k}{\binom{n}{k}}\right)^{\frac{1}{k}} < a_n$$

Mit Hilfe der Mittelwerte $M(s_k)$ können wir der Gleichung (I) auch die folgende Form geben (Schreibweise mit Binomialkoeffizienten), die uns im weiteren dienlich sein wird:

$$x^n - \binom{n}{1} M(s_1)\, x^{n-1} + \binom{n}{2} M^2(s_2)\, x^{n-2} - \ldots \pm \binom{n}{n} M^n(s_n) = 0 \qquad \text{(II)}$$

Wir behaupten nun die Existenz der folgenden wichtigen Reihe von Ungleichungen:

$$M(s_n) \leqslant M(s_{n-1}) \leqslant \ldots \leqslant M(s_2) \leqslant M(s_1) \qquad \text{(III)}$$

Lediglich zur Illustration des beim allgemeinen Beweis einzuschlagenden Verfahrens beweisen wir den Satz (III) zunächst für $M(s_2)$ und $M(s_3)$ bei $n = 3$:

Es werde s_2 konstant gehalten — also $a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 = C$ —, und wir fragen nach der Beschaffenheit der Werte a_1, a_2, a_3, welche unter dieser Bedingung ein *maximales* s_3 liefern. Wir schreiben:

$$s_3 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = a_1 \cdot a_2 \cdot \frac{C - a_1 a_2}{a_1 + a_2}$$

Als erste Bedingung für ein maximales s_3 muss die erste partielle Ableitung von s_3 nach a_1 verschwinden und die zweite negativ sein. Man erhält $C = a_1(a_1 + 2a_2)$, also nach Einsetzung von $C: a_1 = a_3$, wobei die zweite Ableitung $= -2(a_2 + a_3)(a_1 + a_2)^{-3}$ wird. Wesentlich für den allgemeinen Beweis ist nun der Umstand, dass wir wegen der Symmetrie der Funktion s_3 in a_i sofort das Resultat der partiellen Ableitung nach a_2 angeben können, da man in den obigen Ausdrücken lediglich a_1 mit a_2 zu vertauschen braucht: $C = a_2(a_2 + 2a_1)$ und $a_2 = a_3$. Unter allen Werte-Tripeln a_1, a_2, a_3, die ein konstantes s_2 liefern, erzeugt also jener Tripel das maximale $s_{3(\max.)}$, in welchem $a_1 = a_2 = a_3 = \bar{a}$. Daraus folgt $3\bar{a}^2 = s_2$, oder, anders geschrieben:

$\bar{a} = M(s_2)$, und andererseits ergibt sich das gesuchte Maximum als $s_{3(\max.)} = (\bar{a})^3$. Nun ist offenbar:

$$\frac{s_3}{s_2} \leqslant \frac{s_{3(\max.)}}{s_2} = \frac{(\bar{a})^3}{3\bar{a}^2} \quad \text{oder} \quad \frac{s_3}{\bar{a}^3} \leqslant \frac{s_2}{3\bar{a}^2}$$

Die rechte Seite der letzten Ungleichung ist $= 1$, da ja $3\bar{a}^2 = s_2$ ist, die linke Seite aber ist $\leqslant 1$, da stets $s_3 \leqslant s_{3(\max.)} = \bar{a}^3$. Es ist somit statthaft, aus der linken Seite der Ungleichung die dritte und aus der rechten die zweite Wurzel zu ziehen:

$$\left(\frac{s_3}{\bar{a}^3}\right)^{\frac{1}{3}} \leqslant \left(\frac{s_2}{3\bar{a}^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

oder nach Erweiterung mit $\bar{a}$:

$$\left(\frac{s_3}{1}\right)^{\frac{1}{3}} \leqslant \left(\frac{s_2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ d. h. } M(s_3) \leqslant M(s_2)$$

Diese Beweismethode lässt sich ohne weiteres auf den allgemeinen Fall übertragen: Man hält s_k konstant $= C$ und sucht jene Zusammensetzung in den — jetzt mit Ausnahme eines einzigen beliebigen a veränderlichen — a_i, welche ein maximales $s_{k+1\,(\max.)}$ erzeugt. Zur Bestimmung von $s_{k+1\,(\max.)}$ ersetzt man in $s_{k+1} = f(a_1, a_2 \ldots a_n)$ z. B. a_n, das man aus der Gleichung $s_k = C$ linear durch $a_{i \neq n}$ und s_k ausdrücken kann; so erhält man $s_{k+1} = F(a_1, a_2 \ldots a_{n-1}, s_k)$. Nun müssen wieder sämtliche $n - 1$ partiellen Ableitungen von F nach $a_{i \neq n}$ verschwinden. Das ergibt ein System von $n - 1$ Gleichungen in $a_{i \neq n}$ von identischem Aufbau in dem Sinne, dass in der ersten Gleichung a_1 Plätze einnimmt, die in der zweiten a_2, in der dritten a_3 usw. innehat. Das System wird also befriedigt durch die Lösungsgruppe $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = \bar{a}$; durch Ersetzung eines andern a_i als a_n in der Funktion f erhält man analog auch noch $a_n = \bar{a}$ und deshalb $\bar{a} = M(s_k)$, so dass gilt: für $s_{k+1\,(\max.)}$ ist $a_i = \bar{a}$, also $s_{k+1\,(\max.)} = \binom{n}{k+1} (\bar{a})^{k+1}$. Nun hat man:

$$\frac{s_{k+1}}{s_{k+1\,(\max.)}} \leqslant \frac{s_k}{s_k} = 1 = \frac{s_k}{\binom{n}{k} \cdot \bar{a}^k} \qquad \text{oder auch}$$

$$\left(\frac{s_{k+1}}{\binom{n}{k+1}\bar{a}^{k+1}}\right)^{\frac{1}{k+1}} \leqslant \left(\frac{s_k}{\binom{n}{k}\bar{a}^k}\right)^{\frac{1}{k}} \quad \text{d. h.} \quad M(s_{k+1}) \leqslant M(s_k)$$

was zu beweisen war.

Der damit bewiesene Satz (III) ist eine Verallgemeinerung bzw. Verschärfung des Satzes, dass das arithmetische Mittel stets grösser ist als das geometrische Mittel.

2.

Bekanntlich liefert jede algebraische Verbindung von elementarsymmetrischen Funktionen stets wieder symmetrische algebraische Funktionen, und umgekehrt lässt sich jede symmetrische algebraische Funktion als algebraische Funktion der elementarsymmetrischen Funktionen darstellen. Auf dieser Grundlage lassen sich aus den im ersten Kapitel betrachteten grundlegenden Mittelwerten auf verschiedene Art weitere Mittelwertformeln gewinnen.

Wir leiten vorerst drei ebenso einfache wie wichtige *Hilfssätze* her. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir vereinfachend mit $\left(\frac{Z}{N}\right)^{\frac{1}{l}}$ irgendeinen Mittelwert der Ordnung l. Des weiteren seien gegeben zwei positive, aber nicht gleichzeitig verschwindende Grössen h und k.

Sind $M_1 = \left(\frac{Z_1}{N_1}\right)^{\frac{1}{l}}$ und $M_2 = \left(\frac{Z_2}{N_2}\right)^{\frac{1}{t}}$ mit l und $t > 0$ zwei Mittelwerte, so liefert die folgende Verknüpfung einen neuen Mittelwert M:

$$M = \left(\left(\frac{Z_1}{N_1}\right)^h \cdot \left(\frac{Z_2}{N_2}\right)^k\right)^{\frac{1}{lh+tk}} \quad \textit{Multiplikationssatz.}$$

Denn aus $a_1^{lh} < \left(\frac{Z_1}{N_1}\right)^h < a_n^{lh}$ und $a_1^{tk} < \left(\frac{Z_2}{N_2}\right)^k < a_n^{tk}$ folgt sofort durch Multiplikation entsprechender Positionen der Ungleichungen

$$(a_1)^{lh+tk} < \left(\frac{Z_1}{N_1}\right)^h \cdot \left(\frac{Z_2}{N_2}\right)^k < (a_n)^{lh+tk}$$

also

$$a_1 < \left(\left(\frac{Z_1}{N_1}\right)^h \cdot \left(\frac{Z_2}{N_2}\right)^k\right)^{\frac{1}{lh+tk}} < a_n$$

Sind $M_1 = \left(\frac{Z_1}{N_1}\right)^{\frac{1}{l}}$ und $M_2 = \left(\frac{Z_2}{N_2}\right)^{\frac{1}{l}}$ zwei Mittelwerte gleicher Ordnung mit positivem l, so liefert folgende Formel einen neuen Mittelwert:

$$M = \left(\frac{Z_1 \cdot h + Z_2 \cdot k}{N_1 \cdot h + N_2 \cdot k}\right)^{\frac{1}{l}} \qquad \textit{I. Additionssatz.}$$

Denn aus $a_1^l < \frac{Z_1 \cdot h}{N_1 \cdot h} < a_n^l$ oder $a_1^l \cdot N_1 \cdot h < Z_1 \cdot h < a_n^l \cdot N_1 \cdot h$ einerseits und der analogen Ungleichung mit den Werten Z_2, N_2, k andererseits folgt durch Addition der entsprechenden Ungleichungspositionen:

$$a_1^l \cdot (N_1 \cdot h + N_2 \cdot k) < Z_1 \cdot h + Z_2 \cdot k < a_n^l \cdot (N_1 \cdot h + N_2 \cdot k)$$

oder
$$a_1 < \left(\frac{Z_1 \cdot h + Z_2 \cdot k}{N_1 \cdot h + N_2 \cdot k}\right)^{\frac{1}{l}} < a_n$$

Sind schliesslich $M_1 = \left(\frac{Z_1}{N_1}\right)^{\frac{1}{l}}$ und $M_2 = \left(\frac{Z_2}{N_2}\right)^{\frac{1}{t}}$ mit positiven l und t, zwei Mittelwerte verschiedener Ordnung, so erhält man mit folgender Formel wieder einen Mittelwert:

$$M = \frac{(Z_1 \cdot h)^{\frac{1}{l}} + (Z_2 \cdot k)^{\frac{1}{t}}}{(N_1 \cdot h)^{\frac{1}{l}} + (N_2 \cdot k)^{\frac{1}{t}}} \qquad \textit{II. Additionssatz.}$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus der bekannten Tatsache, dass

$$\text{wenn } \frac{a}{b} < \frac{c}{d}, \text{ dann } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

In Anwendung auf die grundlegenden Mittelwerte ergibt die Verbindung des Multiplikations- und des I. Additionssatzes die Möglichkeit der Bildung von Mittelwerten der Gestalt:

$$M = \left(\frac{\sum \Theta_i \prod s_m^h}{\sum \Theta_i \prod \binom{n}{m}^h}\right)^{\frac{1}{t}} \quad \text{wobei } 0 \leqslant \Theta_i, \quad \sum m \cdot h = t \text{ für jedes } \prod \qquad \text{(IV)}$$

Wir haben hier im Zähler ein isobares Polynom in s_k vom Gewicht t. Die Darstellungsmöglichkeit wächst rasch mit der Zahl n der a_i. Lassen wir nur positive ganzzahlige h zu, so ist der Zähler für $t = 6$:

bei $n = 2: \Theta_1 \cdot s_1^6 + \Theta_2 \cdot s_2^3 + \Theta_3 \cdot s_1^4 \cdot s_2 + \Theta_4 \cdot s_1^2 \cdot s_2^2$

bei $n = 6: \Theta_1 \cdot s_1^6 + \Theta_2 \cdot s_1^4 \cdot s_2 + \Theta_3 \cdot s_1^3 \cdot s_3 + \Theta_4 \cdot s_1^2 \cdot s_4 + \Theta_5 \cdot s_1 \cdot s_5 +$
$+ \Theta_6 \cdot s_6 + \Theta_7 \cdot s_1^2 \cdot s_2^2 + \Theta_8 \cdot s_2 \cdot s_4 + \Theta_9 \cdot s_2^3 + \Theta_{10} \cdot s_3^2 + \Theta_{11} \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot s_3$

Als ganz einfaches Beispiel eines Mittelwertes nach (IV) nennen wir:

$$M = \left(\frac{s_1 \cdot s_2}{n \cdot \binom{n}{2}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

oder speziell für $n = 2$

$$M = \left(\frac{(a_1 + a_2)\, a_1 a_2}{2 \cdot 1} \right)^{\frac{1}{3}} = \left[\frac{1}{2} (a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2) \right]^{\frac{1}{3}}$$

Dass ein generelles Analogon zum Multiplikationssatz für Division nicht bestehen kann, ist leicht einzusehen. Denn aus $a_1^t < \frac{Z_1}{N_1} < a_n^t$ und $a_1^r < \frac{Z_2}{N_2} < a_n^r$ oder, w. d. i. $a_1^{-r} > \frac{N_2}{Z_2} > a_n^{-r}$, folgt vorerst lediglich

$$a_1 \gtreqless \left(\frac{Z_1 \cdot N_2}{N_1 \cdot Z_2} \right)^{\frac{1}{t-r}} \gtreqless a_n$$

Unter bestimmten Voraussetzungen können aber auch aus dieser Verknüpfung Mittelwerte hervorgehen. So ist vor allem

$$M = \left(\frac{s_t \cdot \binom{n}{r}}{s_r \cdot \binom{n}{t}} \right)^{\frac{1}{t-r}}, \quad t \neq r \text{ stets ein Mittelwert.} \qquad \text{(V)}$$

Um dies zu beweisen, haben wir wieder zu zeigen, dass zunächst gilt:

$$a_1 \leqslant \frac{s_{t+1}}{\binom{n}{t+1}} \cdot \frac{\binom{n}{t}}{s_t} \leqslant a_n \quad \text{oder also}$$

$$a_1 \cdot s_t \cdot \binom{n}{t+1} \leqslant s_{t+1} \cdot \binom{n}{t} \leqslant a_n \cdot s_t \cdot \binom{n}{t+1}$$

In der Tat können wir uns den Mittelteil $s_{t+1} \cdot \binom{n}{t}$ aus $s_t \cdot \binom{n}{t+1}$ — das eine Summe von $\binom{n}{t}\binom{n}{t+1}$ Produkten mit je t verschiedenen a_i als Faktoren ist — entstanden denken, indem jedes Produkt passend durch ein a_i erweitert wird. Nun ist $s_{t+1} \cdot \binom{n}{t}$ ebenfalls eine Summe von $\binom{n}{t+1}\binom{n}{t}$ Produkten, aber von je $t+1$ verschiedenen a_i als Faktoren, und sicher grösser, als wenn $s_t \cdot \binom{n}{t+1}$ durchwegs mit a_1 erweitert wird — wie links aussen in der Ungleichung — und kleiner als bei durchgängiger Erweiterung mit a_n wie rechts aussen. In Anwendung des Multiplikationssatzes folgt nun:

$$a_1^2 < \frac{s_{t+1}}{\binom{n}{t+1}} \cdot \frac{\binom{n}{t}}{s_t} \cdot \frac{s_t}{\binom{n}{t}} \cdot \frac{\binom{n}{t-1}}{s_{t-1}} = \frac{s_{t+1}}{\binom{n}{t+1}} \cdot \frac{\binom{n}{t-1}}{s_{t-1}} < a_n^2$$

und in wiederholter Anwendung dieses Procedere allgemein

$$a_1 < \left(\frac{s_t \cdot \binom{n}{r}}{\binom{n}{t} \cdot s_r} \right)^{\frac{1}{t-r}} < a_n$$

eine Ungleichung, die gültig bleibt für $t \gtreqless r$, denn es ist

$$\left(\frac{s_t \cdot \binom{n}{r}}{\binom{n}{t} \cdot s_r} \right)^{\frac{1}{t-r}} = \left(\frac{s_r \cdot \binom{n}{t}}{\binom{n}{r} \cdot s_t} \right)^{\frac{1}{r-t}}$$

Der Fall $t = r$ wird später gesondert zur Behandlung gelangen.

Wir können den nach Formel V gebildeten Mittelwerten eine besondere Interpretation geben, wozu jedoch ein Wort über die sogenannten gewogenen Mittel vorauszuschicken ist. Ein gewöhnlicher elementarer Mittelwert der Grössen $a_i\,(i=1, 2, \ldots n)$ ist — wie wir noch zeigen werden — stets von der Gestalt

$$M = \left(\frac{1}{n} \cdot \sum z_i\right)^{\frac{1}{t}}$$

wobei $\sum z_i$ ein n-gliedriges, symmetrisches, isobares Polynom in den a_i vom Gewichte t ist. Ein gewogener Mittelwert, gekennzeichnet durch die positiven Gewichte $g_i\,(i=1, 2, \ldots n)$, kann dann stets als der entsprechende gewöhnliche Mittelwert mit einem $\bar{g}$- statt n-gliedrigen Polynom aufgefasst werden, wobei der Summand z_i im ganzen g_i-mal vorkommt und $\bar{g} = \sum g_i$ ist. Es ist dann also das gewogene Mittel M_g:

$$M_g = \left(\frac{\sum g_i \cdot z_i}{\sum g_i}\right)^{\frac{1}{t}}$$

Nach dieser Vorbemerkung ist leicht einzusehen, dass das Mittel

$$\left(\frac{s_t \cdot \binom{n}{r}}{\binom{n}{t} \cdot s_r}\right)^{\frac{1}{t-r}}$$

gleich ist einem gewogenen elementaren Mittel der Ordnung $(t-r)$, wobei die Summanden von s_r als Gewichte fungieren. Zwei einfache Beispiele für $n=4$ mögen dies verdeutlichen, wobei die Gewichte durch eckige Klammern kenntlich gemacht sind:

$$1)\quad t=3;\ r=2;\ M = \frac{6 s_3}{4 s_2} = \frac{3(a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4)}{2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_4)} =$$

$$= \frac{[a_{23}+a_{24}+a_{34}]\,a_1 + [a_{13}+a_{14}+a_{34}]\,a_2 + [a_{12}+a_{14}+a_{24}]\,a_3 + [a_{12}+a_{13}+a_{23}]\,a_4}{[a_{23}+a_{24}+a_{34}] + [a_{13}+a_{14}+a_{34}] + [a_{12}+a_{14}+a_{24}] + [a_{12}+a_{13}+a_{23}]}$$

(wobei wir $a_i\, a_j$ mit a_{ij} abgekürzt haben)

$$2)\ t=4;\ r=2;\ M=\left(\frac{6s_4}{s_2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{6\cdot a_1a_2a_3a_4}{a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{23}+a_{24}+a_{34}}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\frac{[a_{34}]\,a_{12}+[a_{24}]\,a_{13}+[a_{23}]\,a_{14}+[a_{14}]\,a_{23}+[a_{13}]\,a_{24}+[a_{12}]\,a_{34}}{[a_{34}]+[a_{24}]+[a_{23}]+[a_{14}]+[a_{13}]+[a_{12}]}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Nach dieser Bemerkung über gewogene Mittel wenden wir uns wieder der Formel V zu und können darin insbesondere $t-r=1$ setzen und erhalten eine besondere Gruppe von Mittelwerten von der Form

$$M=\frac{s_{t+1}\cdot\binom{n}{t}}{s_t\cdot\binom{n}{t+1}}=\frac{s_{t+1}\cdot(t+1)}{s_t\cdot(n-t)}=\frac{M^{t+1}(s_{t+1})}{M^t(s_t)}$$

Wir zeigten soeben, dass

$$a_1\cdot\frac{s_t}{\binom{n}{t}}<\frac{s_{t+1}}{\binom{n}{t+1}}<a_n\cdot\frac{s_t}{\binom{n}{t}}$$

oder $a_1\cdot M^t(s_t)<M^{t+1}(s_{t+1})<a_n\cdot M^t(s_t)$. Wenn also $a_1>1$ und damit alle $a_i>1$, ist sicher $M^t(s_t)<M^{t+1}(s_{t+1})$, und wenn $a_n<1$ und damit alle $a_i<1$, so ist sicher $M^t(s_t)>M^{t+1}(s_{t+1})$. Im Gegensatz zu den Mitteln $M(s_t)$ selbst lässt sich also bei deren Potenzen $M^t(s_t)$ keine allgemein gültige Ungleichung für zwei aufeinanderfolgende Werte angeben. Wir behaupten aber die Gültigkeit der folgenden Reihe von Ungleichungen: (VI)

$$M(s_1)\geqq\frac{M^2(s_2)}{M(s_1)}\geqq\frac{M^3(s_3)}{M^2(s_2)}\geqq\ldots\geqq\frac{M^t(s_t)}{M^{t-1}(s_{t-1})}\geqq\frac{M^{t+1}(s_{t+1})}{M^t(s_t)}\geqq\ldots\geqq\frac{M^n(s_n)}{M^{n-1}(s_{n-1})}$$

Der erste dieser Mittelwerte ist das arithmetische Mittel, der letzte — wie man sich leicht überzeugt — das harmonische Mittel:

$$\frac{n}{\sum\frac{1}{a_i}},$$

und Satz (VI) ist daher eine Verallgemeinerung und Verschärfung des Satzes, dass das arithmetische Mittel stets grösser ist als das harmonische Mittel. — Es kann übrigens nach dem oben Gesagten das harmonische Mittel aufgefasst werden als gewogenes arithmetisches Mittel, wobei jeder der n Werte a_i die übrigen $(n-1)$ Werte als Gewicht hat.

Um nun den Satz (VI) zu beweisen, denken wir uns die reziproken Werte der a_i, also $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2} \ldots \frac{1}{a_n}$ als die n reellen positiven Wurzeln einer Gleichung n-ten Grades, welche wir in der Form (II) schreiben:

$$x^n - \binom{n}{1} \cdot N_1 \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot N_2^2 \cdot x^{n-2} - \ldots \pm \binom{n}{n} \cdot N_n^n = 0$$

Dabei bedeuten die N_i die grundlegenden Mittelwerte der $\frac{1}{a_i}$ und man überlegt sich leicht, dass folgende Beziehung zu den grundlegenden Mittelwerten der a_i besteht:

$$N_1 = \frac{M^{n-1}(s_{n-1})}{M^n(s_n)}\,;\; N_2^2 = \frac{M^{n-2}(s_{n-2})}{M^n(s_n)} \ldots N_{n-1}^{n-1} = \frac{M(s_1)}{M^n(s_n)}\,;\; N_n^n = \frac{1}{M^n(s_n)}$$

In Anwendung von Satz (III) auf obige Gleichung muss gelten:

$$N_1 > N_2 > N_3 > \ldots > N_{n-1} > N_n; \quad \text{oder}$$

$$\left(\frac{M^{n-1}(s_{n-1})}{M^n(s_n)}\right)^1 > \left(\frac{M^{n-2}(s_{n-2})}{M^n(s_n)}\right)^{\frac{1}{2}} > \ldots > \left(\frac{M(s_1)}{M^n(s_n)}\right)^{\frac{1}{n-1}} > \left(\frac{1}{M^n(s_n)}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{M(s_n)}$$

Aus den beiden ersten Gliedern der obigen Ungleichungsreihe folgt insbesondere

$$\left(\frac{M^{n-1}(s_{n-1})}{M^n(s_n)}\right)^2 > \frac{M^{n-2}(s_{n-2})}{M^n(s_n)} \quad \text{oder} \quad \frac{M^{n-1}(s_{n-1})}{M^{n-2}(s_{n-2})} > \frac{M^n(s_n)}{M^{n-1}(s_{n-1})}$$

Wir können diese Aussage auch auf Gleichung (II) beziehen, was besagt, dass bei einer Gleichung n-ten Grades mit n positiven Wurzeln bezüglich der in den drei letzten Gliedern auftretenden Mittelwertpotenzen die eben genannte Ungleichung gilt. Die Ableitung einer Gleichung n-ten Grades mit n verschiedenen positiven Wurzeln ist eine Gleichung $(n-1)$-ten Grades mit $n-1$ ebenfalls positiven

Wurzeln, die aber durchwegs verschieden sind von jenen der ursprünglichen Gleichung. Die erste Ableitung von (II) ergibt, nach Division durch n:

$$x^{n-1} - \binom{n-1}{1} \cdot M(s_1) \cdot x^{n-2} + \binom{n-1}{2} \cdot M^2(s_2) \cdot x^{n-3} - \ldots \pm M^{n-1}(s_{n-1}) = 0$$

Das hierin auftretende Mittel $M(s_k)$ ist also das k-te grundlegende Mittel der $n-1$ Wurzeln der abgeleiteten Gleichung, zugleich aber auch das k-te grundlegende Mittel der n Wurzeln der ursprünglichen Gleichung. Nachdem wir mit der Ableitung wieder eine Gleichung mit lauter positiven Wurzeln haben, gilt bezüglich der in den letzten drei Gliedern enthaltenen Mittelwertspotenzen die vorgenannte Ungleichung, also

$$\frac{M^{n-2}(s_{n-2})}{M^{n-3}(s_{n-3})} \geqslant \frac{M^{n-1}(s_{n-1})}{M^{n-2}(s_{n-2})}$$

Durch sukzessive weitere Ableitungen ergibt sich somit der Beweis von Satz (VI).

Die Verwertung des zweiten Additionssatzes allein oder in Verbindung mit Satz (V) zeigt weitere Möglichkeiten der Bildung einer Vielzahl von Mittelwerten. Wir nennen nur zwei ganz einfache Beispiele (ausgeschrieben für speziell $n = 2$):

$$(1)\ M = \frac{s_1 + s_2 \cdot s_1^{-1}}{n + \binom{n}{2} \cdot n^{-1}} ; \frac{a_1 + a_2 + a_1 a_2 (a_1 + a_2)^{-1}}{2 + 1 \cdot 2^{-1}} = \frac{2(a_1^2 + 3 a_1 a_2 + a_2^2)}{5 \cdot (a_1 + a_2)}$$

$$(2)\ M = \frac{s_1 + (s_2)^{\frac{1}{2}}}{n + \binom{n}{2}^{\frac{1}{2}}} ; \frac{a_1 + (a_1 a_2)^{\frac{1}{2}} + a_2}{3}$$

(nicht zu verwechseln mit dem arithmetisch-geometrischen Mittel)

Auch zu den Additionssätzen gibt es kein generelles Analogon für Subtraktion. Wenn wir z. B. in der nach (IV) gebildeten einfachen Formel

$$M = \left(\frac{s_1^2 + \Theta \cdot s_2}{\binom{n}{1}^2 + \Theta \cdot \binom{n}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

für Θ auch negative Werte zulassen, so existiert für Θ ein Intervall, innerhab welchem M kein Mittelwert ist. Denn schreiben wir die Formel

$$M^2 = \frac{s_1^2 + \Theta \cdot s_2}{\binom{n}{1}^2 + \Theta \binom{n}{2}},$$

so ist dies bezüglich M^2 und Θ eine gebrochene lineare Funktion, d. h. bildmässig eine gleichseitige Hyperbel mit zu den Koordinatenachsen parallelen Asymptoten. M^2 als Funktion von Θ, und damit M, kann beliebig hohe positive und negative Werte annehmen, also a_1 unter- und a_n überschreiten. Wenn speziell $n = 2$, so ist

$$M^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + (2 + \Theta)\, a_1 a_2}{4 + \Theta},$$

was bei einem Wert für Θ innerhalb der Grenzen

$$\frac{3a_1^2 - a_2^2 - 2a_1 a_2}{a_1 a_2 - a_1^2} \quad \text{und} \quad \frac{3a_2^2 - a_1^2 - 2a_1 a_2}{a_1 a_2 - a_2^2} \quad \text{(beide Grössen sind negativ)}$$

keinen Wert M zwischen a_1 und a_n ergibt.

Wenn wir daher in Formel (IV)

$$M = \left(\frac{\sum \Theta_i \cdot \prod s_m^h}{\sum \Theta_i \cdot \prod \binom{n}{m}^h} \right)^{\frac{1}{t}}, \quad \sum m \cdot h = t \text{ für jedes } \prod,$$

auch negative Θ_i zulassen, so wird eine nichtsystematische Wahl der Θ_i kaum viel Erkennenswertes liefern. Wir können aber z. B. die Θ_i so wählen, dass im Zähler Potenzsummen der Summanden der s_k resultieren, was immer möglich ist; denn jede ganze symmetrische Funktion $f(a_1, a_2 \ldots a_n)$ ist als rationale ganze Funktion der n elementarsymmetrischen Funktionen $s_1 \ldots s_n$ darstellbar. Ist insbesondere f in den a_i homogen vom Grad l, so ist die Darstellung isobar vom Gewicht l.

Wir bezeichnen die Potenzsumme von s_k vom Grad t mit ${}_k p_t$. Es ist beispielsweise:

$${}_1p_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n\,; \qquad {}_2p_1 = a_1 a_2 + a_1 a_2 + \dots + a_{n-1} a_n$$

$${}_1p_2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2\,; \qquad {}_2p_2 = (a_1 a_2)^2 + (a_1 a_3)^2 + \dots + (a_{n-1} a_n)^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$${}_1p_t = a_1^t + a_2^t + \dots + a_n^t\,; \qquad {}_2p_t = (a_1 a_2)^t + (a_1 a_3)^t + \dots + (a_{n-1} a_n)^t$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Demnach ist ${}_k p_t$ eine homogene Funktion der a_i vom Grade $k \cdot t = l$ und ermöglicht eine isobare Darstellung durch die elementarsymmetrischen Funktionen vom Gewicht $k \cdot t = l$, also in der Gestalt $\sum \Theta_i \cdot \prod s_m^h$, wobei $\sum m \cdot h = l$ für jedes $\prod$. Die Darstellung ist eindeutig, jedes ${}_k p_t$ ist nur durch eine einzige Wahl der Θ_i darstellbar. So ist z. B.:

$${}_kp_2 = s_k^2 - 2 \cdot \sum_{t=1}^{k} \left(s_{k-t} \cdot s_{k+t} \cdot [-1]^{t-1}\right); \quad \text{wobei:} \quad \begin{array}{l} s_0 = 1, \\ s_m = 0 \ \text{für} \ m > n \end{array}$$

Wählen wir nun die Θ_i in Formel (IV) so, dass im Zähler Potenzsummen der elementarsymmetrischen Funktionen resultieren, so haben wir:

$$M = \left(\frac{{}_r p_k}{\binom{n}{r}} \right)^{\frac{1}{t}}; \; k \cdot r = t \tag{VII}$$

und dies ist sicher ein Mittelwert, denn es ist

$$a_1^t \cdot \binom{n}{r} < {}_r p_k < a_n^t \cdot \binom{n}{r}$$

Ist speziell $r = 1$, so haben wir den bekannten Fall des gewöhnlichen Potenzmittels

$$M = \left(\frac{{}_1 p_t}{n} \right)^{\frac{1}{t}} = \left(\frac{\sum a_i^t}{n} \right)^{\frac{1}{t}}$$

3.

Wir studieren nachstehend die Klasse der Potenzmittel genauer. Sie ist vor allem deshalb interessant, weil in ihr die bekannten einfachen Mittelwerte (arithmetisches, geometrisches, harmonisches, kontraharmonisches und quadratisches Mittel) als benachbarte Spezialfälle enthalten sind. Es tritt daher der verwandtschaftliche Zusammenhang dieser Mittelwerte klar in Erscheinung, und ihre Stellung zueinander lässt sich sehr leicht überblicken.

Da sich die Potenzsummen als Funktionen der elementarsymmetrischen Funktionen darstellen lassen, muss jeder Satz über die grundlegenden Mittelwerte ein Gegenstück bei den Potenzmitteln haben. Man wird sich sofort die Frage stellen, ob für zwei Potenzmittel:

$$M_1 = \left(\frac{1}{n} \cdot \sum a_i^t\right)^{\frac{1}{t}} \text{ und } M_2 = \left(\frac{1}{n} \cdot \sum a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}$$

eine analoge Bildung zu (V), also

$$M = \left(\frac{\sum a_i^t}{\sum a_i^k}\right)^{\frac{1}{t-k}}$$

auch wieder einen Mittelwert liefert. Wir setzen $t - k = l$ und schreiben ferner hinfort der Einfachheit halber überall dort für $a_i = a$, wo Missverständnisse ausgeschlossen sind. Wir setzen künftig:

$$M(k, l) = \left(\frac{\sum a^{k+l}}{\sum a^k}\right)^{\frac{1}{l}} \quad \begin{array}{l} k \text{ und } l \text{ beliebige reelle Grössen} \\ -\infty < k, l < +\infty \end{array} \tag{VIII}$$

Dass es sich hiebei tatsächlich um Mittelwerte handelt, d. h. dass $a_1 < M(k, l) < a_n$, ist leicht zu zeigen. Man überlege sich vorerst, dass — wenn man l positiv voraussetzt — gilt:

$$M(k, -l) = \left(\frac{\sum a^k}{\sum a^{k-l}}\right)^{\frac{1}{l}}$$

$$\text{und } a_1^l < a^l < a_n^l, \text{ also auch}$$

$$a_1^l \cdot \sum a^k = \sum a_1^l \cdot a^k < \sum a^l \cdot a^k = \sum a^{l+k} < \sum a_n^l \cdot a^k = a_n^l \cdot \sum a^k$$

und damit

$$a_1^l < \frac{\sum a^{k+l}}{\sum a^k} < a_n^l, \text{ bzw. } a_1 < \left(\frac{\sum a^{k+l}}{\sum a^k}\right)^{\frac{1}{l}} < a_n$$

Anderseits ist $\quad \dfrac{a_1}{a} < 1$ und $\dfrac{a_n}{a} > 1$, also

$$a_1^l \cdot \sum a^{-l} \cdot a^k < \sum a^k < a_n^l \cdot \sum a^{-l} \cdot a^k$$

und damit $\quad a_1^l < \dfrac{\sum a^k}{\sum a^{k-l}} < a_n^l$, bzw. $a_1 < \left(\dfrac{\sum a^k}{\sum a^{k-l}}\right)^{\frac{1}{l}} < a_n$

Es ist also sowohl $a_1 < M(k, l) < a_n$ als auch $a_1 < M(k, -l) < a_n$. Der Fall $l = 0$ wird separat behandelt werden.

Wir setzen nun in $M(k, l)$ speziell $l = 1$, also

$$M(k, 1) = \frac{\sum a^{k+1}}{\sum a^k} \quad \text{und behaupten} \quad \frac{\sum a^{k+1}}{\sum a^k} \gg \frac{\sum a^k}{\sum a^{k-1}}$$

Es sei $a_i^k = b_i$. Da $a_i > 0$, ist b_i immer positiv, ob nun $k \gtreqless 0$. Mithin ist zu zeigen, dass

$$\sum a_i \cdot b_i \cdot \sum \frac{b_i}{a_i} \gg (\sum b_i)^2, \text{ bzw. } \sum a_i \cdot b_i \cdot \sum \frac{b_i}{a_i} - (\sum b_i)^2 \gg 0 \text{ ist.}$$

Ausmultipliziert erhält man:

$$\left[b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 + \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}\right) b_1 b_2 + \ldots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) b_{n-1} b_n\right] -$$

$$- [b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 + 2b_1 b_2 + 2b_1 b_3 + \ldots + 2b_{n-1} b_n] =$$

$$= b_1 b_2 \cdot \frac{(a_1 - a_2)^2}{a_1 a_2} + b_1 b_3 \cdot \frac{(a_1 - a_3)^2}{a_1 a_3} + \ldots + b_{n-1} b_n \cdot \frac{(a_{n-1} - a_n)^2}{a_{n-1} a_n} > 0,$$

denn es ist $b_i b_j > 0$, $a_i a_j > 0$ und $(a_i - a_j)^2 > 0$. Wir haben somit bewiesen:

$$\ldots \frac{\sum a^{k+1}}{\sum a^k} \gg \frac{\sum a^k}{\sum a^{k-1}} \gg \ldots \gg \frac{\sum a^2}{\sum a} \gg \frac{\sum a}{n} \gg \frac{n}{\sum a^{-1}} \gg \frac{\sum a^{-1}}{\sum a^{-2}} \gg \ldots$$

$$\ldots \gg \frac{\sum a^{1-k}}{\sum a^{-k}} \gg \frac{\sum a^{-k}}{\sum a^{-k-1}} \gg \ldots \qquad \text{(IX)}$$

In der Reihe dieser Ungleichungen ist insbesondere:

$$\frac{\sum a^2}{\sum a} \quad \text{das kontraharmonische Mittel (K. H. M.),}$$

$$\frac{\sum a}{n} \quad \text{das arithmetische Mittel (A. M.),}$$

$$\frac{n}{\sum a^{-1}} \quad \text{das harmonische Mittel (H. M.),}$$

und es gilt demnach stets K. H. M. $\geqq$ A. M. $\geqq$ H. M.

Setzen wir $a_i^k = g_i$, so ist

$$\frac{\sum a_i^{k+1}}{\sum a_i^k} = \frac{\sum a_i \cdot g_i}{\sum g_i}$$

Die obige Reihe ist daher eine Erweiterung des A. M. auf spezielle gewogene A. M., wobei die Gewichte Potenzen der Grössen a_i selbst sind. Zufolge der Ungleichungen (IX) gilt:

$$\underbrace{\frac{\sum a^k}{\sum a^{k-1}} \cdot \frac{\sum a^k}{\sum a^{k-1}} \cdots}_{k\text{-mal}} = \left(\frac{\sum a^k}{\sum a^{k-1}}\right)^k \geqq \frac{\sum a^k}{\sum a^{k-1}} \cdot \frac{\sum a^{k-1}}{\sum a^{k-2}} \cdots \frac{\sum a^2}{\sum a} \cdot \frac{\sum a}{n} = \frac{\sum a^k}{n}$$

$$\text{also:} \quad \frac{\sum a^k}{\sum a^{k-1}} \geqq \left(\frac{\sum a^k}{n}\right)^{\frac{1}{k}} \tag{X}$$

Ebenfalls wegen der Ungleichungen (IX) gilt weiter

$$\underbrace{\frac{\sum a^{k+1}}{\sum a^k} \cdot \frac{\sum a^{k+1}}{\sum a^k} \cdots}_{l\text{-mal}} = \left(\frac{\sum a^{k+1}}{\sum a^k}\right)^l < \frac{\sum a^{k+1}}{\sum a^k} \cdot \frac{\sum a^k}{\sum a^{k+1}} \cdots \frac{\sum a^{k+l-1}}{\sum a^{k+l-2}} \cdot \frac{\sum a^{k+l}}{\sum a^{k+l-1}} = \frac{\sum a^{k+l}}{\sum a^k}$$

$$\text{also:} \quad \frac{\sum a^{k+1}}{\sum a^k} < \left(\frac{\sum a^{k+l}}{\sum a^k}\right)^{\frac{1}{l}}; \quad l > 1 \tag{XI}$$

Für $k = 0$ gilt insbesondere:

$$\frac{\sum a}{n} \leqq \left(\frac{\sum a^l}{n}\right)^{\frac{1}{l}} \text{ bzw. } \left(\frac{\sum a}{n}\right)^l \leqq \frac{\sum a^l}{n}$$

Setzt man hier für $l = 2$, so hat man

$$\frac{\sum a}{n} \leqslant \left(\frac{\sum a^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ bzw. } \left(\frac{\sum a}{n}\right)^2 \leqslant \frac{\sum a^2}{n}$$

Es ist dies der bekannte Satz, dass das Quadrat eines arithmetischen Mittels kleiner ist als das arithmetische Mittel der Quadrate der Basisgrössen; und die Verallgemeinerung lautet: Die l-te Potenz eines A. M. ist kleiner als das A. M. der l-ten Potenzen der Basisgrössen. Aus X und XI zusammen folgt

$$\frac{\sum a}{n} \leqslant \left(\frac{\sum a^l}{n}\right)^{\frac{1}{l}} \leqslant \frac{\sum a^l}{\sum a^{l-1}}$$

In einfacher Umformung erhalten wir aus XI:

$$\frac{\sum a^{k+l}}{\sum a^k} \geqslant \left(\frac{\sum a^{k+1}}{\sum a^k}\right)^l \text{ oder } \frac{\sum a^{k+l}}{(\sum a^{k+1})^l} \geqslant \frac{1}{(\sum a^k)^{l-1}}$$

Beidseitig mit $(\sum a^{k+l})^{l-1}$ multipliziert, ergibt:

$$\left(\frac{\sum a^{k+l}}{\sum a^{k+1}}\right)^l \geqslant \left(\frac{\sum a^{k+l}}{\sum a^k}\right)^{l-1} \text{ bzw. } \left(\frac{\sum a^{k+l}}{\sum a^{k+1}}\right)^{\frac{1}{l-1}} \geqslant \left(\frac{\sum a^{k+l}}{\sum a^k}\right)^{\frac{1}{l}} \qquad \text{(XII)}$$

Setzt man hierin $-l$ an Stelle von l, so folgt

$$\left(\frac{\sum a^{k-l}}{\sum a^{k+1}}\right)^{\frac{1}{-1-l}} \geqslant \left(\frac{\sum a^{k-l}}{\sum a^k}\right)^{\frac{1}{-l}} \text{ bzw. } \left(\frac{\sum a^{k+1}}{\sum a^{k-l}}\right)^{\frac{1}{l+1}} \geqslant \left(\frac{\sum a^k}{\sum a^{k-l}}\right)^{\frac{1}{l}}$$

oder, wenn man k durch $k + l$ ersetzt:

$$\left(\frac{\sum a^{k+l+1}}{\sum a^k}\right)^{\frac{1}{l+1}} \geqslant \left(\frac{\sum a^{k+l}}{\sum a^k}\right)^{\frac{1}{l}} \qquad \text{(XIII)}$$

Zufolge (XII) und XIII) gilt die folgende Ungleichungsreihe:

$$\ldots \geqslant \left(\frac{\sum a^{k+l}}{\sum a^k}\right)^{\frac{1}{l}} \geqslant \left(\frac{\sum a^{k+l-1}}{\sum a^k}\right)^{\frac{1}{l-1}} \geqslant \ldots \geqslant \left(\frac{\sum a^{k+2}}{\sum a^k}\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \left(\frac{\sum a^{k+1}}{\sum a^k}\right) \geqslant \left(\frac{\sum a^k}{\sum a^k}\right)^{\frac{1}{o}} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{\sum a^k}{\sum a^{k-1}}\right) \geqslant \left(\frac{\sum a^k}{\sum a^{k-2}}\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \ldots \geqslant \left(\frac{\sum a^k}{\sum a^{k+1-l}}\right)^{\frac{1}{l-1}} \geqslant \left(\frac{\sum a^k}{\sum a^{k-l}}\right)^{\frac{1}{l}} \geqslant \ldots$$

$$\ldots \geqslant \left(\frac{\sum a^k}{n}\right)^{\frac{1}{k}} \geqslant \left(\frac{\sum a^k}{\sum a^{-1}}\right)^{\frac{1}{k+1}} \geqslant \left(\frac{\sum a^k}{\sum a^{-2}}\right)^{\frac{1}{k+2}} \geqslant \ldots \qquad \text{(XIV)}$$

oder auch: $\ldots M(k, l+1) \geqslant M(k, l) \geqslant M(k, l-1) \geqslant \ldots$. Es ist dies das Gegenstück zu Satz III.

Man überlegt sich leicht, dass

$$a_1 \xleftarrow[\lim\limits_{l=-\infty}]{} \left(\frac{\sum a^{k+l}}{\sum a^k}\right)^{\frac{1}{l}} \xrightarrow[\lim\limits_{l=+\infty}]{} a_n$$

Für $k = 0$ insbesondere ergibt sich die Reihe der gewöhnlichen Potenzmittel:

$$\left(\frac{\sum a^l}{n}\right)^{\frac{1}{l}} \geqslant \left(\frac{\sum a^{l-1}}{n}\right)^{\frac{1}{l-1}} \geqslant \ldots \geqslant \left(\frac{\sum a^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \left(\frac{\sum a}{n}\right) \geqslant \left(\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{o}} \geqslant \left(\frac{n}{\sum a^{-1}}\right) \geqslant \left(\frac{n}{\sum a^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \ldots \qquad \text{(XV)}$$

Hierin ist $\left(\frac{\sum a^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ das quadratische und $\frac{\sum a}{n}$ das arithmetische Mittel, und es ist damit erwiesen: es ist immer: Qu. M. $\geqslant$ A. M.

Wie ohne weiteres einzusehen, ist

$$a_1 \cdot \frac{\sum a^{k+l}}{\sum a^k} < \frac{\sum a^{k+l+1}}{\sum a^k} < a_n \cdot \frac{\sum a^{k+l}}{\sum a^k}$$

oder $\qquad a_1 \cdot M^l(k, l) < M^{l+1}(k, l+1) < a_n \cdot M^l(k, l)$

Wenn demnach $a_1 > 1$ und damit alle $a_i > 1$, ist sicher $M^l(k, l) <$ $< M^{l+1}(k, l+1)$, wenn aber $a_n < 1$ und damit alle $a_i < 1$, so ist sicher $M^l(k, l) > M^{l+1}(k, l+1)$. Im Gegensatz zu den Mitteln $M(k, l)$ lässt sich also für die Potenzen $M^l(k, l)$ keine allgemein gültige Ungleichungsreihe angeben. Dagegen lässt sich mit Potenzen-Quotienten das Gegenstück zu Satz VI aufstellen. Es gilt nämlich

$$\cdots \geqslant \frac{M^{l+1}(k, l+1)}{M^l(k, l)} \geqslant \frac{M^l(k, l)}{M^{l-1}(k, l-1)} \geqslant \frac{M^{l-1}(k, l-1)}{M^{l-2}(k, l-2)} \geqslant \cdots$$

denn ausgeschrieben — wobei sich immer $\sum a^k$ in den Nennern wegkürzt — haben wir

$$\cdots \geqslant \frac{\sum a^{k+l+1}}{\sum a^{k+l}} \geqslant \frac{\sum a^{k+l}}{\sum a^{k+l-1}} \geqslant \frac{\sum a^{k+l-1}}{\sum a^{k+l-2}} \geqslant \cdots$$

und dies ist die bekannte und bereits bewiesene Reihe IX.

In XIV interessiert insbesondere der zunächst unbestimmte Ausdruck für $M(k, 0)$; nämlich $\left(\frac{\sum a^k}{\sum a^k}\right)^{\frac{1}{0}}$. Um seine Bestimmung vorzunehmen, betrachten wir $M(k, 0)$ als

$$\lim_{x=0} M(k, x) = \lim_{x=0} \left(\frac{\sum a^{k+x}}{\sum a^k}\right)^{\frac{1}{x}}$$

und operieren nach bekannter Methode mit dem Logarithmus des Ausdrucks $M(k, x)$:

$$\ln M(k, x) = \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{\sum a^{k+x}}{\sum a^k} = \frac{1}{x} \cdot \ln f(x)$$

Dies ist für $x = 0$ ein unbestimmter Ausdruck, zu dessen Bestimmung Zähler und Nenner einzeln zu differenzieren sind:

$$\frac{\frac{d}{dx}\ln f(x)}{\frac{d}{dx}x} = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{\sum a^{k+x}}{\sum a^k}\right)}{\frac{\sum a^{k+x}}{\sum a^k}} = \frac{\frac{d}{dx}\sum a^{k+x}}{\sum a^{k+x}} = \frac{\sum a^{k+x}\cdot \ln a}{\sum a^{k+x}} =$$

$$= \frac{\sum \ln a^{a^{k+x}}}{\sum a^{k+x}} = \frac{1}{\sum a^{k+x}}\cdot \ln \prod a^{a^{k+x}} = \ln \left(\prod a^{a^{k+x}}\right)^{\frac{1}{\sum a^{k+x}}}$$

Es ist daher

$$\lim_{x=o} M(k, x) = \lim_{x=o} \left(\prod a^{a^{k+x}}\right)^{\frac{1}{\sum a^{k+x}}} \quad \text{also} \quad M(k, 0) = \left(\prod a^{a^k}\right)^{\frac{1}{\sum a^k}}$$

Insbesondere ist

$$M(0, 0) = \left(\prod a^{a^o}\right)^{\frac{1}{\sum a^o}} = \left(\prod a\right)^{\frac{1}{n}}, \text{ d. h. das geometrische Mittel!}$$

Aus der Ungleichung XV folgt demnach, dass stets A. M. $>$ G. M. Dieser bekannte, aber an sich nicht ohne weiteres evidente Satz ergibt sich also hier in leichter Folgerung.

Setzen wir auch hier wieder $a_i^k = g_i$, so kann $M(k, 0)$, $k \neq 0$, als spezielles gewogenes geometrisches Mittel aufgefasst werden, mit Potenzen der Basisgrössen als Gewichten:

$$\left(\prod a^g\right)^{\frac{1}{\Sigma g}}$$

Aus XII und XIII ist zu folgern

$$\left(\frac{\sum a^{k+l+1}}{\sum a^{k+1}}\right)^{\frac{1}{l}} > \left(\frac{\sum a^{k+l+1}}{\sum a^k}\right)^{\frac{1}{l+1}} > \left(\frac{\sum a^{k+l}}{\sum a^k}\right)^{\frac{1}{l}}$$

Daraus folgt aber auch

$$\ldots > \left(\frac{\sum a^{k+l+1}}{\sum a^{k+1}}\right)^{\frac{1}{l}} > \left(\frac{\sum a^{k+l}}{\sum a^k}\right)^{\frac{1}{l}} > \left(\frac{\sum a^{k+l-1}}{\sum a^{k-1}}\right)^{\frac{1}{l}} > \ldots > \left(\frac{\sum a^k}{\sum a^{k-l}}\right)^{\frac{1}{l}} > \ldots$$

$$\ldots > \left(\frac{\sum a^2}{\sum a^{2-l}}\right)^{\frac{1}{l}} > \left(\frac{\sum a}{\sum a^{1-l}}\right)^{\frac{1}{l}} > \left(\frac{n}{\sum a^{-l}}\right)^{\frac{1}{l}} > \left(\frac{\sum a^{-1}}{\sum a^{-l-1}}\right)^{\frac{1}{l}} > \ldots \quad \text{(XVI)}$$

Wiederum überlegt man sich leicht, dass auch in bezug auf k — wie bereits für l erwähnt — gilt:

$$a_1 \xleftarrow[k=-\infty]{\lim} \left(\frac{\sum a^{k+l}}{\sum a^k}\right)^{\frac{1}{l}} \xrightarrow[k=+\infty]{\lim} a_n$$

Insbesondere folgt für $l = 1$ aus XVI wieder die bereits bekannte Reihe IX.

Aus XVI und XIII folgt aber auch:

$$\left(\frac{\sum a^{k+l}}{\sum a^k}\right)^{\frac{1}{l}} \leqslant \left(\frac{\sum a^{k+l+1}}{\sum a^{k+1}}\right)^{\frac{1}{l}} \leqslant \left(\frac{\sum a^{k+l+2}}{\sum a^{k+1}}\right)^{\frac{1}{l+1}}$$

und es gilt demnach

$$\ldots \leqslant \left(\frac{\sum a^{k+l}}{\sum a^k}\right)^{\frac{1}{l}} \leqslant \left(\frac{\sum a^{k+l+2}}{\sum a^{k+1}}\right)^{\frac{1}{l+1}} \leqslant \left(\frac{\sum a^{k+l+4}}{\sum a^{k+2}}\right)^{\frac{1}{l+2}} \leqslant \ldots \quad \text{(XVII)}$$

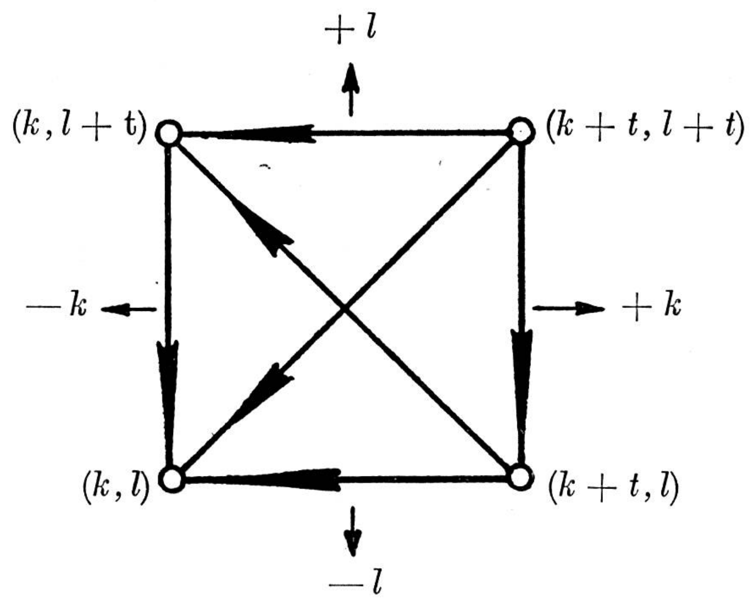
Die vorstehenden Ungleichungen hätten sich zum Teil auch gewinnen lassen unter Bezugnahme auf die Ungleichungen von *Steffensen-Jensen.* Wir haben jedoch eine in sich geschlossene elementare Herleitung vorgezogen, da damit ein besserer Einblick in die Klasse der Mittelwerte $M(k, l)$ gegeben ist.

4.

In Zusammenfassung des in Abschnitt 3 Gesagten können wir nunmehr feststellen: Nehmen wir von $M(k, l)$ die vier Positionen (k, l), $(k + t, l)$, $(k, l + t)$ und $(k + t, l + t)$ — für die wir die später noch zu verallgemeinernde Bezeichnung «benachbart» einführen wollen, sofern wir $t = \pm 1$ nehmen —, so gilt stets:

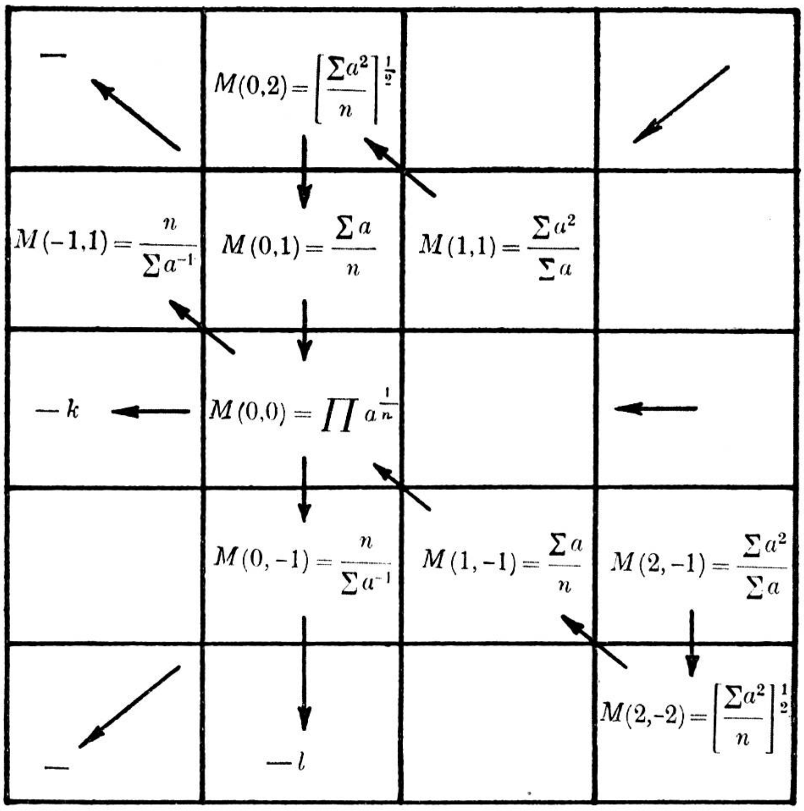
für festes l:	$M(k, l)$	$\leqslant M(k + t, l)$,	nach XVI
für festes k:	$M(k, l)$	$\leqslant M(k, l + t)$,	nach XIV
für $k - l$ konstant:	$M(k, l)$	$\leqslant M(k + t, l + t)$,	nach XVII
für $k + l$ konstant:	$M(k, l + t)$	$\leqslant M(k + t, l)$,	nach XIV

Denken wir uns die Gesamtheit der $M(k, l)$-Werte als eine Fläche im Raum über der k, l-Ebene repräsentiert, so gibt uns das folgende Schema ein Bild über deren Verlauf bzw. Anstieg und Abfall (die Fläche fällt in Richtung der Pfeile):



Betrachten wir kurz das durch ganzzahlige Werte von k und l gegebene Gitter: Nachdem $M(k, l) = M(k+l, -l)$, tritt jeder Wert $M(k, l)$ zweimal auf, mit Ausnahme der geometrischen Mittelwerte $M(k, 0)$. Oder mit andern Worten: Jede zur l-Achse parallele Wertereihe tritt auch auf parallel zur Winkelhalbierenden des 2. und 4. Quadranten, der Schnittpunkt der beiden Reihen liegt in $M(k, 0)$.

Es lohnt sich, noch die nächste Umgebung von $M(0, 0)$ genauer zu betrachten, wie sie in nachstehendem Schema wiedergegeben ist (die Pfeile zeigen in Richtung kleinerer Mittel):



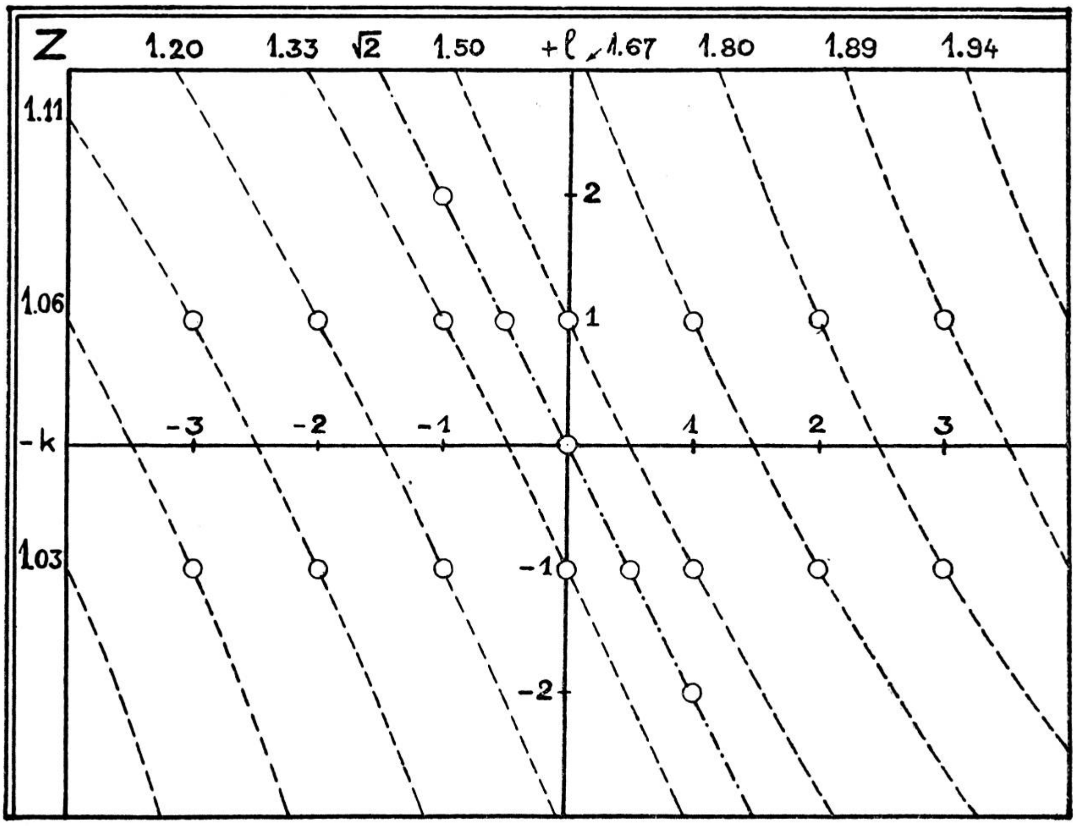
Es ist also stets:

$$\frac{\sum a^2}{\sum a} > \left(\frac{\sum a^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} > \frac{\sum a}{n} > \prod a^{\frac{1}{n}} > \frac{n}{\sum a^{-1}}$$

d. h. KHM > Qu. M. > A. M. > G. M. > H. M.

Die Fläche $z = M(k, l)$ ist — entsprechend den Fundamentaleigenschaften der Mittelwerte — eindeutig und liegt zwischen den Ebenen $z = a_1$ und $z = a_n$. Die Parameterlinien $l =$ konstant bzw. $k =$ konstant haben die Geraden $z = a_1$ und $z = a_n$ als Asymptoten (wir haben die einschlägigen vier Grenzwerte weiter oben bereits erwähnt), und zwar wachsen die Ordinaten z mit wachsenden Werten k, bzw. l, monoton. Jede Kurve $l(k) =$ konst. hat einen Wendepunkt; dieser verschiebt sich mit wachsendem $l(k)$ im Sinne kleinerer $k(l)$. Von besonderem Interesse sind die Wendepunkte der Parameterlinien $k = 0$ bzw. $l = 0$: sie inzidieren im Zentrum der Fläche, dem Punkte $Z = M(0, 0)$. — Offenbar gibt es zu jedem zwischen a_1 und a_n liegenden Wert m und einem beliebig vorgegebenen endlichen $k(l)$ stets ein und nur ein $l(k)$ derart, dass $M(k, l) = m$. Zu jedem solchen m

gibt es also unendlich viele Wertepaare k/l, die die Gleichung $M(k, l) = m$ erfüllen; $z = m$ stellt das System der Niveaulinien unserer Fläche dar. Auf der durch das Flächenzentrum gehenden Niveaulinie liegen z. B. alle jene Mittelwerte, die gleich dem geometrischen Mittel sind. Die folgende Skizze zeigt die Projektion in die k/l-Ebene der Niveaulinien in der Nähe von $M(0, 0)$ für den Fall $n = 2$, mit $a_1 = 1$ und $a_2 = 2$.



Im vorstehenden speziellen Beispiel erkennt man die Niveaulinie durch $M(0, 0)$ als Gerade, deren Projektion in der k/l-Ebene durch unendlich viele Gitterpunkte geht; in der Tat gilt ja für $n = 2$: $M(k, -2k) = (a_1 \cdot a_2)^{\frac{1}{2}}$. (Wir werden weiter unten beweisen, dass es auf jeder Fläche $M(k, l)$ eine gerade Niveaulinie gibt, die stets den Richtungskoeffizienten -2 hat, im allgemeinen Fall aber nicht mehr durch das Flächenzentrum läuft.)

Für beliebige n erhält man nach leichter Umformung als Gleichung der Projektion in die k/l-Ebene der Niveaulinie für den Mittelwert M:

$$\sum a^k (a^l - m^l) = 0$$

Für $l = 0$ liefert diese Gleichung keinen bestimmten Wert für k; in diesem Fall muss k aus dem weiter oben hergeleiteten Grenzwert für $M(k, 0)$ bestimmt werden, und man erhält

$$\Pi\left(\frac{a}{m}\right)^{a^k} = 1 \text{ als Bestimmungsgleichung für } k.$$

Die Kenntnis der Parameterlinien allein genügt nicht, um sich eine klare Vorstellung über das Verhalten der Fläche z im Unendlichen zu bilden: alle Parameterlinien $k =$ konst. und $l =$ konst. (mit endlichen Konstanten) streben ja mit wachsenden (fallenden) l bzw. k den Extremalwerten $a_n (a_1)$ zu, woraus sofort folgt, dass die Fläche im I. Quadranten (d. h. also bei positiven k und l) die Asymptoten-Ebene $z = a_n$ und im III. Quadranten (negative k und l) die Asymptoten-Ebene $z = a_1$ besitzt. Ihr Verhalten im II. und IV. Quadranten bleibt zunächst unbestimmt. Immerhin zeigt bereits die Existenz der ja gerade diesen beiden Quadranten zustrebenden Niveaulinien (vgl. unsere Skizze), dass der Schnitt der Fläche $M(k, l)$ mit der unendlich fernern Ebene in den genannten kritischen Quadranten z-Werte annehmen muss, die stetig von a_1 bis a_n wachsen. Wir werden nachstehend untersuchen, wo diese Werte liegen, und zeigen, dass

1) sich für jede Niveaulinie die beiden Asymptotenrichtungen bestimmen lassen;

2) das Büschel der Asymptotenrichtungen φ nur den Winkelraum

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{4} \text{ erfüllt.}$$

Diese beiden Eigenschaften geben — wie wir durch eine zylindrische Orthogonalprojektion der unendlich fernen Ebene veranschaulichen werden — Aufschluss über die unendlich ferne Kurve der Fläche $M(k, l)$.

Wir führen zunächst Polarkoordinaten in der k/l-Ebene ein: $k = r \cdot \cos\varphi$; $l = r \cdot \sin\varphi$. Entsprechend erhält man:

$$M(k, l) = z = \left(\frac{\sum a^{r\cdot(\sin\varphi + \cos\varphi)}}{\sum a^{r\cdot\cos\varphi}}\right)^{\frac{1}{r\cdot\sin\varphi}} \qquad \text{(XVIII)}$$

Um nun die z-Werte der unendlich fernen Kurve in Funktion von φ zu erhalten, hat man offenbar $L = \lim\limits_{r=\infty} z$ zu bestimmen. Man hat vorerst:

$$\ln L = \frac{\ln \sum a^{r \cdot (\sin \varphi + \cos \varphi)} - \ln \sum a^{r \cdot \cos \varphi}}{r \cdot \sin \varphi}$$

Die Differentiation von Zähler und Nenner dieses Quotienten liefert:

$$\ln L = \sin^{-1} \varphi \cdot \left(\frac{(\sin \varphi + \cos \varphi) \sum a^{r \cdot (\sin \varphi + \cos \varphi)} \ln a}{\sum a^{r \cdot (\sin \varphi + \cos \varphi)}} - \frac{\cos \varphi \sum a^{r \cdot \cos \varphi} \cdot \ln a}{\sum a^{r \cdot \cos \varphi}} \right)$$

Nun sind vier Fälle zu unterscheiden:

1) $\sin \varphi + \cos \varphi > 0$ und gleichzeitig $\cos \varphi > 0$; unter diesen Voraussetzungen liefert die obige Formel:

$\ln L_1 = \sin^{-1} \varphi \cdot ((\sin \varphi + \cos \varphi) \cdot \ln a_n - \cos \varphi \cdot \ln a_n) = \ln a_n$

also $L_1 = a_n$;

2) $\sin \varphi + \cos \varphi > 0$ aber $\cos \varphi < 0$,

hier liefert die allgemeine Formel

$\ln L_2 = \sin^{-1} \varphi \cdot ((\sin \varphi + \cos \varphi) \ln a_n - \cos \varphi \cdot \ln a_1)$

also $$L_2 = \frac{a_n^{1 + ctg\, \varphi}}{a_1^{ctg\, \varphi}}$$

3) $\sin \varphi + \cos \varphi < 0$ aber $\cos \varphi > 0$

wieder aus der allgemeinen Formel:

$\ln L_3 = \sin^{-1} \varphi \cdot ((\sin \varphi + \cos \varphi) \cdot \ln a_1 - \cos \varphi \cdot \ln a_n)$

$$L_3 = \frac{a_1^{1 + ctg\, \varphi}}{a_n^{ctg\, \varphi}}$$

4) $\sin \varphi + \cos \varphi < 0$ und auch $\cos \varphi < 0$

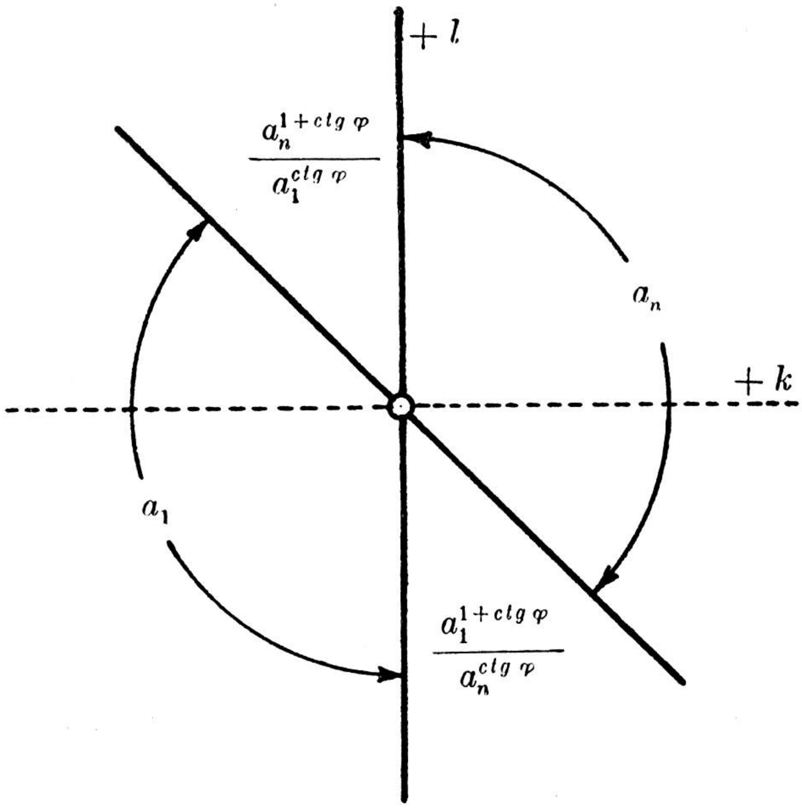
analog zu 1) erhält man schliesslich

$$L_4 = a_1$$

An diesen Resultaten ist bemerkenswert, dass die Grenzwerte L_i nur Funktionen von a_1 und a_n sind, also von der Anzahl und Verteilung der dazwischenliegenden a_j, $1 < j < n$, nicht abhängen.

Die Funktionen für L_i bringen nun in verschiedener Hinsicht weiteres Licht in die Struktur unserer Fläche $M(k, l)$:

Die k/l-Ebene teilt sich also nach folgendem Schema in zwei (Doppel-) Sektoren auf, wobei die in den Sektoren angeschriebenen Werte jene der Punkte der unendlich fernen Kurve in den entsprechenden Intervallen angeben:



Wie man sich durch Einsetzen der Intervallgrenzen von φ, also $\varphi =$ bzw. $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$, überzeugt, ist die unendlichferne Kurve stetig. Andererseits zeigt eine Untersuchung der abgewickelten orthographischen Zylinderprojektion Unstetigkeiten der ersten Ableitung an den Intervallgrenzen, d. h. die Kurve hat in den genannten Punkten Ecken.

Bezeichnen wir den der Kurve zugewandten Winkel der Asymptoten als Öffnung der Kurve, so gilt der Satz: Die Öffnung der Niveaulinien ist stets $\geqslant 135^o$.

Da die Niveaulinien stetig von konvexen zu konkaven Kurven übergehen, muss stets eine (und nur eine) *Gerade* darunter sein; und zwar lässt sie sich leicht bestimmen: liegt sie doch dann vor, wenn die beiden Asymptoten der Niveaulinie zusammenfallen, d. h. also dann, wenn für ein bestimmtes φ dasselbe (unendlichferne) z erhalten wird wie für die Richtung $\varphi + \pi$. Daraus folgt die Bestimmungsgleichung für φ:

$$\frac{a_n^{1+ctg\,\varphi}}{a_1^{ctg\,\varphi}} = \frac{a_1^{1+ctg\,(\pi+\varphi)}}{a_n^{ctg\,(\pi+\varphi)}} = \frac{a_1^{1+ctg\,\varphi}}{a_n^{ctg\,\varphi}}$$

also: $$\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{1+ctg\,\varphi} = \left(\frac{a_1}{a_n}\right)^{ctg\,\varphi} = \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{-ctg\,\varphi}$$

woraus: $$1 + ctg\,\varphi = -\,ctg\,\varphi \quad \text{also} \quad ctg\,\varphi = -\frac{1}{2}$$

Die Kenntnis des Wertes der Kotangente des der geraden Niveaulinie zukommenden Wertes φ_g gestattet nun aber, das Niveau (d. h. den Wert von $z = M(k, l)$) dieser Geraden zu bestimmen:

$$z = \frac{a_n^{1+ctg\,\varphi_g}}{a_1^{ctg\,\varphi_g}} = \frac{a_n^{\frac{1}{2}}}{a_1^{-\frac{1}{2}}} = (a_1 \cdot a_n)^{\frac{1}{2}}$$

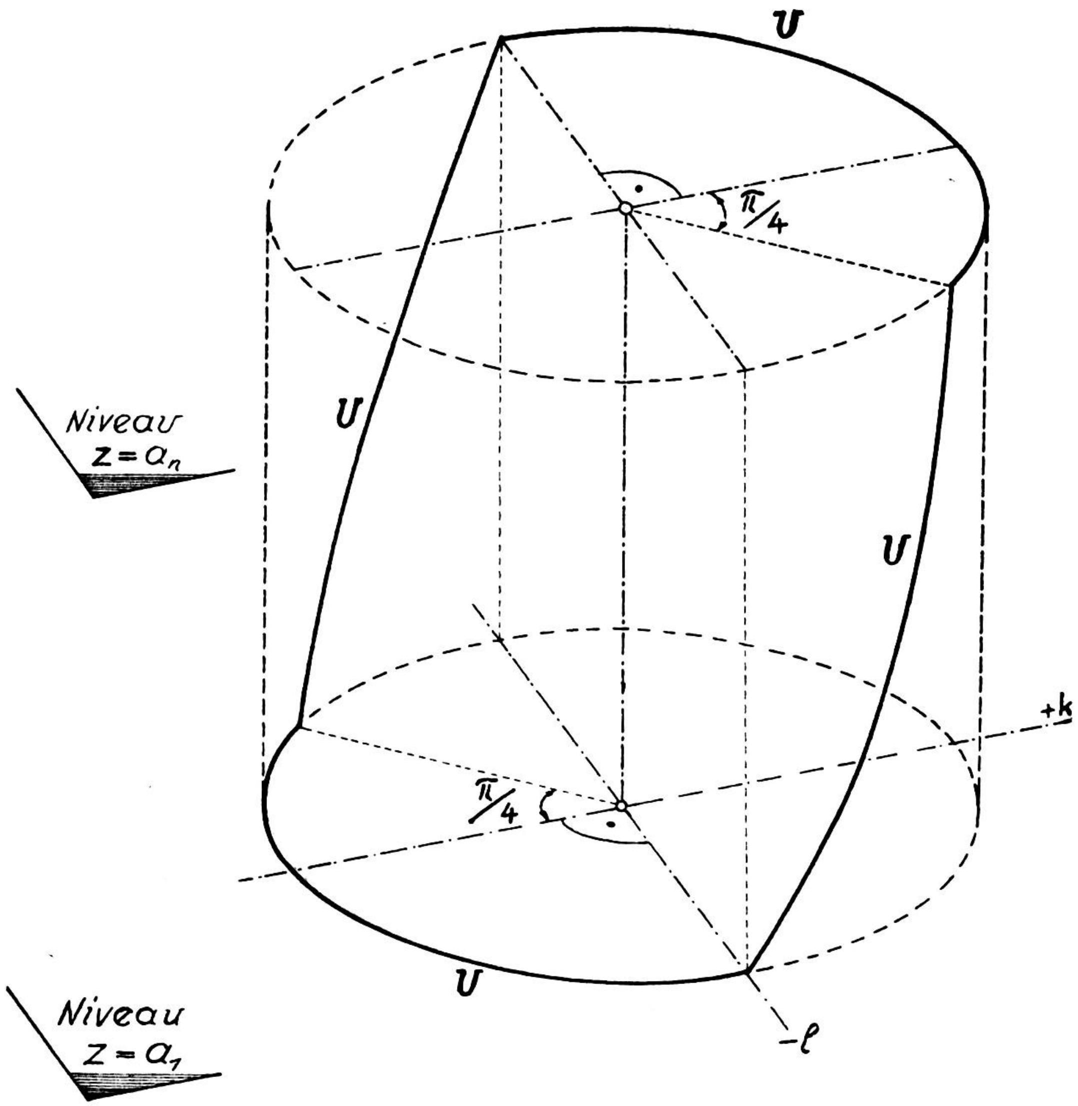
Das heisst:

Alle Mittelwerte, die gleich dem geometrischen Mittel aus dem kleinsten und dem grössten der zu mittelnden Werte a_i sind, liegen auf der Fläche $z = M(k, l)$ auf einer Geraden, deren Projektion in der k/l-Ebene den Richtungskoeffizienten -2 hat.

Im bereits skizzierten Spezialfall $n = 2$ geht diese Gerade durch das Flächenzentrum, da für diesen Fall ja gilt

$$M(0, 0) = \prod a_i^{\frac{1}{n}} = (a_1 \cdot a_2)^{\frac{1}{2}}$$

Die nachstehende Skizze stellt eine orthogonale Zylinderprojektion (Achse des Rotationszylinders durch das Flächenzentrum senkrecht zur k/l-Ebene) der unendlichfernen Kurve der Fläche $M(k, l)$ dar und veranschaulicht einige der oben hergeleiteten Eigenschaften.



5.

Wir kehren zurück zum Mittelwert nach Formel VII:

$$M = \left(\frac{{}_r p_k}{\binom{n}{r}} \right)^{\frac{1}{t}}, \qquad k \cdot r = t$$

Die hiedurch repräsentierte Klasse von Mittelwerten gibt verallgemeinerte Potenzmittel, wobei aber nicht Potenzsummen der a_i selbst, sondern solche über Kombinationen der a_i zur Klasse r auftreten. — Es sei auch hier vorerst die Frage geklärt, ob für zwei derartige Mittelwerte:

$$M_1 = \left(\frac{{}_sp_w}{\binom{n}{s}}\right)^{\frac{1}{v}} \text{ und } M_2 = \left(\frac{{}_rp_k}{\binom{n}{r}}\right)^{\frac{1}{t}}$$

eine Quotientenbildung analog zu V wieder Mittelwerte liefert. Wir erhalten eine Formel der Gestalt

$$M = \left(\frac{{}_sp_w \cdot \binom{n}{r}}{\binom{n}{s} \cdot {}_rp_k}\right)^{\frac{1}{v-t}}, \quad s \cdot w = v, \quad r \cdot k = t$$

oder, wenn wir $s = r + q$ und $w = k + l$ setzen:

$$M(k, l; r, q) = \left(\frac{{}_{r+q}p_{k+l} \cdot \binom{n}{r}}{\binom{n}{r+q} \cdot {}_rp_k}\right)^{\frac{1}{kq + l(r+q)}} \tag{XIX}$$

Diese Formel liefert in der Tat unter gewissen Nebenbedingungen Mittelwerte. Der Beweis ergibt sich in Weiterführung der Herleitung von Formel V. Es wurde dort bereits bewiesen, dass

$$a_1 \cdot s_r \cdot \binom{n}{r+1} < s_{r+1} \cdot \binom{n}{r} < a_n \cdot s_r \cdot \binom{n}{r+1}$$

Ersetzen wir zunächst die a_i durch a_i^k, so bleibt unter der vorläufigen Beschränkung auf positive k die folgende Ungleichung richtig:

$$a_1^k \cdot {}_rp_k \cdot \binom{n}{r+1} < {}_{r+1}p_k \cdot \binom{n}{r} < a_n^k \cdot {}_rp_k \cdot \binom{n}{r+1}$$

Die wiederholte Anwendung des Multiplikationssatzes liefert

$$a_1^{kq} < \frac{{}_{r+q}p_k \cdot \binom{n}{r}}{\binom{n}{r+q} \cdot {}_rp_k} < a_n^{kq}, \quad \text{für} \quad kq > 0 \tag{XX}$$

Diese Ungleichung kann man in folgender Weise erweitern: Man multipliziert a_1^{kq} mit $a_1^{l(r+q)}$, a_n^{kq} mit $a_n^{l(r+q)}$ und im Mittelglied jeden

Summanden mit einem entsprechenden Produkt aus $(r+q)$ verschiedenen a_i^l, so dass man erhält:

$$a_1^{kq} \cdot a_1^{l(r+q)} < \frac{{}_{r+q}p_{k+l} \cdot \binom{n}{r}}{{}_r p_k \cdot \binom{n}{r+q}} < a_n^{kq} \cdot a_n^{l(r+q)}$$

Diese Erweiterung ist allerdings nur so lange zulässig, als $l(r+q)$ positiv bleibt; da aber $(r+q)$ eine Kombinationsklasse bezeichnet und daher stets positiv ist, folgt, dass $l > 0$ sein muss. Es folgt also, dass $M(k, l; r, q)$ sicher ein Mittelwert ist, wenn sowohl $l > 0$ als auch $kq > 0$, und zwar überzeugt man sich leicht, dass nur das Produkt $kq > 0$ sein muss, also sehr wohl gleichzeitig $k < 0$ und $q < 0$ sein darf, ohne dass sich in Ungleichung XX etwas ändert. Ist aber $kq < 0$ (sei es wegen $k < 0$, $q > 0$, oder wegen $k > 0$, $q < 0$, wobei in letzterem Fall stets $|q| < r$ bleiben muss), so kehrt sich die Ungleichung XX um in

$$a_1^{kq} > \frac{{}_{r+q}p_k \cdot \binom{n}{r}}{{}_r p_k \cdot \binom{n}{r+q}} > a_n^{kq}$$

Eine Erweiterung ist nun nur zulässig, wenn $l(r+q) < 0$, also $l < 0$; alsdann aber erhält man für $M(k, l; r, q)$ wieder ein Mittel, und es gilt demnach

$$M(k, l; r, q) = \left(\frac{{}_{r+q}p_{k+l} \cdot \binom{n}{r}}{{}_r p_k \cdot \binom{n}{r+q}} \right)^{\frac{1}{kq + l(r+q)}}$$

ist stets ein Mittel, wenn kq und l gleiche Vorzeichen haben.

Es liegt nun nahe, die Mannigfaltigkeit dieser Mittel in ähnlicher Weise zu untersuchen, wie wir dies weiter oben mit den Mitteln $M(k, l)$ getan haben. Vor allem sei festgehalten, dass die behandelte Mittelwertsklasse $M(k, l)$ lediglich einen Spezialfall von $M(k, l; r, q)$ darstellt, insofern, als — wie man sich leicht überzeugt — gilt:

$$M(k, l; 1, 0) = M(k, l)$$

Wir prüfen zunächst den Definitionsbereich der vierparametrigen Schar der $M(k, l; r, q)$: während für die Exponenten k und l sämtliche reellen Werte zulässig sind, können für die Indizes r und q — die ja Kombinationsklassen der n Basisgrössen a_i anzeigen — nur natürliche Zahlen in Frage kommen, die zudem durch die folgenden Ungleichungen limitiert sind:

$$0 < r \leqslant n;\; 0 < r + q \leqslant n$$

Als Ordnungsschema für die Mannigfaltigkeit der $M(k, l; r, q)$ sind verschiedene Wege gangbar: Einmal liegt der Gedanke nahe, die M als Punkte eines vierdimensionalen Hyperflächenstreifens im fünfdimensionalen Raum aufzufassen. Von einem «Streifen» muss deshalb gesprochen werden, weil die Dimensionen r und q durch obige Ungleichungen begrenzt sind. Wichtiger ist der Hinweis, dass die Hyperfläche einen recht speziellen Charakter aufweist, ist doch ihr vierdimensionaler Raum nur in den Richtungen der k und l stetig (und differenzierbar) mit Punkten besetzt, während in den Richtungen r und q für endliche n lediglich eine diskrete — durch vorgenannte Ungleichungen bestimmbare — Anzahl Gitterpunkte als Punkte der Hyperfläche existieren.

Dieser Unterschied zwischen den beiden Dimensionspaaren k, l und r, q kann gut auch durch das folgende Beispiel des Überganges vom A. M. zum G. M. veranschaulicht werden, einerseits nämlich durch stetiges Vorrücken in der Richtung abnehmender l, andererseits durch sprungweises Fortschreiten in der Richtung (treppenartig) steigender r:

$$M(0,1;1,0) \longrightarrow M\left(0,\frac{1}{l};1,0\right) \longrightarrow M(0,0;1,0)$$

$$\text{d. h. A. M.} = \frac{\sum a}{n} > \ldots > \left(\frac{\sum a^{\frac{1}{l}}}{n}\right)^{l} \underset{\lim l = \infty}{>} \ldots > \prod a^{\frac{1}{n}} = \text{G. M.} \quad (\text{gem. XV})$$

$$M(0,1;1,0) \longrightarrow M(0,1;r,0) \longrightarrow M(0,1;n,0)$$

$$\text{d. h. A. M.} = \frac{\sum a}{n} > \ldots > \left(\frac{s_r}{\binom{n}{r}}\right)^{\frac{1}{r}} > \ldots > \prod a^{\frac{1}{n}} = \text{G. M.} \quad (\text{gem. III})$$

Die partiellen Diskontinuitäten in der Mannigfaltigkeit $M(k, l; r, q)$ hindern nun allerdings nicht, nach dem Beispiel des Verfahrens bei $M(k, l)$ die Frage nach «benachbarten Mitteln» aufzuwerfen, wobei als benachbart alle jene Werte anzusprechen sind, deren Parameter sich von den ihnen zugeordneten k, l, r, q um $+1$, 0 oder -1 unterscheiden. Denkt man sich den Wert $M(k, l; r, q)$ als Zentrum eines vierdimensionalen Würfels von der Seite 3, so hat man als benachbarte Werte offenbar alle Gitterpunkte, die auf der Hyperoberfläche dieses Hyperwürfels liegen. Ihre Zahl lässt sich sofort als $3^4 - 1 = 80$ angeben. Diese 80 benachbarten Werte können — abgestuft nach ihren Entfernungen vom zentralen Gitterpunkt — in vier Gruppen geteilt werden: 8 Werte liegen je paarweise im Abstand 1 auf den vier Achsen k, l, r, q; 24 Werte liegen in den Mitten der den Hyperwürfel begrenzenden Quadrate, 32 in den Mitten der Kanten und 16 stellen schliesslich die Ecken des Hyperwürfels dar. Wir lassen angesichts dieser recht zahlreichen Nachbarschaft die Frage offen, ob sich nach dem Beispiel für $M(k, l)$ auch hier Systeme von Ungleichungen aufstellen lassen. Es scheint dies übrigens schon deshalb nicht vordringlich, weil alle bekannten und praktisch vorkommenden Mittel — wie wir gesehen haben — bereits in der Klasse der $M(k, l)$, und zwar in unmittelbarer Nachbarschaft des Zentrums $M(0, 0)$, vorkommen und sich dort ihre Rangordnung zwanglos ergeben hat.

Die diskrete Anzahl der Punkte $r|q$ gestattet nun eine andere Gruppierung der $M(k, l; r, q)$: Man stelle sich zunächst ein rechteckiges Gitter mit den Seiten $1 \leqslant r \leqslant n$ und $-(n-1) \leqslant q \leqslant +(n-1)$ vor, innerhalb welchem offenbar alle zulässigen Punkte $r|q$ liegen müssen. Die Besetzung dieses Gitters umfasst aber wegen der Ungleichung $0 < r + q \leqslant n$ nur ein Parallelogramm (besetzte Punkte $= +$, leere Stellen $= \circ$):

$r =$ \ $q =$	$-(n-1)$	$-(n-2)$	$\cdots$	-1	0	$+1$	$\cdots$	$(n-2)$	$(n-1)$
1	o	o	$\cdots$	o	+	+	$\cdots$	+	+
2	o	o	$\cdots$	+	+	+	$\cdots$	+	o
3	o	o	$\cdots$	+	+	+	$\cdots$	o	o
.									
.									
.									
$n-2$	o	o		+	+	+		o	o
$n-1$	o	+		+	+	+		o	o
n	+	+		+	+	o	$\cdots$	o	o

Man sieht, dass in diesem Tableau n^2 Stellen besetzt sind. Jedem dieser Punkte ist eine Mittelwertformel zugeordnet, die im Prinzip einer analogen Behandlung wie $M(k, l)$ zugänglich ist, d. h. eine stetige Mannigfaltigkeit von ∞^2 Formeln für Mittelungen repräsentiert. Von besonderem Interesse sind die Eckpunkte des obigen Parallelogramms: Wir haben bereits gesehen, dass der Eckpunkt $M(k, l; 1, 0) = M(k, l)$. Die Ecke $M(k, l; n, 1 - n)$ und die zu ihr diametrale $M(k, l; 1, n - 1)$ sind im Aufbau korollar:

$$M(k, l; 1, n - 1) = \left(\frac{\sum a^{k+l}}{n \cdot \prod a^k}\right)^{\frac{1}{l-(n-1)k}}$$

$$M(k, l; n, 1 - n) = \left(\frac{n \cdot \prod a^{k+l}}{\sum a^k}\right)^{\frac{1}{ln+(n-1)k}}$$

und gehen insbesondere für $l = 0$ ineinander über.

Vor allem bemerkenswert ist nun aber der vierte Eckpunkt, d. h. der Diametralwert zu $M(k, l)$, d. i. $M(k, l; n, 0)$; man sieht nämlich sofort, dass $M(k, l; n, 0) = \prod a^{\frac{1}{n}} =$ G. M.!

Diese besondere Mittelwertformel ist aber nicht die einzige, die — von zwei Parametern unabhängig — mit dem geometrischen Mittel identisch ist; vielmehr zeigt eine leichte Determinierung des zunächst unbestimmten Ausdrucks für $M(0, 0; r, q)$, dass

$$M(0, 0; r, q) = \prod a^{\frac{1}{n}}$$

Anderseits ist der eben erwähnte Ausdruck nicht die einzige a priori unbestimmte Position in der Mannigfaltigkeit der $M(k, l; r, q)$. Mit den bereits mehrfach verwendeten Mitteln lässt sich bestimmen

$$M(k,0;r,0) = \left(\prod_{(\Pi_r a)} (\Pi_r a)^{(\Pi_r a)^k}\right)^{\frac{1}{r \cdot {}_r p_k}} \qquad \text{(XXI)}$$

wenn man unter $\Pi_r a$ die Produkte der a_i mit r verschiedenen Faktoren (d. h. also die Summanden von s_r) versteht.

Die Formel XXI ist ein — allerdings etwas kompliziertes — gewogenes geometrisches Mittel. Man sieht dies am besten an einem Beispiel; wählen wir $n = 4$, $r = 2$ und schreiben wir wieder aus Gründen der Abkürzung für $a_i\, a_j = a_{ij}$, so haben wir:

$$\underset{n=4}{M(k,0;2,0)} = \left[(a_{12})^{a_{12}^k} \cdot (a_{13})^{a_{13}^k} \cdot (a_{14})^{a_{14}^k} \cdot (a_{23})^{a_{23}^k} \cdot (a_{24})^{a_{24}^k} \cdot (a_{34})^{a_{34}^k}\right]^E =$$

$$= \left[a_1^{a_1^k(a_2^k + a_3^k + a_4^k)} \cdot a_2^{a_2^k(a_1^k + a_3^k + a_4^k)} \cdot a_3^{a_3^k(a_1^k + a_2^k + a_4^k)} \cdot a_4^{a_4^k(a_1^k + a_2^k + a_3^k)}\right]^E,$$

$$\text{wobei } E = \frac{1}{2\left[a_{12}^k + a_{13}^k + a_{14}^k + a_{23}^k + a_{24}^k + a_{34}^k\right]}.$$

Man sieht leicht, dass der auf Seite 143 ausführlich hergeleitete Grenzwert für $M(k, 0)$ nur einen Spezialfall von XXI für $r = 1$ darstellt. Sodann erweist sich auch der bisher unerledigt gebliebene Fall $t = r$ in Formel V als Spezialfall von XXI, indem $k = 1$ zu setzen ist.

Ausser den unbestimmten Werten lassen sich auch noch eine Reihe von andern Reduktionsfällen anführen, wie z. B.:

$$M(1,0;0,q) = \left(\frac{{}_q p_1}{\binom{n}{q}}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{s_q}{\binom{n}{q}}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$M(0,1;r,0) = \left(\frac{{}_r p_1}{\binom{n}{r}}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{s_r}{\binom{n}{r}}\right)^{\frac{1}{r}}$$

d. h. also: $M(1, 0; 0, t) = M(0, 1; t, 0)$.

6.

Nachdem die Potenzsummen sich als ganze rationale Funktionen der elementarsymmetrischen Funktionen darstellen lassen, kann die Anwendung des Multiplikationssatzes und der Additionssätze auf die verallgemeinerten Potenzmittel allein oder in Kombination mit gewöhnlichen Potenzmitteln oder grundlegenden Mittelwerten nichts prinzipiell Neues fördern. Ganz allgemein kann gesagt werden, dass damit eine Methode gegeben ist, um eine unübersehbare Vielfalt von algebraischen Mittelwertformeln zu gestalten. Wir schliessen darum unsere Ausführungen mit der Angabe einiger einfacher charakteristischer Beispiele:

1) Es seien gegeben zwei reelle Werte $0 < a_1 < a_2$. Dann können wir unter Verwendung von Multiplikations- und erstem Additionssatz den folgenden Mittelwert bilden

$$M = \left(\frac{1}{n+1}\left(a_1^n + a_2^n + a_1 a_2 (a_1^{n-2} + a_2^{n-2}) + a_1^2 a_2^2 (a_1^{n-4} + a_2^{n-4}) + \ldots\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

wobei der letzte Term in der Klammer gleich ist:

$$\text{für gerades } n\colon\; a_1^{\frac{n}{2}} \cdot a_2^{\frac{n}{2}}$$

$$\text{für ungerades } n\colon\; (a_1 \cdot a_2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot (a_1 + a_2)$$

Eine einfache Umordnung des Klammerausdrucks in a_1 und a_2 ergibt:

$$a_1^n + a_1^{n-1} a_2 + a_1^{n-2} a_2^2 + \ldots + a_1 a_2^{n-1} + a_2^n = \frac{a_1^{n+1} - a_2^{n+1}}{a_1 - a_2}$$

und wir können dem Mittelwert die Gestalt geben

$$M = \left(\frac{a_1^{n+1} - a_2^{n+1}}{(n+1)\,(a_1 - a_2)}\right)^{\frac{1}{n}}$$

2) Als Beispiel für eine Anwendung des zweiten Additionssatzes denken wir uns gegeben eine Reihe von Mittelwerten

$$M(k,1) = \frac{\sum a^{k+1}}{\sum a^k}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots h$$

Es ist dann auch:

$$\frac{\sum_i \sum_k a_i^{k+1}}{\sum_i \sum_k a_i^k}$$

ein Mittelwert, nämlich ein arithmetisches Mittel:

$$\frac{\sum_i \left(a_i \sum_k a_i^k\right)}{\sum_i \sum_k a_i^k} \text{ mit den Gewichten } \sum_k a_i^k.$$

Für $h = 3$ z. B. resultiert

$$M = \frac{\sum_i (a_i^4 + a_i^3 + a_i^2 + a_i)}{\sum_i (a_i^3 + a_i^2 + a_i + 1)} = \frac{\sum_i a_i \left(a_i \left(a_i \left(a_i + 1\right) + 1\right) + 1\right)}{\sum_i a_i \left(a_i \left(a_i + 1\right) + 1\right)}$$

3) Bei der Anwendung der Additionssätze kann man die einzelnen Mittelwerte auch als unechte Brüche mit Nenner 1 anschreiben. Haben wir beispielsweise die drei Mittelwerte

$$\frac{\sum a^3}{\sum a^2}, \quad \frac{\sum a^2}{\sum a}, \quad \frac{\sum a}{n},$$

so sind u. a. folgende Ausdrücke auch Mittelwerte:

$$M = \frac{\frac{\sum a^3}{\sum a^2} + \sum a^2 + \sum a}{1 + \sum a + n} = \frac{\sum a^3 + \sum a^2 \cdot \sum a^2 + \sum a \cdot \sum a^2}{\sum a^2 + \sum a \cdot \sum a^2 + n \cdot \sum a^2}$$

$$M = \frac{\frac{\sum a^3}{\sum a^2} + \frac{\sum a^2}{\sum a} + \sum a}{1 + 1 + n} = \frac{\sum a^3 \cdot \sum a + \sum a^2 \cdot \sum a^2 + \sum a \cdot \sum a^2 \cdot \sum a}{\sum a^2 \cdot \sum a + \sum a \cdot \sum a^2 + n \cdot \sum a^2 \cdot \sum a}$$

$$M = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sum a^3}{\sum a^2} + \frac{\sum a^2}{\sum a} + \frac{\sum a}{n}\right) = \frac{\sum a^3 \cdot \sum a \cdot n + \sum a^2 \cdot \sum a^2 \cdot n + \sum a \cdot \sum a^2 \cdot \sum a}{\sum a^2 \cdot \sum a \cdot n + \sum a \cdot \sum a^2 \cdot n + n \cdot \sum a^2 \cdot \sum a}$$

Wie man sieht, sind dies Mittelwerte, die auch direkt unter Verwendung von Gewichten nach dem zweiten Additionssatz zu erhalten sind: wenn $\frac{Z_h}{N_h}$, $h = 1, 2, \ldots m$ Mittelwerte sind, so ist auch

$$\frac{\sum_h (Z_h \cdot G_h)}{\sum_h (N_h \cdot G_h)}$$

ein Mittelwert, wobei G_h beliebige positive Grössen bezeichnen.

4) Wir geben nun ein Beispiel für Anwendung des Multiplikationssatzes: Es seien gegeben die beiden Mittelwerte:

$$M_1 = \left(\frac{s_2}{\binom{n}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \text{und } M_2 = \left(\frac{{}_1p_2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sum a^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

so ist auch $$M = \left(\frac{s_2 \cdot {}_1p_2}{\binom{n}{2} \cdot n}\right)^{\frac{1}{4}}$$ ein Mittelwert. Für $n = 3$ insbesondere erhalten wir:

$$M = \left(\frac{(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3)\,(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}{3 \quad \cdot \quad 3}\right)^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \left[\frac{1}{9}\left(a_1^3 a_2 + a_2^3 a_1 + a_1^3 a_3 + a_3^3 a_1 + a_2^3 a_3 + a_3^3 a_2 + (a_1 + a_2 + a_3)\, a_1 a_2 a_3\right)\right]^{\frac{1}{4}}.$$

Nun ist $$\left(\frac{1}{3} \cdot a_1 a_2 a_3 (a_1 + a_2 + a_3)\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{s_3 \cdot s_1}{\binom{n}{3} \cdot n}\right)^{\frac{1}{4}}$$

ein Mittelwert, und ebenso ist

$$\left[\frac{1}{6} \cdot (a_1^3 a_2 + a_2^3 a_1 + a_1^3 a_3 + a_3^3 a_1 + a_2^3 a_3 + a_3^3 a_2)\right]^{\frac{1}{4}}$$

sofort als Mittel zu verifizieren, denn es ist

$$6 a_1^4 < a_1^3 a_2 + a_2^3 a_1 + a_1^3 a_3 + a_3^3 a_1 + a_2^3 a_3 + a_3^3 a_2 < 6 a_3^4$$

Bemerkenswert ist aber, dass dieser letztere Mittelwert in Darstellung durch die elementarsymmetrischen Funktionen die Gestalt hat

$$\left(\frac{s_2 \cdot s_1^2 - 2 s_2^2 - s_3 \cdot s_1}{\binom{n}{2} \cdot n^2 - 2\binom{n}{2}^2 - \binom{n}{3} \cdot n}\right)^{\frac{1}{4}},$$

also der Formel IV entspricht, welche a priori nur für positive Koeffizienten der s_k Mittelwerte garantiert. Es ist deshalb vielleicht nicht unnütz, hier nochmals zu betonen, dass Formel IV, nämlich

$$M = \left(\frac{\sum \Theta_i \cdot \prod s_m^h}{\sum \Theta_i \cdot \prod \binom{n}{m}^h}\right)^{\frac{1}{t}}, \quad \sum m \cdot h = t \text{ für jedes } \prod,$$

die fundamentale Formel zur Bildung elementarer Mittelwerte ist. Wenn die Θ_i ($\lesseqgtr 0$) derart gewählt werden, dass im Zähler ein in den a_i symmetrisches isobares Polynom vom Gewicht t und von lauter positiven Summanden entsteht, so ist M sicher ein Mittelwert. Diese Aussage kann sinngemäss auf den ersten Additionssatz direkt übertragen werden. Ein Beispiel hiefür:

5) Seien gegeben die beiden Mittelwerte:

$$M_1 = \left(\frac{\sum a^{k+l}}{\sum a^k}\right)^{\frac{1}{l}} = \left(\frac{\sum {}_1p_{k+l}}{\sum {}_1p_k}\right)^{\frac{1}{l}} \text{ und } M_2 = \left(\frac{\sum a^{2.(k+l)}}{\sum a^{2k}}\right)^{\frac{1}{2 \cdot l}} = \left(\frac{\sum {}_1p_{2(k+l)}}{\sum {}_1p_{2k}}\right)^{\frac{1}{2 \cdot l}}$$

so ist auch
$$M = \left(\frac{(\sum {}_1p_{k+l})^2 - \sum {}_1p_{2(k+l)}}{(\sum {}_1p_k)^2 - \sum {}_1p_{2k}}\right)^{\frac{1}{2 \cdot l}}$$

ein Mittelwert, denn im Zähler steht de facto ein in $a_i\, a_j$ homogenes Polynom mit lauter positiven Summanden, indem nämlich der genannte Mittelwert sich auch schreiben lässt:

$$M = \left(\frac{\sum {}_2p_{k+l}}{\sum {}_2p_k}\right)^{\frac{1}{2 \cdot l}}$$

d. h. der Formel VII mit $r = 2$, $q = 0$ entspricht. Der Beweis ist sofort erbracht, wenn man sich überlegt, dass

$$(\sum {}_1p_k)^2 = \sum {}_1p_{2k} + 2 \cdot \sum {}_2p_k \quad \text{ist.}$$

6) Schliesslich gestattet eine mehrfache Anwendung des I. Additionssatzes eine inhaltlich bereits behandelte, der Form nach aber neue Fassung eines gewichteten Potenzmittels:

Es seien $Z_j = \sum a_i^{k_j+l}$, $N_j = \sum a_i^{k_j}$; $k_1 > k_2 > \ldots > k_m > 0$

dann ist $M_j = \left(\frac{Z_j}{N_j}\right)^{\frac{1}{l}}$ ein Mittel; und ebenso ist ein Mittel:

$$M = \left(\frac{\Theta_1 \cdot Z_1 + \Theta_2 \cdot Z_2 + \ldots + \Theta_m \cdot Z_m}{\Theta_1 \cdot N_1 + \Theta_2 \cdot N_2 + \ldots + \Theta_m \cdot Z_m}\right)^{\frac{1}{l}} = \left(\frac{\sum_j \Theta_j \cdot Z_j}{\sum_j \Theta_j \cdot N_j}\right)^{\frac{1}{l}} =$$

$$= \left(\frac{a_1^l \cdot (\Theta_1 a_1^{k_1} + \Theta_2 a_1^{k_2} + \ldots + \Theta_m a_1^{k_m}) + a_2^l (\Theta_1 a_2^{k_1} + \ldots + \Theta_m a_2^{k_m}) + \ldots}{(\Theta_1 a_1^{k_1} + \Theta_2 a_1^{k_2} + \ldots + \Theta_m a_1^{k_m}) + (\Theta_1 a_2^{k_1} + \ldots + \Theta_m a_2^{k_m}) + \ldots}\right)^{\frac{1}{l}}$$

nehmen wir nun als k_j natürliche Zahlen (was für die Eigenschaft der obigen Formel als Mittelwert — wie wir wissen — in keiner Weise Bedingung ist, aber ihre einfache Schreibweise ermöglicht), so ist offenbar:

$$P(a_i) = \sum_j \Theta_j \cdot a_i^{k_j}$$

ein beliebiges Polynom vom Grade k_1 in a_i und durchwegs positiven Koeffizienten Θ_j.

Nun lässt sich unser Mittelwert schreiben:

$$M = \left(\frac{a_1^l \cdot P(a_1) + a_2^l \cdot P(a_2) + \ldots + a_n^l \cdot P(a_n)}{P(a_1) + P(a_2) + \ldots + P(a_n)}\right)^{\frac{1}{l}}$$

also

$$M = \left(\frac{\sum a_i^l \cdot P(a_i)}{\sum P(a_i)}\right)^{\frac{1}{l}}$$

Wir wissen aber auch, dass der Ausdruck

$$\left(\frac{\sum a_i^l \cdot G_i}{\sum G_i}\right)^{\frac{1}{l}}$$

dann immer ein Mittel ist, wenn $G_i > 0$.

Werden die Gewichte G_i nun durch beliebige positiv definite Funktionen von a_i, also $G_i = F_i(a_i) > 0$ ersetzt, so ist sowohl die soeben ausführlich hergeleitete wie auch die folgende allgemeinere Formel unmittelbar evident:

$$M = \left(\frac{\sum a_i^l \cdot F_i(a_i)}{\sum F_i(a_i)} \right)^{\frac{1}{l}} \quad \text{sofern } F_i(a_i) > 0 .$$